Н. М. Беляев

Сопротивление материалов



Н. М. БЕЛЯЕВ

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ИЗДАНИЕ ПЯТНАДЦАТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1976

605
Б 44
УДК 620.10

Сопротивленне материалов, Н. М. Беляев, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976 г., стр. 608.

Книга содержит теоретические выводы законов сопротивления материалов действию внешних сил, подкрепленные опытными данными. Наука о сопротивлении материалов является основой всех инженерных расчетов на прочность, деформируемость и устойчивость элементов конструкций.

В книге изучаются физико-механические свойства материалов, напряжения и деформации при растяжении, сдвиге, кручении, изгибе и при сложном сопротивлении прямых и кривых стержней. Изучаются законы устойчивости элементов конструкций, а также поведение материалов при действии динамических и переменных нагрузок.

Книга рассчитаиа на студентов очных и заочных политехнических, транспортных, строительных, гидротехнических, энергетических и механических втузов в качестве учебного пособия для самообразования.

$Б\frac{30106-159}{053(02)-76}$ 134-76

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1976,
с измененнями.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТДЕЛ II

СЛОЖНЫЕ СЛУЧАИ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ

ОТДЕЛ III

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

ОТДЕЛ IV

ИЗГИБ. ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ БАЛОК

ОТДЕЛ V

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В БАЛКАХ ПРИ ИЗГИБЕ

ОТДЕЛ VI
ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

ОТДЕЛ VII
СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

ОТДЕЛ VIII
УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

ОТДЕЛ IX
ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК

НИКОЛАЙ МИХАЙЛОВИЧ БЕЛЯЕВ

(1890—1944)

Николай Михайлович Беляев принадлежит к числу виднейших советских ученых в области технических приложений теории упругости и прочности материалов и сооружений.

Окончив в 1916 г., с занесением на мраморную доску, Петербургский институт инженеров путей сообщения, Николай Михайлович был оставлен при кафедре сопротивления материалов и работал под руководством С. П. Тимошенко.

С этим институтом (теперь Ленинградский институт инженеров железнодорожного транспорта) Николай Михайлович был связан всю свою жизнь. В нем он работал преподавателем по инженерным сооружениям, мостам, теоретической механике, сопротивлению материалов и теории упругости, а с 1924 г. и до конца жизни — заведующим кафедрой сопротивления материалов.

Николай Михайлович был всегда настоящим передовым инженером-исследователем и ученым. Им была впервые поставлена и решена важная в инженерной практике и интересная в теоретическом отношении задача об устойчивости призматических стержней под действием продольных переменных сил. Одновременно Николай Михайлович работал над задачей о местных напряжениях при сжатии соприкасающихся тел, существенно развив известные работы Герца. Эти работы, опубликованные Николаем Михайловичем в 1924 г., полностью сохранили свое значение в настоящее время.

Одним из первых в нашей стране Николай Михайлович занимался и многое сделал в области теории пластических деформаций.

В последние годы жизни Николай Михайлович плодотворно работал над проблемами крипа, релаксации и ползучести металлов при высоких температурах.

Николай Михайлович представлял редкий и яркий пример теоретика-экспериментатора. В 1924 г. он принял заведование Механической лабораторией Ленинградского института инженеров железнодорожного транспорта и за 16 лет своего руководства превратил ее в крупное, передовое научно-исследовательское учреждение.

В результате огромной работы, проведенной в этой лаборатории при его непосредственном руководстве и участии, были составлены новые технические условия, обеспечивающие длительную и надежную работу рельсов. Эти условия с несущественными дополнениями действуют и в настоящее время.

Общесоюзную известность и значение получили работы Николая Михайловича в области технологии бетона.

Педагогическая деятельность Николая Михайловича не ограничивалась Институтом железнодорожного транспорта; он работал в Ленинградском технологическом институте (1919—1926 гг.), в Ленинградском институте гражданского воздушного флота (1931—1934 гг.), с 1934 г. заведовал кафедрой сопротивления материалов крупнейшего в стране Ленинградского политехнического института.

В 1939 г. Николай Михайлович был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР, с 1942 г. он состоял заместителем директора Института механики АН СССР.

Его курс «Сопротивление материалов» завоевал у нас широкое признание.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТНАДЦАТОМУ ИЗДАНИЮ

После одиннадцатилетнего перерыва выходит в свет «Сопротивление материалов» Н. М. Беляева. За 33 года, со времени опубликования в 1932 году Н. М. Беляевым первого издания по 1965 год, когда вышло XIV издание книги, общий тираж ее составил 675 000 экземпляров, что свидетельствует о большой ее популярности. За это время книга дописывалась, пополнялась и перерабатывалась как самим Н. М. Беляевым, так и, после смерти Николая Михайловича в 1944 году, группой из четырех его учеников и сотрудников. Этот коллектив, подготовлявший V—XIV издания, не считал себя вправе вносить существенные изменения в труд Н. М. Беляева. Производились лишь совершенно необходимые в то или иное время дополнения и изменения в связи с заменой стандартов, технических условий, в свете последних данных науки.

В настоящем издании, подготовленном тем же коллективом, опущен ряд вопросов, не специфичных для сопротивления материалов или редко излагаемых во втузах при чтении основного курса. В частности, исключены «Контактные напряжения», «Клепаные балки», «Железобетонные балки», «Приближенный прием вычисления прогибов», «Балки на упругом основании», «Расчет тонкостенных стержней», все графические методы и часть «Сложных вопросов расчета на устойчивость», другая же часть дана в сокращенной редакции. Если изучение этих вопросов потребуется, то можно воспользоваться предыдущими изданиями книги или специальными монографиями.

В связи с наличием многочисленных задачников (см., например, «Сборник задач по сопротивлению материалов» под редакцией В. К. Качурина) в настоящем издании книги большинство примеров изъято. Оставлены лишь примеры, необходимые для пояснения теоретической части.

Для большей компактности изложения вопросы, касающиеся расчетов по допускаемым нагрузкам, ранее разбросанные в пяти местах книги, сведены теперь в одну главу (XXVI). В ней же впервые изложен принцип расчетов по предельным состояниям, выходящий за пределы основного курса сопротивления материалов, но понятие о котором необходимо дать и на этой стадии обучения.

Вопросы прочности, помещавшиеся в прежних изданиях в двух главах, теперь соединены в одной главе. Рассмотрение истинных напряжений перенесено в главу II, где оно проведено с достаточной полнотой.

В «Приложениях» ликвидированы таблицы со сведениями о материалах. Часть данных о материалах перенесена в соответствующие разделы книги. Устаревший сортамент прокатных профилей заменен новым.

Мы по-прежнему ставили во главу угла сохранение особенностей характера изложения и стиля Н. М. Беляева. Поэтому в основном сохранен текст автора. Возможно и даже вероятно, что будь Николай Михайлович жив, он многое сейчас написал бы иначе. Но так как книга завоевала популярность именно в изложении Н. М. Беляева, мы и стремились это изложение сохранить.

Распределение работы по подготовке XV издания между участниками коллектива было следующим: гл. XIII, § 80 гл. XIV, гл. XV—XIX, XXIV—XXV — Л. А. Белявский, гл. VI, VIII—XII, XXVII—XXVIII — Я. И. Кипнис, гл. I—V, XXVI и приложения — Н. Ю. Кушелев, гл. VII, § 79 гл. XIV, гл. XX—XXIII, XXIX—XXXII — А. К. Синицкий.

Март 1976 г. *А. К. Синицкий*

Отдел I

ВВЕДЕНИЕ. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Глава I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Задачи сопротивления материалов

При проектировании сооружений и машин инженеру приходится выбирать материал и поперечные размеры для каждого элемента конструкции так, чтобы он вполне надежно, без риска разрушиться или исказить свою форму, *сопротивлялся* действию внешних сил, передающихся на него от соседних частей конструкции, т. е. чтобы была обеспечена нормальная работа этого элемента. Основания для правильного решения этой задачи дает инженеру наука о *сопротивлении материалов.*

Эта наука изучает поведение различных материалов при действии на них сил и указывает, как подобрать для каждого элемента конструкции надлежащий материал и поперечные размеры при условии полной надежности работы и наибольшей дешевизны конструкции.

Иногда сопротивлению материалов приходится решать видоизмененную задачу — проверять достаточность размеров уже запроектированной или существующей конструкции.

Требования надежности и наибольшей экономии противоречат друг другу. Первое обычно ведет к увеличению расхода материала, второе же требует снижения этого расхода. Это противоречие является важнейшим элементом научной методики, обусловливающей развитие сопротивления материалов.

Часто наступает момент, когда существующие материалы и методы проверки прочности не в состоянии удовлетворить потребностям практики, ставящей на очередь решение новых задач (в наше время сюда относятся использование больших скоростей в технике вообще, в воздухоплавании в частности, перекрытие больших пролетов, динамические задачи и др.). Тогда начинаются поиски новых материалов, исследование их свойств, улучшение и создание новых методов расчета и проектирования. Прогресс науки о сопротивлении материалов должен поспевать за общим прогрессом техники.

В некоторых случаях инженеру, помимо основных требований — надежности и наибольшей экономии,— приходится при выполнении конструкции удовлетворять и другим условиям, например, требова-

ниям быстроты постройки (при восстановлении разрушенных сооружений), минимального веса (при конструировании самолетов) и т. п. Эти обстоятельства также отражаются на выборе материала, размеров и форм частей конструкции.

Начало развития сопротивления материалов как науки иногда относят к 1638 г. и связывают с именем Галилео Галилея, знаменитого итальянского ученого. Галилей был профессором математики в Падуе. Он жил в период разложения феодального строя, развития торгового капитала, международных морских сношений и зачатков горной и металлургической промышленности.

Новая экономика того времени поставила на очередь решение ряда новых технических проблем. Оживление внешних торговых сношений поставило задачу увеличения тоннажа судов, а это повлекло за собой необходимость изменения их конструкции; одновременно стал вопрос о реконструкции и создании новых внутренних водных путей сообщения, включая устройство каналов и шлюзов. Эти технические задачи не могли быть решены простым копированием существовавших раньше конструкций судов и сооружений; оказалось необходимым научиться путем расчета оценивать прочность элементов конструкции в зависимости от их размеров и величины действующих на них нагрузок.

Значительная часть работ Галилея была посвящена решению задач о зависимости между размерами балок и других стержней и теми нагрузками, которые могут выдержать эти элементы конструкции. Он указал, что полученные им результаты могут «принести большую пользу при постройке крупных судов, в особенности при укреплении палуб и покрытий, так как в сооружениях этого рода легкость имеет огромное значение». Исследования Галилея опубликованы в его книге «Discorsi e Dimostrazioni matematiche» (1638, Лейден, Голландия).

Дальнейшее развитие сопротивления материалов шло параллельно развитию техники строительства и машиностроения и связано с целым рядом работ выдающихся математиков, физиков и инженеров. Среди них значительное место занимают русские и советские ученые. Краткие сведения о роли отдельных ученых в развитии некоторых вопросов сопротивления материалов будут даны в соответствующих главах книги.

§ 2. Классификация сил, действующих на элементы конструкций

При работе сооружений и машин их части воспринимают внешние нагрузки и действие их передают друг другу. Плотина воспринимает свой собственный вес и давление удерживаемой ею воды и передает эти силы на основание. Стальные фермы моста воспринимают от колес через рельсы вес поезда и передают его на каменные

опоры; последние в свою очередь передают нагрузку на грунт основания. Давление пара в цилиндре паровой машины передается на шток поршня. Сила тяги локомотива передается поезду через стяжку, соединяющую его с вагонами. Таким образом, силы, воспринимаемые элементами конструкции, представляют собой либо *объемные силы*, действующие на каждый элемент объема (собственный вес), либо *силы взаимодействия* [1]) между рассматриваемым элементом и соседними или этим элементом и прилегающей к нему средой (вода, пар, воздух). Говоря, что к той или другой части конструкции приложена внешняя сила, мы будем понимать под этим термином передачу давления (движения) на рассматриваемую часть от окружающей ее среды или от соседних частей конструкции.

Классификацию сил можно произвести по нескольким признакам.

Мы различаем силы *сосредоточенные* и *распределенные*.

Сосредоточенными силами называются давления, передающиеся на элемент конструкции через площадку, размеры которой очень малы по сравнению с размерами всего элемента, например давление колес подвижного состава на рельсы.

При расчетах, благодаря малости площадки, передающей давление, обычно считают сосредоточенную силу приложенной в точке. Надо помнить, что это — приближенное представление, вводимое лишь для упрощения расчета; *через точку никакого давления фактически передать нельзя*. Однако неточность, вызываемая таким приближенным представлением, настолько мала, что ею обычно на практике можно пренебречь.

Распределенными нагрузками называются силы, приложенные непрерывно на протяжении некоторой длины или площади конструкции. Слой песка одинаковой толщины, насыпанный на тротуар моста, представляет собой нагрузку, равномерно распределенную по некоторой площади; при неодинаковой толщине слоя мы получим неравномерно распределенную сплошную нагрузку. Собственный вес балки какого-либо перекрытия представляет собой нагрузку, распределенную по длине элемента.

Сосредоточенные нагрузки измеряются в единицах силы (тоннах, килограммах, ньютонах [2]); распределенные по площади нагрузки выражаются в единицах силы, отнесенных к единице площади (*Т/м*^{2}, *кГ/см*^{2}, *н/м*^{2} и т. п.); распределенные по длине элемента — в единицах силы, отнесенных к единице длины (*кГ/м*, *н/м* и т. п.).

Далее нагрузки можно разделить на *постоянные* и *временные*. Первые действуют во все время существования конструкции, напри-

[1]) Строго говоря, вес тела есть также сила взаимодействия между телом и Землей.

[2]) В настоящее время рекомендуется, как предпочтительная, система единиц СИ, в которой сила измеряется в ньютонах (1 *н* $\approx$ 0,102 *кГ*).

мер, собственный вес сооружения. Временные нагрузки действуют на конструкцию лишь в течение некоторого промежутка времени. Примером может служить вес поезда, идущего по мосту.

По характеру действия нагрузки можно разделить на *статические* и *динамические*.

Статические нагружают конструкцию постепенно; будучи приложены к сооружению, они не меняются или меняются незначително; таково большинство нагрузок в гражданских и гидротехнических сооружениях. При передаче статических нагрузок на конструкцию все ее части находятся в равновесии; *ускорения элементов конструкции отсутствуют* или настолько малы, что ими можно пренебречь.

Если же эти ускорения значительны и изменение скорости элементов машины или другой конструкции происходит за сравнительно небольшой период времени, то мы имеем дело с приложением *динамических* нагрузок.

Примерами таких нагрузок могут служить *внезапно приложенные* нагрузки, *ударные* и *повторно-переменные*.

Внезапно приложенные нагрузки передаются на сооружение сразу полной своей величиной. Таковы давления колес локомотива, входящего на мост.

Ударные нагрузки возникают при быстром изменении скорости соприкасающихся элементов конструкции, например, при ударе бабы копра о сваю при ее забивке.

Повторно-переменные нагрузки действуют на элементы конструкции, повторяясь значительное число раз. Таковы, например, повторные давления пара, попеременно растягивающие и сжимающие шток поршня и шатун паровой машины. Во многих случаях нагрузка представляет собой комбинацию нескольких видов динамических воздействий.

В дальнейшем мы в первую очередь займемся вопросом о сопротивлении материалов *статическому* действию сил, когда вопрос о подборе сечения и материала для каждой части конструкции решается наиболее просто.

В главах XXIX—XXXI будут рассмотрены некоторые случаи действия *динамических* нагрузок, которые на практике встречаются не менее часто, чем статические, и требуют особого изучения, так как и результаты воздействия таких нагрузок на элемент конструкции оказываются иными, чем статических, и материал иначе сопротивляется этим воздействиям.

Заканчивая классификацию сил, действующих на элемент конструкции, можно выделить воздействие тех ее частей, на которые этот элемент опирается; эти силы называются *реакциями;* в начале расчета они оказываются неизвестными и определяются из условия, что каждая часть конструкции находится в равновесии под действием всех приложенных к ней сил и реакций.

§ 3. Понятие о деформациях и напряжениях

В теоретической механике (статике) изучается равновесие абсолютно твердого тела; этого представления о материале достаточно для решения поставленной в статике задачи — определения условий, при которых возможно взаимное уравновешивание приложенных к телу сил. При изучении сопротивления материалов действию этих сил такого грубо приближенного представления о свойствах материала уже недостаточно; мы должны учесть, что абсолютно твердых тел в природе не существует.

Как элементы конструкций, так и конструкции в целом при действии внешних сил в большей или меньшей степени изменяют свои размеры и форму и в конце концов могут разрушаться. Это изменение носит общее название — *деформация*.

Величины и характер деформаций связаны со структурой, строением применяемых нами материалов. Все эти материалы могут быть разбиты на два класса: *кристаллические* и *аморфные*.

Кристаллические материалы состоят из громадного количества очень малых кристаллических зерен. Каждое из этих зерен представляет собой систему атомов, размещенных на весьма близких расстояниях друг от друга правильными рядами. Эти ряды образуют так называемую *кристаллическую решетку*. В *аморфных* материалах мы не имеем правильного расположения атомов. Атомы удерживаются в равновесии силами взаимодействия. Деформация тел происходит за счет изменения расположения атомов, их сближения или удаления.

Деформации разделяются на *упругие* и *остаточные*. *Упругими* деформациями называются такие изменения формы и размеров элементов, которые исчезают после удаления вызвавших их сил,— тело полностью восстанавливает свою прежнюю форму. Эти деформации связаны лишь с упругими искажениями решетки атомов. Опыт показывает, что упругие деформации наблюдаются, пока величина внешних сил не превзошла известного предела.

Если же внешние силы перешли этот предел, то после их удаления форма и размеры элемента не восстанавливаются в первоначальном виде; оставшиеся разности размеров называются *остаточными* деформациями. Эти деформации в кристаллических материалах связаны с необратимыми перемещениями одних слоев кристаллической решетки относительно других. При удалении внешних сил сместившиеся слои атомов сохраняют свое положение.

Смещение атомов при деформации материала под действием внешних сил сопровождается изменением сил взаимодействия между атомами — сил притяжения и отталкивания.

В элементах конструкции под действием внешних сил *возникают дополнительные внутренние силы, сопровождающие деформацию материала*. Эти внутренние силы сопротивляются стремлению внеш-

них сил разрушить элемент конструкции, изменить его форму, отделить одну его часть от другой. Они стремятся восстановить прежнюю форму и размеры деформированной части конструкции. Чтобы численно характеризовать степень воздействия внешних сил на деформированный элемент, нам необходимо научиться измерять и вычислять величину внутренних межатомных сил, возникших как результат деформации, вызванной определенными внешними силами.

Для этого в сопротивлении материалов пользуются так называемым *методом сечений*, который мы поясним на следующем примере.

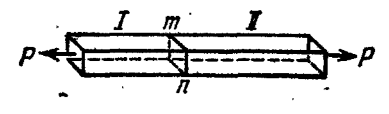


Рис. 1.

Представим себе стержень (рис. 1) под действием двух равных и прямо противоположных сил P и мысленно разделим его на две части I и II плоскостью mn. Под действием сил P обе половины стержня стремятся разъединиться и удерживаются вместе за счет сил взаимодействия между атомами, находящимися по обе стороны плоскости mn. Равнодействующая этих сил взаимодействия называется *усилием*, передающимся через сечение mn от одной части стержня на другую, и обратно. Внутренняя сила взаимодействия, приходящаяся на *единицу площади*, выделенную у какой-либо *точки* сечения mn, называется *напряжением* в этой точке по проведенному сечению. Напряжения, действующие от части II на I и от I на II, по закону равенства действия и противодействия равны между собой.

Через одну и ту же точку стержня можно провести целый ряд сечений, разделяющих стержень различным образом на две части. Величина и направление напряжений, передающихся в *рассматриваемой точке* от одной части на другую, будут различными в зависимости от того, как проведен разрез.

Таким образом, нельзя говорить о напряжении, не указывая сечения, через которое происходит передача этого напряжения. Поэтому говорят о «напряжении по такой-то площадке, по такому-то сечению». Так как напряжение представляет собой силу, *приходящуюся на единицу* площади, то оно измеряется в единицах силы, отнесенных к единице площади: $кГ/см^2$, $кГ/мм^2$, $Т/см^2$, $Т/м^2$, $н/м^2$ и т. д.

Обозначать напряжения в дальнейшем мы будем буквами p, σ и τ; обозначение p применяется при любом наклоне напряжения к рассматриваемой площадке, буквой σ обозначают напряжение, *нормальное* к площадке, а τ — лежащее в ее плоскости, так называемое *касательное* напряжение.

Величина напряжений в каждой точке и является мерой внутренних сил, которые возникают в материале как результат деформации, вызванной внешними силами. Усилие, передающееся от части *I* стержня на *II* (рис. 1), удерживает часть *II* в равновесии, т. е. уравновешивает систему внешних сил, приложенных к части *II*. Усилие же может быть выражено через искомые напряжения; если мы выделим элемент площади dF в проведенном сечении, то элементарное усилие, действующее на эту часть площади, будет равно pdF, при этом p — напряжение в той точке, где выделен элемент площади. Сумма этих элементарных усилий и даст полное усилие, передающееся через проведенное сечение.

Таким образом, для вычисления напряжений надо мысленно разделить рассматриваемый элемент конструкции сечением на две части и составить условия равновесия для системы сил, приложенных к одной из отсеченных частей; эта система будет включать в себя внешние силы, приложенные к выделенной части стержня, а также усилие, передающееся через проведенное сечение и выраженное через искомые напряжения. В этом и состоит метод сечений, которым в дальнейшем мы будем постоянно пользоваться.

Заметим, что в сопротивлении материалов термин «напряжение» применяется очень часто вместо термина «внутренние силы взаимодействия между частями стержня», поэтому мы будем говорить о «равномерном или неравномерном распределении напряжений по сечению», об «усилии как сумме напряжений»; надо помнить, что эти выражения являются в известной мере условными; например, для вычисления усилия нельзя просто суммировать напряжения в разных точках; надо, как это указано выше, вычислить в каждой точке сечения *элементарное усилие*, передающееся через малую площадку dF, а потом суммировать уже эти слагаемые. Резюмируя изложенное, можно сказать, что результатом действия внешних сил на элементы конструкции является возникновение в них деформаций, сопровождаемых напряжениями.

Сопротивление материалов, изучая зависимость между внешними силами, с одной стороны, и вызванными ими деформациями и напряжениями — с другой, дает возможность решить стоящую перед инженером задачу — противопоставить действию внешних сил стержень достаточных размеров и из наиболее подходящего материала. В следующем параграфе изложен план этого решения.

§ 4. План решения основной задачи сопротивления материалов

При выборе размеров и материала для того или иного элемента конструкции мы должны обеспечить известный запас против возможности его разрушения или остающегося изменения формы. Элемент должен быть так спроектирован, чтобы наибольшие

напряжения, возникающие в нем при его работе, были во всяком случае меньше тех, при которых материал разрушается или получает остаточные деформации.

Величина напряжений, достижение которых обусловливает разрушение материала, называется *пределом прочности* или *временным сопротивлением;* его мы будем обозначать теми же буквами, что и напряжения, но с индексом «в». Величина же напряжений, при превышении которых материал получает незначительные, заранее обусловленные, остаточные деформации, называется *пределом упругости.* Эти величины являются механическими характеристиками сопротивления материала разрушению и остаточному изменению формы [1]).

Чтобы обеспечить сооружение от риска разрушения, мы должны допускать в его элементах напряжения, которые будут по своей величине составлять лишь часть предела прочности материала.

Величину *допускаемых напряжений* обозначают той же буквой, что и напряжение, но заключенной в прямые скобки; она связана с пределом прочности $p_в$ равенством

$$[p]=\frac{p_в}{k},$$

где k — так называемый *коэффициент запаса прочности* — число, показывающее, во сколько раз допущенные нами в конструкции напряжения меньше предела прочности материала. Коэффициент k будем в дальнейшем называть просто *коэффициентом запаса.* Величина этого коэффициента колеблется на практике в пределах от 1,7—1,8 до 8—10 и зависит от условий, в которых работает конструкция. Подробнее этот вопрос разобран в §§ 16 и 17.

Обозначая наибольшие напряжения, которые возникнут при действии внешних сил в проектируемом элементе, буквой p_{max}, мы можем выразить основное требование, которому должны удовлетворять материал и размеры этого элемента, неравенством

$$p_{max} \leqslant [p]. \qquad (1.1)$$

Это — так называемое *условие прочности: действительные напряжения должны быть не больше допускаемых.*

Теперь мы можем составить план решения задач сопротивления материалов. Необходимо:

1) выяснить величину и характер действия всех внешних сил, приложенных к проектируемому элементу, включая и реакции;

2) выбрать материал, наиболее отвечающий назначению конструкции и характеру действия внешних сил, и установить величину допускаемого иапряжения;

---

[1]) Уточнение понятий «предел прочности» и «предел упругости» сделано в § 10.

3) задаться размерами поперечного сечения элемента в числовой или алгебраической форме и вычислить величину наибольших действительных напряжений p_{max}, которые в нем возникнут;

4) написать условие прочности $p_{max} \leqslant [p]$ и, пользуясь им, найти величину поперечных размеров элемента или проверить достаточность уже принятых.

В некоторых случаях эта схема решения задач сопротивления материалов видоизменяется; встречаются конструкции, в которых запас прочности *для всей конструкции в целом* оказывается бо́льшим, чем для *материала в наиболее напряженном месте*. Исчерпание грузоподъемности материала в этом месте иногда не влечет за собой исчерпания грузоподъемности всей конструкции в целом.

Условие прочности для материала $p_{max} \leqslant [p]$ заменяется в этих случаях условием прочности для всей конструкции в целом:

$$P \leqslant P_{доп} = \frac{P_в}{k},$$

где P — нагрузка, действующая на конструкцию; $P_{доп}$ — ее допускаемая величина, а $P_в$ — предельная, разрушающая всю конструкцию иагрузка. Таким образом, расчет по допускаемым напряжениям заменяется расчетом по допускаемым нагрузкам.

В этом случае необходимо:

1) выяснить величину и характер действия всех внешних сил, приложенных к конструкции;

2) выбрать материал, наиболее отвечающий назначению конструкции и характеру внешних сил, и установить величину коэффициента запаса;

3) задаться размерами поперечных сечений элементов сооружения в числовой или алгебраической форме и установить допускаемую нагрузку;

4) написать условие прочности: $P \leqslant P_{доп}$ и, пользуясь им, найти величину поперечных размеров элементов конструкции или проверить достаточность уже принятых.

В ряде случаев, как мы увидим дальше (§ 150), оба метода решения дают совпадающие результаты.

Мы будем, как правило, пользоваться общепринятым пока методом расчета по допускаемым напряжениям, но параллельно будем излагать и способ расчета по допускаемым нагрузкам, в особенности там, где он дает отличающиеся от первого способа результаты.

В большинстве случаев условие прочности должно быть дополнено поверками на устойчивость и жесткость. Первая поверка должна обеспечить невозможность общего изменения элементами конструкции намеченной для них формы равновесия, вторая — должна ограничить их деформации.

При решении задач сопротивления материалов приходится применять и методы теоретической механики, и экспериментальные ме-

тоды. При определении внешних сил приходится основываться на уравнениях статики; в случае статически неопределимых конструкций необходимо производить, как это будет показано ниже (§ 18), вычисление деформаций материала, что возможно лишь при наличии надежных результатов лабораторных опытов, в которых определялись зависимости между деформациями и силами или напряжениями.

Установление допускаемых напряжений требует знания предела прочности материала и других его механических характеристик, что может быть получено также при помощи экспериментальных исследований материала в специальных лабораториях испытания материалов. Наконец, вычисление действительных напряжений требует как применения методов математического анализа и механики, так и использования опытных данных. Таким образом, сопротивление материалов включает в себя две области: одну — аналитическую, основанную на механике и математике, другую — экспериментальную. Обе эти области тесно между собой переплетаются.

Сопротивление материалов нельзя рассматривать как дисциплину, которая занимается только теоретическим вычислением напряжений в каком-то однородном упругом теле. Решение задач, изучаемых в сопротивлении материалов, возможно лишь при *наличии результатов экспериментального* исследования механических свойств реальных материалов в связи с их структурой, методами их изготовления и обработки. Поэтому в настоящем курсе этой стороне отведено достаточное внимание. Работы в лаборатории составляют один из важнейших элементов обучения и должны непременно выполняться студентами параллельно с изучением курса. Описание этих работ, разработанное применительно к существующему оборудованию механических лабораторий, выделено в особое руководство [1]).

Хотя при самом возникновении сопротивления материалов вопрос о прочности был поставлен в связи с чисто практическими задачами, в дальнейшем сопротивление материалов развивалось в значительной степени по линии теоретической, что и вызывало иногда разрыв между результатами исследований и их приложениями на практике. Лабораторное изучение материалов шло особняком, главным образом по линии установления норм для приемки разных материалов. В настоящее время сопротивление материалов изучает реальные материалы с точки зрения их работы в конструкциях путем широких экспериментальных и теоретических исследований, что открывает возможность решения ряда новых практических задач. Таковы задачи изучения прочности новых материалов, условий их разрушения, задачи определения напряжений не только в пределах, но и за пределами упругости, и другие.

---

[1]) Беляев Н. М., Лабораторные работы по сопротивлению материалов, Гостехиздат, 1954.

§ 5. Типы деформаций

Установив общий план решения задач сопротивления материалов, мы можем теперь перейти к отдельным видам этих задач. Их можно разбить на несколько групп в зависимости от типа деформаций.

Основными типами деформаций являются (рис. 2):

1) Растяжение или сжатие (*а* и *б*); примеры — работа цепей, канатов, тросов, растянутых и сжатых стержней в фермах, колонн; 2) перерезывание (*в*) — работа болтов, заклепок; 3) кручение — работа валов (*г*); 4) изгиб — работа всякого рода балок (*д*). Эти четыре типа деформаций называются *простыми*.

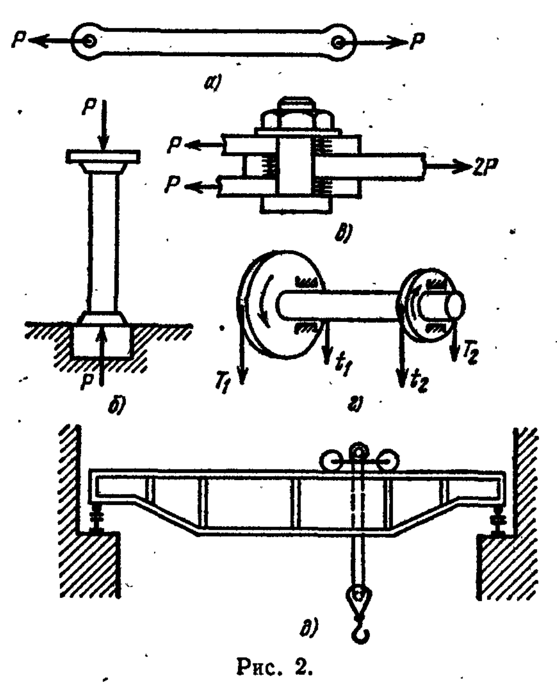


Рис. 2.

В конструкциях встречается и более сложная работа элементов, когда они испытывают два и более типов деформаций одновременно, например, растяжение или сжатие с изгибом, изгиб с кручением и т. д.; в этих случаях мы имеем дело с так называемой *сложной деформацией*. Для каждого из этих видов деформаций мы установим способы для вычисления напряжений, подбора материала и поперечных размеров элементов конструкции, а также способы для вычисления деформаций.

Для простоты мы будем сначала рассматривать лишь те элементы сооружений и машин, которые представляют собой так называемые *призматические стержни с прямой осью*. Таким стержнем мы будем называть тело, все поперечные сечения которого одинаковы; центры тяжести этих сечений лежат на одной прямой, называемой *осью стержня*. В дальнейшем мы рассмотрим стержни и с переменным сечением и с криволинейной осью.

Глава II

НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ В ПРЕДЕЛАХ УПРУГОСТИ. ПОДБОР СЕЧЕНИЙ

§ 6. Вычисление напряжений по площадкам, перпендикулярным к оси стержня

Решение основной задачи сопротивления материалов мы начнем с. простейшего случая растяжения или сжатия призматического стержня.

Центральным растяжением или *сжатием* этого стержня называется деформация его под действием двух равных и прямопротивоположных сил, приложенных к концевым сечениям и направленных по оси стержня. Если эти силы направлены наружу от концевых сечений, то мы имеем растяжение (рис. 3, *а*), в противном случае — сжатие (рис. 3, *б*).

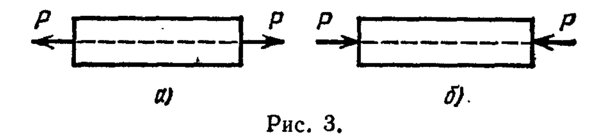


Рис. 3.

По общему плану решения всякой задачи сопротивления материалов мы прежде всего должны найти величину этих внешних сил P, растягивающих (сжимающих) стержень. Величина сил P обычно может быть определена из условий взаимодействия рассматриваемого стержня с остальными частями конструкции.

В качестве простейшего примера рассмотрим стальную стяжку круглого поперечного сечения, имеющую на концах винтовую

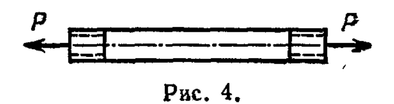


Рис. 4.

нарезку, нагруженную растягивающими силами $P=25$ T, действующими вдоль ее оси (рис. 4). Нашей задачей будет подобрать поперечные размеры стяжки таким образом, чтобы ее прочность была обеспечена. Необходимо найти вызванные силами P напряжения, установить для них допускаемую величину и выбрать так размеры поперечного сечения стержня, чтобы действительные напряжения не превосходили допускаемых.

Для вычисления напряжений необходимо выбрать те разрезы, которыми мы будем разделять стержень на две части. Для проверки прочности следует отыскать опасное сечение, т. е. то, через которое передается *наибольшее* напряжение. Мы установим формулы для

вычисления напряжений сначала по сечениям, перпендикулярным к оси стержня, а в дальнейшем и по наклонным сечениям; таким путем мы сумеем отыскать наиболее опасное сечение.

Возьмем растянутый стержень и разделим его на две части поперечным сечением *mn* (рис. 5), *перпендикулярным* к оси стержня. Отбросим вторую часть; тогда, чтобы равновесие первой не было нарушено, мы должны заменить действие отброшенной части силами, передающимися на оставшуюся часть через сечение *mn* (рис. 6). Заменяющие силы будут уравновешивать внешнюю силу P, поэтому они должны сложиться в равнодействующую N, равную P, направленную по оси стержня в сторону, противоположную внешней силе

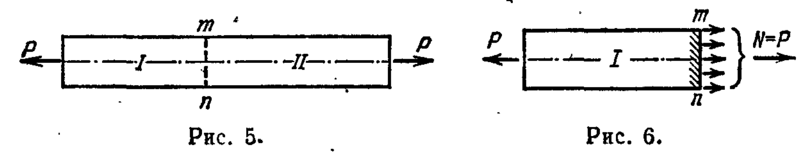


Рис. 5. Рис. 6.

(рис. 6). Эта равнодействующая N будет усилием, действующим в стержне.

В дальнейшем мы будем называть *нормальным* или *продольным усилием* равнодействующую внутренних сил упругости, передающихся через мысленный разрез от одной части стержня к другой. Но так как отрезанная часть стержня должна находиться в равновесии под воздействием продольного усилия и внешних сил, приложенных к рассматриваемой части, то это усилие может быть вычислено и через внешние силы. Оно численно будет равно равнодействующей внешних сил, приложенных к рассматриваемой части стержня, и направлено в сторону, противоположную этой равнодействующей. Если усилие направлено *внутрь* рассматриваемой части, то стержень *сжат*, если в противоположную сторону, то *растянут*.

Следовательно, условия равновесия оставшейся части дают нам лишь величину равнодействующей внутренних сил, передающихся по сечению *mn*, ее направление и точку приложения, но не могут указать, как распределяются напряжения по сечению, т. е. какие силы будут передаваться через различные части этого сечения. Между тем для оценки опасности, угрожающей прочности материала, необходимо найти наибольшее напряжеиие, отыскать ту часть сечения, через которую передается наибольшая сила.

Опыты с растяжением стержней из различных материалов показывают, что если растягивающие силы достаточно точно совпадают с осью стержня, то удлинения прямых линий, проведенных на поверхности стержня параллельно его оси, будут одинаковы. Отсюда возникает предположение о *равномерном* распределении напряжений по сечению. Лишь у концов стержня, там, где происходит непосредственная передача сил P на стержень, растяжение распределяется

неравномерно между отдельными участками сечения: те участки, к которым непосредственно приложена сила P, перегружаются, но уже на небольшом расстоянии от концов работа материала выравнивается, и наступает равномерное распределение напряжений по сечению, перпендикулярному к оси. Эти напряжения направлены параллельно силе P, т. е. нормально к сечению; поэтому их называют *нормальными* напряжениями и обозначают буквой σ. Так как они распределены равномерно по сечению, то $N=\sigma F$; с другой стороны, $N=P$; отсюда получаем

$$\sigma=\frac{P}{F}. \tag{2.1}$$

Эта формула позволяет нам вычислить напряжение σ, если известны растягивающая сила и размеры сечения стержня. С другой стороны, если мы зададимся допустимой величиной нормального напряжения, из этой же формулы можно будет найти необходимую площадь поперечного сечения F.

§ 7. Допускаемые напряжения. Подбор сечений

Чтобы выяснить, какую величину напряжений мы можем считать допустимой при работе стержня из выбранного материала, необходимо опытным путем установить зависимость между прочностью стержня и возникающими в нем напряжениями. Для этого изготовим из данного материала образец (обычно круглого или прямоугольного поперечного сечения), заложим концы его в захваты машины, позволяющей осуществить растяжение стержня, и начнем постепенно увеличивать силы P. Образец будет растягиваться и, наконец, разорвется.

Пусть наибольшей нагрузкой, которую выдержал образец до разрыва, будет $P_в$. Величина нормальных напряжений, вызванных этой нагрузкой, равная

$$\sigma_в=\frac{P_в}{F},$$

называется *пределом прочности* или *временным сопротивлением* испытываемого материала на растяжение. Она выражается обычно в $кГ/мм^2$ или $кГ/см^2$.

Как указано в § 4, в стержнях конструкции приходится допускать при работе на растяжение нормальные напряжения $[\sigma]$, *в несколько раз меньшие*, чем предел прочности $\sigma_в$; допускаемое напряжение получается делением предела прочности $\sigma_в$ на *коэффициент запаса* k. Величина этого коэффициента определяется целым рядом соображений, которые подробно будут изложены дальше (§ 16). Во всяком случае она должна быть такова, чтобы при нормальной работе стержня не только не произошло разрыва, но чтобы не образовалось и остаточных деформаций, могущих изменить схему соору-

жения или машины. Коэффициент запаса меняется в зависимости от характера применяемого материала, способа действия сил на элемент, экономических условий и ряда других факторов.

Ввиду важности правильного выбора коэффициента запаса и величины допускаемых напряжений эти величины для многих конструкций даются нормами, обязательными для составителей проектов и расчетов. Таким образом, величины допускаемых напряжений $[\sigma]$ для каждого случая можно считать известными. Тогда для определения необходимой величины площади поперечного сечения растянутого стержня можно, пользуясь формулой (2.1), написать *условие прочности;* это условие должно выразить, что *действительное* напряжение σ в растянутом стержне при действии сил P не должно превосходить *допускаемого* напряжения $[\sigma]$:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leqslant [\sigma]. \qquad (2.2)$$

Из этого условия определяется наименьшая необходимая площадь стержня

$$F \geqslant \frac{P}{[\sigma]}. \qquad (2.3)$$

Пользуясь формулой (2.3), мы можем производить подбор сечения стержня.

Иногда площадь поперечного сечения является заданной. Тогда, решая формулу (2.3) относительно P, мы производим определение допускаемой силы

$$P \leqslant F\,[\sigma]. \qquad (2.4)$$

Возвращаясь к расчету стяжки (§ 6, рис. 4), мы должны установить род материала, идущего для изготовления этой детали, и допускаемое напряжение. Пусть стяжка делается из стали с пределом прочности около 50 $кГ/мм^2$. Такой выбор материала определяется тем, что стяжка должна быть не очень тяжелой,— это требует материала повышенной прочности; с другой стороны, в этом направлении нельзя идти слишком далеко, чтобы материал стяжки мог хорошо сопротивляться возможным ударам и толчкам. Если применить сталь со слишком высоким пределом прочности, она окажется хрупкой.

Стяжка не только не должна давать обрыва, но в ней не должно быть даже незначительных остаточных деформаций, чтобы не произошло заедания в нарезке. Предел упругости для выбранного материала составляет примерно 0,60 от предела прочности $\sigma_в$. Как мы увидим дальше, при внезапном приложении сил, что, допустим, может иметь место, напряжения увеличиваются примерно вдвое по сравнению со спокойным, статическим растяжением, при котором определяют механические характеристики материала в лаборатории.

Поэтому величина допускаемых напряжений не должна превышать

$$0{,}5\cdot 0{,}60\ \sigma_в = 0{,}30\ \sigma_в.$$

Это дает коэффициент запаса

$$k = \frac{1}{0{,}3} \approx 3{,}3.$$

Таким образом, в данном случае допускаемое напряжение может быть принято равным

$$[\sigma] = \frac{\sigma_в}{k} = 0{,}3\sigma_в = 50\cdot 0{,}3 = 15\ кГ/мм^2 = 1500\ кГ/см^2.$$

Необходимая площадь при $P = 25\ T$ равна

$$F \geqslant \frac{P}{[\sigma]} = \frac{25\,000}{1500} = 16{,}7\ см^2.$$

Диаметр d стержня стяжки определяется условием

$$\frac{\pi d^2}{4} = F \geqslant 16{,}7,$$

откуда

$$d \geqslant \sqrt{\frac{16{,}7\cdot 4}{\pi}} = 4{,}55\ см \approx 4{,}5\ см.$$

Полученный диаметр определен *по дну* нарезки для *наименьшей* площади поперечного сечения. В тех случаях, когда площадь отдельных сечений стержня меньше других, например из-за наличия отверстий для болтов или заклепок, наружных выкружек или канавок (нарезки), *определяется эта наименьшая площадь сечения*, называемая площадью *нетто* и обозначаемая $F_{нетто}$ или $F_н$. Площадь поперечных сечений, не имеющих ослаблений, называется площадью *брутто* и обозначается $F_{брутто}$ или $F_{бр}$. Определив расчетом сечение $F_н$, размеры $F_{бр}$ получаем уже из конструктивных соображений.

Выведенные выше формулы относились к случаю растяжения стержня. Без всяких изменений они могут быть применены и к тому случаю, когда мы встречаемся с деформацией сжатия. Разница будет лишь в направлении нормальных напряжений и в величине допускаемого напряжения $[\sigma]$; при сжатии стержней явление осложняется тем, что такие стержни могут оказаться неустойчивыми,— они могут внезапно искривиться. Расчетам на устойчивость будет посвящен отдел VIII.

На рис. 7 изображено распределение нормальных напряжений, действующих по сечению, перпендикулярному к оси стержня, для случая растяжения и сжатия. Для ряда материалов (сталь) величина допускаемого напряжения может быть принята одинаковой как при растяжении, так и при сжатии (коротких стержней, т. е. таких, у

которых длина превышает размеры поперечного сечения не более чем в 5 раз). В других случаях (чугун) приходится назначать различные величины допускаемых напряжений для растяжения и сжатия в зависимости от величины предела прочности при этих деформациях.

В ряде конструкций мы встречаемся со случаем передачи сжимающих напряжений от одного элемента другому через сравнительно небольшую площадь, по которой соприкасаются между собой эти элементы. Подобные напряжения называют обыкновенно напряжениями *смятия* или *контактными напряжениями*. Распределение напряжений около места соприкасания весьма сложно и поддается определению лишь методами теории упругости. При обычных расчетах рассматривают в большинстве случаев эти напряжения просто как сжимающие и ограничиваются лишь назначением для них *специального допускаемого напряжения*. В дальнейшем в особых случаях вопрос о выборе допускаемых напряжений будет рассмотрен подробнее.

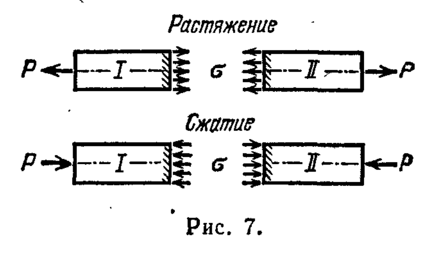


Рис. 7.

§ 8. Деформации при растяжении и сжатии. Закон Гука

Для того чтобы иметь полную картину работы растянутого или сжатого элемента, необходимо иметь возможность вычислить, как будут меняться его размеры.

Соответствующие законы можно получить лишь на основании опытов с растяжением и сжатием образцов изучаемого материала; эти же опыты дают возможность изучать и прочность материала, определять его предел прочности и другие характеристики (§ 10).

Для осуществления подобных опытов в лабораториях пользуются специальными машинами, позволяющими деформировать образцы и доводить их до разрушения, измеряя требуемую для этого величину усилий.

Одновременно при помощи достаточно точных измерительных приборов — тензометров — производят измерения деформаций образцов. Предельные нагрузки, которые можно в настоящее время осуществлять при помощи испытательных машин и точно измерять, достаточно велики. Существуют испытательные прессы, силой до 5000 T, на которых можно испытывать на сжатие целые части конструкций (колонны, части стен); что касается испытаний на растяжение, то лаборатории располагают машинами, позволяющими осуществлять растягивающие усилия до 1500 T. В большинстве

современных лабораторий пользуются машинами гораздо меньшей силы — от 5 до 100 *Т* на растяжение и до 200÷500 *Т* на сжатие.

Подробное описание подобных машин и приборов, в частности, очень известной русской машины — пресса Гагарина, можно найти в нашей книге «Лабораторные работы по сопротивлению материалов» и в специальных руководствах по механическим испытаниям материалов. Пользуясь такими машинами и приборами, можно установить, как будут меняться размеры образцов материала при растяжении и сжатии.

Опыты приводят к заключению, что пока нагрузка на образец не достигла известного предела, удлинение прямо пропорционально растягивающей силе P, длине образца l и обратно пропорционально площади поперечного сечения F. Обозначая через Δl приращение длины образца от силы P, можем написать формулу, связывающую между собой эти опытные данные:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}, \tag{2.5}$$

где E — коэффициент пропорциональности, различный для разных материалов. Величина Δl называется *абсолютным удлинением* стержня от силы P. Формула (2.5) носит название *закона Гука*, по имени ученого, впервые открывшего этот закон пропорциональности в 1660 г.

Зависимость (2.5) можно представить в ином виде. Разделим обе части этой формулы на первоначальную длину стержня l:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{EF};$$

отношение $\Delta l/l$ — абсолютного удлинения к первоначальной длине — называется *относительным удлинением;* оно обозначается буквой ε.

Относительное удлинение является безразмерной величиной, как отношение двух длин Δl и l, и по своему числовому значению равно удлинению каждой единицы длины стержня. Подставив в предыдущую формулу вместо $\Delta l/l$ величину ε, а вместо P/F — величину нормального напряжения σ, получаем иное выражение закона Гука:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \tag{2.6}$$

или

$$\sigma = \varepsilon E. \tag{2.7}$$

Таким образом, нормальное напряжение при растяжении или сжатии прямо пропорционально относительному удлинению или укорочению стержня.

Коэффициент пропорциональности E, связывающий нормальное напряжение и относительное удлинение, называется *модулем упру-*

гости при растяжении (сжатии) материала. Чем *больше* эта величина, тем *менее* растягивается (сжимается) стержень при прочих равных условиях (длине, площади, силе P). Таким образом, физически модуль E характеризует *сопротивляемость* материала упругой *деформации* при растяжении (сжатии).

Так как ε — относительное удлинение — является безразмерной величиной, то из формулы (2.7) следует, что модуль выражается в тех же единицах, что и напряжение σ, т. е. в единицах силы, деленных на единицу площади.

Надо заметить, что величина модуля упругости материала E даже для одного и того же материала не является постоянной, а несколько колеблется. Для некоторых материалов величина модуля оказывается одинаковой как при растяжении, так и при сжатии (сталь, медь), в других случаях — различной для каждой из этих деформаций. В обычных расчетах этой разницей пренебрегают и принимают для громадного большинства материалов одно и то же значение E как при растяжении, так и при сжатии.

Надо иметь в виду, что закон Гука представлен формулой, которая только приближенно отражает результаты опытов, схематизируя их; поэтому он не представляет собой совершенно точной зависимости.

Все материалы при растяжении или сжатии дают величины деформаций, более или менее отклоняющиеся от этого закона. Для некоторых материалов (большинство металлов) эти отклонения ничтожны малы, и можно считать, что осуществляется полная пропорциональность между деформацией и нагрузкой; для других (чугун, камень, бетон) — отклонения значительно больше.

Однако для *практических* целей мы можем пренебречь наблюдающимися небольшими отклонениями от формул (2.5) и (2.6) и пользоваться ими при вычислении деформаций стержней.

Средние величины модуля E для ряда материалов даны в таблице 1.

Из рассмотрения формулы (2.5) ясно, что чем больше ее знаменатель, тем менее растяжим (податлив) или, как говорят, тем более жесток стержень, поэтому знаменатель формулы (2.5), величина EF, называется *жесткостью стержня при растяжении или сжатии*. Мы видим, что жесткость при растяжении или сжатии зависит, с одной стороны, от *материала* стержня, характеризуемого величиной его модуля упругости E, а с другой стороны, от *размеров поперечного* сечения стержня, характеризуемых величиной площади его поперечного сечения F. Иногда бывает удобно пользоваться понятием *относительной жесткости*, которая равна EF/l, т. е. отношению жесткости к длине стержня.

Формулы (2.5) и (2.6) позволяют определить удлинения и укорочения, которые получает тот или иной стержень конструкции при растяжении или сжатии. Обратно, зная эти удлинения, размеры и

Таблица 1

Модули упругости и коэффициенты поперечной деформации

Наименование материала	Модуль упругости E, 10^6 кГ/см²	Коэффициент поперечной деформации μ
Чугун серый, белый	1,15÷1,60	0,23÷0,27
Углеродистые стали	2,0÷2,1	0,24÷0,28
Легированные стали	2,1	0,25÷0,30
Медь прокатанная	1,1	0,31÷0,34
Фосфористая бронза катаная	1,15	0,32÷0,35
Латунь холоднотянутая	0,91÷0,99	0,32÷0,42
Корабельная латунь катаная	1,0	0,36
Марганцовистая бронза катаная	1,1	0,35
Алюминий катаный	0,69	0,32÷0,36
Цинк катаный	0,84	0,27
Свинец	0,17	0,42
Стекло	0,56	0,25
Гранит, известняк, мрамор	0,42÷0,56	0,16÷0,34
Песчаник	0,18	
Каменная кладка: из гранита	0,09÷0,1	
Каменная кладка: из известняка	0,06	
Каменная кладка: из кирпича	0,027÷0,030	
Бетон с пределом прочности 100 кГ/см	0,146÷0,196	0,16÷0,18
Бетон с пределом прочности 150 кГ/см	0,164÷0,214	
Бетон с пределом прочности 200 кГ/см	0,182÷0,232	
Дерево вдоль волокон	0,1÷0,12	
Дерево поперек волокон	0,005÷0,01	
Лед[1]) при температуре —1° C	0,04	≈ 0,36
Лед[1]) при температуре —3° C	0,07	
Лед[1]) при температуре —5° C и ниже	0,10	
Каучук	0,00008	0,47
Бакелит	0,02÷0,03	
Целлулоид	0,0174÷0,0193	0,39
Текстолит	0,06÷0,1	
Гетинакс	0,1÷0,17	
Жесткий поливинилхлорид (ПВХ, винипласт)	0,040	0,22÷0,3
Капролон	0,02÷0,023	0,28÷0,34
Полиэтилен высокого давления (ПВД)	0,002÷0,0025	0,40÷0,46
Фенопласт ФКПМ-15	0,15÷0,20	0,22÷0,27
Поликарбонат (дифлон)	0,022÷0,024	0,24÷0,28
Органическое стекло	0,028	

[1]) По СНиП II-57-75.

материал стержня, можно вычислить нормальные напряжения, которые в нем возникают. Таким образом, для вычисления напряжений σ мы имеем два пути: если известны внешние силы P, растягивающие или сжимающие стержень, то σ вычисляется по формуле (2.1)

$$\sigma=\frac{P}{F};$$

если же внешние силы неизвестны, а можно измернть удлнненне стержня, то σ определяется формулой (2.7)

$$\sigma=\varepsilon E.$$

Величина относительного удлинения может быть вычислена, если мы измерим абсолютное удлинение Δl участка стержня длнной l и применим формулу

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l}.$$

Вторым приемом определения напряжений приходится пользоваться довольно часто при решении целого ряда задач.

§ 9. Коэффициент поперечной деформации

Стержни, работающие на растяжение или сжатие, испытывают помимо *продольных* деформаций и *поперечные*.

Как показывает опыт, при растяжении бруска (рис. 8) длина его увеличивается на величину Δl, ширина же уменьшается на величину $\Delta b=b-b_1$. Относительная продольная деформация равна

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l};$$

относительная поперечная деформация равна

$$\varepsilon_1=\frac{\Delta b}{b}.$$

Рис. 8.

При сжатии бруска продольной деформацией является укорочение, поперечной — удлинение. Опыты показывают, что для большинства материалов ε_1 в $3\div4$ раза меньше, чем ε.

Абсолютная величина отношения относительной поперечной деформации ε_1 к относительной продольной ε называется *коэффициентом поперечной деформации* или *коэффициентом Пуассона* μ:

$$\mu=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}. \qquad (2.8)$$

Коэффициент поперечной деформации μ, так же как и модуль упругости E, является *характеристикой упругих свойств материала*.

Для материалов, упругие свойства которых одинаковы во всех направлениях, упругие постоянные E и μ полностью характеризуют эти свойства. Такие матариалы называются *изотропными*. С достаточной для целей практики точностью к ним могут быть отнесены сталь и другие металлы, большинство естественных камней, бетон, каучук, неслоистые пластмассы.

Наряду с материалами изотропными существуют и *анизотропные* материалы, т. е. такие, свойства которых в различных направлениях различны. К таким материалам относятся в первую очередь дерево, слоистые пластмассы, некоторые камни, ткани и другие. Одно значение E и μ не может охарактеризовать их упругие свойства, для них необходимо иметь ряд значений упругих характеристик в различных направлениях.

Для измерения числовой величины μ необходимо при растяжении или сжатии бруска измерять одновременно продольные и поперечные деформации. Обычно эти измерения производятся при растяжении образца, взятого в виде длинной и широкой пластинки (металлы), или при сжатии призматических образцов (камень).

Величины коэффициента поперечной деформации для различных материалов при деформировании их в пределах упругости даны в таблице 1.

Зная μ, можно вычислить изменение объема образца при растяжении или сжатии. Длина образца после деформации равна $l(1+\varepsilon)$. Площадь после деформации равна $F(1-\varepsilon\mu)^2$. Объем после деформации равен

$$V_1=Fl(1+\varepsilon)(1-\mu\varepsilon)^2=V(1+\varepsilon)(1-\mu\varepsilon)^2,$$

где V — первоначальный объем.

Так как ε до предела пропорциональности — малая величина, то квадратами ее пренебрегаем. Тогда объем V_1 равен

$$V_1=V[1+\varepsilon(1-2\mu)].$$

Относительное изменение объема равно

$$\frac{V_1-V}{V}=\varepsilon(1-2\mu).$$

Если коэффициент поперечной деформации $\mu=0,5$, то объем при деформации не меняется. Так как для большинства материалов $\mu<0,5$, то растяжение сопровождается увеличением, а сжатие — уменьшением объема. Для резины $\mu\approx0,5$, и объем ее при растяжении почти не меняется.

Практическое значение появления поперечных деформаций в связи с продольными чрезвычайно велико. Это значение в дальнейшем будет подробно освещено.

Для иллюстрации принятых методов и полученных формул рассмотрим следующий пример.

К кронштейну ABC, состоящему из деревянного стержня AC и железной тяги AB, подвешен в точке A груз $Q=4\ T$ (рис. 9). Сечение тяги AB — круглое, стержня AC — квадратное. Каковы должны быть диаметр d стержня AB и стороны квадрата a (стержень AC), если допускаемые напряжения для дерева $[\sigma_-]=25\ кГ/см^2$, а для стали $[\sigma_+]=900\ кГ/см^2$ ($[\sigma_-]$ — допускаемое напряжение на сжатие, $[\sigma_+]$ — на растяжение); найти вертикальное и горизонтальное перемещения точки A. Длина AC равна $l_2=1\ м$.

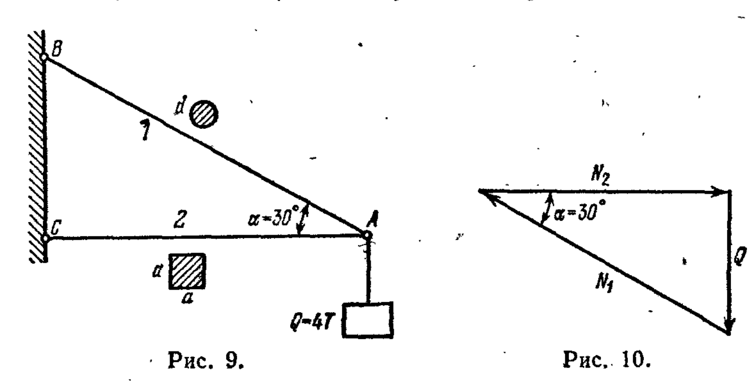


Рис. 9. Рис. 10.

Усилия N_1 и N_2 в стержнях AB и AC находим из условия равновесия шарнира A, к которому приложена известная сила Q и неизвестные усилия N_1 и N_2.

Построив треугольник равновесия для этих сил (рис. 10), получаем

$$N_1=\frac{Q}{\sin 30^\circ}=2Q=8\,T; \quad N_2=Q\operatorname{ctg}30^\circ=Q\sqrt{3}=6,93\,T.$$

Потребные площади сечений стержней AB и AC равны

$$F_1=\frac{N_1}{[\sigma_+]}=\frac{8000}{900}=8,89\ см^2; \quad F_2=\frac{N_2}{[\sigma_-]}=\frac{6930}{25}=277\ см^2.$$

Диаметр тяги равен

$$d=\sqrt{\frac{4F_1}{\pi}}=\sqrt{\frac{4\cdot 8,89}{\pi}}=3,34\ см\approx 3,4\ см;$$

сторона квадрата равна

$$a=\sqrt{F_2}=\sqrt{277}=16,6\ см\approx 17\ см;$$

обе величины приняты с округлением — для стального стержня до целых *мм*, для деревянного до *см*.

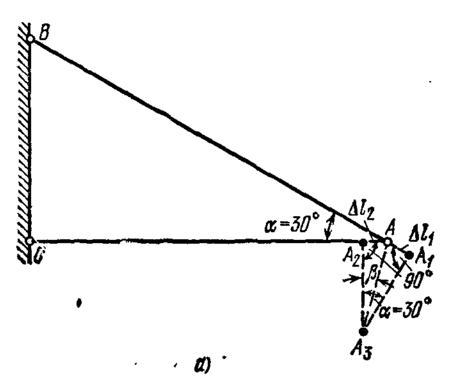
Для определения перемещения f точки A разъединим в ней стержни и изобразим их новые длины BA_1 и CA_2, увеличив и уменьшив старые на $\Delta l_1=AA_1$ и $\Delta l_2=AA_2$, не меняя пока направления стержней (рис. 11, *а*). Для того чтобы найти новое положение точки A, сведем вместе деформированные стержни, вращая их около точек B и C. Точки A_1 и A_2 будут перемещаться по дугам A_1A_3 и A_2A_3, которые по их малости могут быть приняты за прямые, перпендикулярные к BA_1

и CA_2. Тогда горизонтальное перемещение точки A будет равно

$$f_2 = AA_2 = \Delta l_2,$$

а вертикальное (рис. 11, *б*)

$$f_1 = A_2A_3 = A_2A_4 + A_4A_3.$$



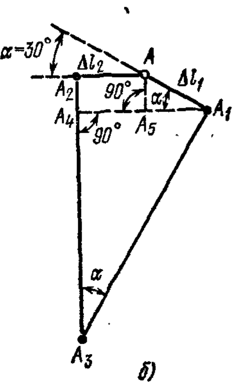


Рис. 11

Отрезок

$$A_2A_4 = AA_5 = \Delta l_1 \sin\alpha,$$

а

$$A_4A_3 = A_1A_4 \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Но $A_1A_4 = A_1A_5 + A_5A_4 = \Delta l_1 \cos\alpha + \Delta l_2$, так что

$$A_4A_3 = (\Delta l_1 \cos\alpha + \Delta l_2)\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\Delta l_1 \cos^2\alpha + \Delta l_2 \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Тогда

$$f_1 = A_2A_4 + A_4A_3 = \Delta l_1 \sin\alpha + \frac{\Delta l_1 \cos^2\alpha + \Delta l_2 \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2 \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Деформации стержней определяются формулами

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} = \frac{6930 \cdot 100}{10^5 \cdot 17^2} = 2{,}4 \cdot 10^{-2} \textit{ см},$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} = \frac{8000 \cdot 100 \cdot 2}{2 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot 3{,}4^2}{4} \cdot \sqrt{3}} = 5{,}07 \cdot 10^{-2} \textit{ см}.$$

Таким образом, горизонтальное перемещение точки A равно $f_2 = 0{,}24$ *мм*, вертикальное

$$f_1 = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2 \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{0{,}507 + 0{,}24\frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}5} = 1{,}43 \textit{ мм},$$

а полное перемещение AA_3 равно

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{1{,}43^2 + 0{,}24^2} = 1{,}45 \textit{ мм}.$$

Глава III

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ И ОСНОВЫ ВЫБОРА ДОПУСКАЕМЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

§ 10. Диаграмма растяжения. Механические характеристики материала

В предыдущей главе при определении размеров поперечного сечения и вычисления деформаций мы встретились с рядом величин, характеризующих материал не только в пределах пропорциональности (модуль упругости, предел пропорциональности), но и в стадии разрушения (предел прочности). Для полного представления о механических свойствах материала при его растяжении и сжатии до разрушения необходимо изучение на опыте явлений, которые при этом процессе происходят.

С точки зрения различия в механических качествах при простом растяжении и сжатии и при обычной температуре материалы могут быть *хрупкими* или *пластичными*. Хрупкие материалы разрушаются при очень малых остаточных деформациях. У пластичных же материалов разрушение наступает лишь после значительной остаточной деформации. К первому типу материалов относятся, например, чугун, камень, бетон и др. К пластичным материалам относятся малоуглеродистая сталь, медь и др.

Выясним сначала поведение обоих типов материалов в опыте на растяжение вплоть до разрушения. Для этого опыта изготовляется образец призматической формы круглого или прямоугольного сечения. На рабочей части образца наносят деления через каждый сантиметр или доли сантиметра, чтобы иметь возможность после опыта судить об изменении длины образца. Образец помещают в машину и закрепляют его концы. Медленно перемещая один конец образца в направлении его оси, стержень растягивают нагрузкой, которая возрастает постепенно, без толчков и ударов. При опыте отмечают ряд последовательных величин нагрузки и измеряют соответствующее им увеличение длины l, намеченной на образце.

Результаты измерений нагляднее всего можно представить в виде так называемой диаграммы растяжения; на большинстве машин имеется приспособление, автоматически вычерчивающее эту диаграмму при растяжении образца. При вычерчивании диаграммы по вертикальной оси откладываются в определенном масштабе нагрузки, а по горизонтальной — абсолютные удлинения.

При растяжении образца из пластичного материала (например, малоуглеродистой стали) диаграмма имеет вид, показанный на рис. 12. Первая часть диаграммы до точки A, соответствующей пределу пропорциональности, представляет собой прямую линию.

Ордината OA_1 представляет собой величину растягивающей силы, соответствующей *пределу пропорциональности* $\sigma_п$, т. е. тому наибольшему напряжению, превышение которого вызывает отклонение от закона Гука; для малоуглеродистой стали величина $\sigma_п$ равна примерно 2000 *кГ/см*². Это напряжение определяется по формуле (2.1), где в качестве площади поперечного сечения F принимается ее *первоначальная* величина. Такое напряжение называется *условным*. В дальнейшем использование первоначальной площади поперечного сечения обычно не будет особо оговариваться. Определение «условное» также обычно опускается.

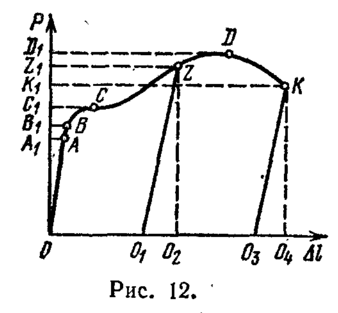


Рис. 12.

При увеличении растягивающей силы за величину OA_1 деформация начинает расти быстрее нагрузки — диаграмма имеет криволинейный вид с выпуклостью вверх. Далее наблюдается резкое изменение в работе материала; при некотором значении растягивающей силы OC_1 материал «течет»; для увеличения деформации почти не нужно увеличивать растягивающую силу. На диаграмме образуется горизонтальная (или почти горизонтальная) площадка.

Напряжение, при котором происходит такое течение материала — рост деформаций при постоянной (примерно) нагрузке, называется пределом текучести $\sigma_т$. Для малоуглеродистой стали $\sigma_т \approx 2400$ *кГ/см*².

Во время течения материала на поверхности образца появляются в более или менее резкой степени так называемые «линии Чернова» (рис. 13), иногда называемые «линиями Людерса». Эти линии вызываются взаимным перемещением частиц материала при наступлении значительных деформаций образца.

После образования площадки текучести материал вновь начинает сопротивляться дальнейшему растяжению, и для увеличения удлинения Δl приходится увеличивать силу. Точка D диаграммы соответствует наибольшей величине нагрузки.

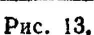
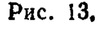



Рис. 13.

В этот момент поведение образца еще раз резко меняется. До этого в удлинении участвовал весь стержень; каждая единица его длины удлинялась примерно одинаково; точно так же во всех сечениях было одинаковое уменьшение поперечных размеров образца.

С момента, когда нагрузка достигает величины OD_1, деформация в основном сосредоточивается в одном месте образца; небольшой участок образца около этого места подвергается в дальнейшем наи-

большему напряжению; это влечет за собой местное сужение поперечного сечения, образуется так называемая «шейка» (рис. 14).

Вследствие уменьшения площади в деформирующейся части для дальнейшего удлинения бруска нужна все меньшая и меньшая сила. Наконец, при нагрузке OK_1 происходит разрыв.

Если мы приостановим опыт при нагрузке, меньшей OA_1, и разгрузим образец, то при разгрузке зависимость между силой и удлинением будет выражаться той же прямой, что и при нагрузке OA. После удаления груза удлинение исчезает — мы имели лишь *упругую* деформацию.

Если мы произведем разгрузку образца от некоторой точки Z диаграммы, лежащей между C и D, то при разгрузке диаграмма будет изображаться прямой ZO_1, примерно параллельной прямой OA. Таким образом, образец в этом случае не вернется к первоначальным размерам; отрезок O_1O_2 будет представлять *упругое* удлинение, по-прежнему меняющееся пропорционально нагрузке с прежним модулем упругости; отрезок OO_1 — *остаточное* удлинение и отрезок OO_2 — *полное* удлинение при нагрузке OZ_1. Можно найти такую нагрузку OB_1, до которой мы будем иметь лишь упругие деформации. Соответствующая точка B диаграммы обычно лежит выше, но очень близко к точке A, отвечающей пределу пропорциональности. *Напряжение, превышение которого вызывает незначительные (порядка* 0,001 ÷ ÷ 0,03%) *остаточные деформации, называется пределом упругости* σ_y; на диаграмме (рис. 12) нагрузка, вызывающая это напряжение, измеряется ординатой OB_1.

Точки A и B настолько близки друг к другу, что обычно считают предел упругости и предел пропорциональности совпадающими. Поэтому зачастую говорят, что материал следует закону Гука, пока не достигнет предела упругости, хотя правильнее было бы сказать — предела пропорциональности.

Наибольшая величина растягивающей образец силы изображается ординатой OD_1; она часто называется *разрушающей нагрузкой*, так как необходима для того, чтобы *началось* разрушение; *окончательное* же разрушение происходит при нагрузке, изображаемой на диаграмме ординатой точки K. *Напряжение, вызванное наибольшей нагрузкой, носит название предела прочности или временного сопротивления* $\sigma_в$. Предел прочности, полученный как частное от деления наибольшего груза на первоначальную площадь поперечного сечения образца, характеризует величину тех сил, которые необходимы, чтобы довести стержень из рассматриваемого материала до разрушения при растяжении; для малоуглеродистой стали эта величина достигает $\sim$ 4000 *кГ/см*^{2}.

Изучая диаграмму, мы наметили на ней целый ряд ординат, выражающих величину нагрузок, связанных с различными механическими характеристиками материала. В таблице 2 дана сводка этих нагрузок и соответствующих им характеристик (напряжений) с их

Таблица 2

Механические характеристики материалов

Нагрузка	Название соответствующего напряжения и его обозначение
Нагрузка, соответствующая концу прямолинейного участка OA_1	Предел пропорциональности $\sigma_п$
Нагрузка, соответствующая появленню остаточных деформаций OB_1	Предел упругости $\sigma_у$
Нагрузка, соответствующая явлению текучести (возрастание деформации при постоянной нагрузке) OC_1	Предел текучести $\sigma_т$
Наибольшая нагрузка OD_1	Предел прочности или временное сопротивление $\sigma_в$

обозначениями. Для получения любого из указанных в таблице пределов соответствующая нагрузка делится на *первоначальную* площадь поперечного сечения.

Все эти механические характеристики (пределы пропорциональности, упругости, текучести и прочности) характеризуют способность материала сопротивляться стремлению внешних сил деформировать и разрушать образец при растяжении.

Абсциссы диаграммы испытания характеризуют иное свойство материала, а именно, его способность в большей или меньшей степени деформироваться, прежде чем наступит разрушение.

Отрезок O_3O_4 (рис. 12) дает нам величину упругой деформации образца к моменту разрыва, исчезающей в тот же момент, как разрушение произошло. Длина же $OO_3=\Delta l_0$ представляет собой величину остающихся удлинений участка l образца после разрыва. Эта величина тем больше, чем больше длина выбранного для измерений участка и чем *пластичнее* материал.

Отношение удлинения Δl_0 к первоначальной длине участка принимается за *меру пластичности* материала, т. е. его способности испытывать большие деформации при разрушении.

Величина этого отношения, выраженная в процентах, обозначается буквой δ и называется *остаточным относительным удлинением* образца после разрыва и для обычно применяемых сортов стали колеблется в пределах от 8 до 28%. Таким образом,

$$\delta=\frac{\Delta l_0}{l}\cdot 100.$$

Следует отметить, что величина остаточного относительного удлинения образца в значительной степени зависит от формы образца, главным образом от *отношения его длины к площади поперечного сечения*. Поэтому в лабораторной практике принято измерять, после

разрыва образца, остаточное удлинение не на всей его длине, а лишь на некоторой ее части, называемой расчетной. В образцах с круглым поперечным сечением расчетная длина чаще всего назначается равной $10d$, иногда $5d$. В образцах с прямоугольным поперечным сечением расчетная длина назначается так, чтобы при круглом поперечном сечении той же площади F, что и прямоугольное, отношение длины к диаметру оставалось прежним. Например, соответственно принятой для образца круглого сечения длине в $10d$ для образца с прямоугольным поперечным сечением за расчетную длину следует принять $11{,}3\sqrt{F}$. Образцы изготовляются так, что их длина между головками несколько превышает принятую расчетную.

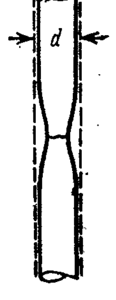


Рис. 14.

Для оценки пластичности материала при испытании на растяжение служит и другая величина, так называемое *остаточное относительное сужение*. После достижения наибольшей нагрузки на одном из участков стержня начинается образование «шейки», и сечение образца в месте разрыва обычно имеет меньшую площадь, чем первоначальное (рис. 14). Назовем первоначальную площадь сечения F_0, а площадь в месте разрыва F_1; величина

$$\psi=\frac{F_0-F_1}{F_0}\cdot 100$$

(в процентах) носит название *относительного сужения* после разрыва. Чем эта величина больше, тем материал пластичнее.

Наконец, диаграмма на рис. 12 дает нам возможность установить еще одну механическую характеристику материала, связанную с его сопротивлением ударам[1]). Это сопротивление оказывается тем большим, чем больше работа, которую нужно затратить, чтобы разорвать образец. Поэтому в качестве характеристики способности материала сопротивляться действию внезапного приложения нагрузки можно взять величину работы, которую надо затратить на растяжение образца до предела упругости или до разрыва. Оказывается, что эта работа в определенном масштабе выражается площадью диаграмм растяжения (рис. 12).

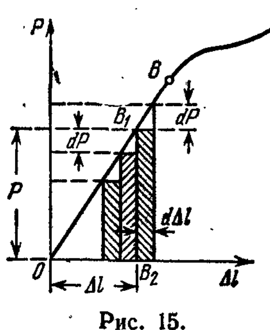


Рис. 15.

Рассмотрим часть этой диаграммы в пределах применимости закона Гука (рис. 15). При растяжении закрепленного одним концом образца перемещение другого его конца под действием постепенно возрастающей

[1]) Подробнее см. § 179.

силы P равно тоже постепенно растущему удлинению $\Delta l = Pl/(EF)$; эта зависимость выражается прямой OB.

Какому-либо значению силы P (отрезок B_1B_2) соответствует удлинение Δl (отрезок OB_2 на рис. 15). Увеличим нагрузку на dP; удлинение увеличится на $d\Delta l$ и растягивающая сила, средняя величина которой при этом равна $P + \frac{1}{2}dP$, совершит работу

$$dA = \left(P + \frac{1}{2}dP\right)d\,\Delta l = P\cdot d\,\Delta l + \frac{1}{2}dP\cdot d\,\Delta l.$$

Отбрасывая малую величину второго порядка $\frac{1}{2}dP\cdot d\,\Delta l$, получаем

$$dA = P\cdot d\Delta l.$$

Графически работа dA изображается площадью заштрихованного прямоугольника высотой P и основанием $d\Delta l$.

Рассматривая *постепенное* возрастание силы P как ряд последовательных прибавлений элементарных нагрузок dP, получим, что работа, производимая внешними силами при *постепенном* растяжении образца, представится суммой элементарных прямоугольников (рис. 15). При *непрерывном* увеличении P, т. е. при dP и $d\Delta l$ бесконечно малых, эта сумма для определенных значений P и Δl обратится в площадь треугольника OB_1B_2, равную

$$\frac{1}{2}B_1B_2\cdot OB_2 = \frac{1}{2}P\,\Delta l.$$

Таким образом, величина работы, совершенной при упругом удлинении бруска на величину Δl, выразится формулой

$$A = \frac{1}{2}P\,\Delta l \qquad (3.1)$$

и графически представится площадью соответствующей части диаграммы растяжения.

Такие же рассуждения можно применить и к полной площади диаграммы (рис. 12). Вся площадь выражает собой полную работу $A_в$, затраченную для разрыва образца длиной l и площадью F.

Чтобы получить величину, характеризующую с одной стороны лишь *материал*, а не *образец*, принято делить работу A на объем образца. Отношение $a = A/(F_0 l)$ называется *удельной работой упругой деформации* растяжения.

Аналогично можно определить *полную удельную работу* $a_в = A_в/(F_0 l)$; это та работа, которую необходимо затратить, чтобы разорвать образец. Чем эта величина больше, тем надежнее воспринимает материал ударное и внезапное действие нагрузки.

Выше мы видели, что материал образца после перехода за предел текучести продолжает испытывать упругие деформации, следующие по-прежнему закону Гука; к ним лишь добавляются остаточные

деформации. Это обстоятельство обнаруживается при разгрузке образца после перехода за предел текучести (точка Z диаграммы на рис. 12).

Если образец после такой разгрузки сразу начать вновь растягивать, то диаграмма при нагрузке изобразится почти той же прямой O_1Z, параллельной OA, что и при разгрузке, а после точки Z — той же кривой ZDK, которая была бы при отсутствии разгрузки. Таким образом, если сравнить диаграмму растяжения $OCZDK$ для образца, не подвергавшегося разгрузке, с диаграммой O_1ZDK для образца из того же материала, предварительно нагруженного до точки Z и разгруженного до точки O_1, то мы видим, что *предел пропорциональности повышается* до того напряжения, на которое предварительно был нагружен образец, *а остаточная деформация после разрыва уменьшается* на величину OO_1, т. е. на ту величину остаточной деформации, которая была приобретена при предварительном нагружении.

Такое повышение предела пропорциональности и уменьшение остаточной деформации после разрыва, вызванное предварительным нагружением за предел текучести с последующей разгрузкой, носит название *наклепа*. При наклепе как бы отрезается соответствующая часть диаграммы растяжения, что понижает и полную удельную работу $a_в$. В действительности явление происходит много сложнее описанной здесь упрощенной схемы. В частности, если после разгрузки дать образцу «отдохнуть», не сразу начать нагружение, а спустя один-два часа, то соответствующая часть диаграммы ZDK пройдет несколько *выше*, чем при отсутствии отдыха.

§ 11. Диаграмма напряжений

Приведенная на рис. 12 диаграмма иллюстрирует поведение материала при данных размерах образца; поэтому для получения графика, характеризующего непосредственно изучаемый материал, диаграмму растяжения несколько видоизменяют.

Ординаты кривой рис. 12, изображающие нагрузки, делят на первоначальную (до опыта) площадь сечения образца F_0, а абсциссы Δl — на расчетную длину l. Таким образом, в новой диаграмме по вертикали откладывают напряжения

$$\sigma = \frac{P}{F_0},$$

а по горизонтали — относительные удлинения

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Такая диаграмма изображена на рис. 16; она носит название *диаграммы напряжений при растяжении* для данного материала. По

очертанию она подобна диаграмме рис. 12: на ней нанесены все величины напряжений, характеризующие механические свойства материала: пределы пропорциональности $\sigma_п$, текучести $\sigma_т$, прочности $\sigma_в$.

Если мы будем рассматривать часть этой диаграммы OA до предела пропорциональности, то при некотором напряжении σ и соответствующем ему относительном удлинении ε площадь треугольника

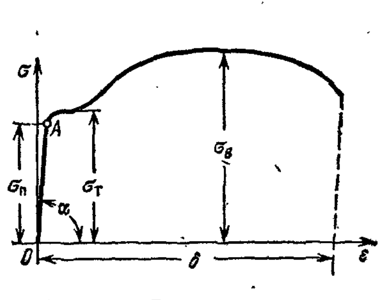


Рис. 16.

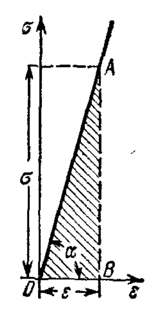


Рис. 17.

OAB (рис. 17), равная $\sigma\varepsilon/2$, будет выражать удельную работу деформации при растяжении материала до напряжения σ. В самом деле,

$$\frac{\sigma\varepsilon}{2}=\frac{P\,\Delta l}{2Fl}=a.$$

Зная, что $\varepsilon=\sigma/E$, можно представить выражение для удельной работы деформации в пределах упругости в таком виде:

$$a=\frac{\sigma\varepsilon}{2}=\frac{\sigma^2}{2E}. \qquad (3.2)$$

По аналогии вся площадь диаграммы рис. 16 представляет собой удельную работу деформации $a_в$ при разрыве образца изучаемого материала. Эту величину можно представить себе как произведение длины диаграммы δ на наибольшую ординату $\sigma_в$ и на некоторый коэффициент η, характеризующий отношение площади диаграммы к площади прямоугольника со сторонами δ и $\sigma_в$:

$$a_в=\eta\sigma_в\delta. \qquad (3.3)$$

Таким образом, *удельная работа при разрыве до известной степени характеризуется произведением предела прочности на относительное удлинение после разрыва.* Поэтому часто оценивают способность материала сопротивляться ударам по величине произведения $\sigma_в\delta$.

Из диаграммы рис. 17 видно, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sigma}{\varepsilon}=E.$$

Таким образом, модуль E графически изображается тангенсом угла наклона к оси абсцисс прямолинейной части диаграммы растяжения.

§ 12. Истинная диаграмма растяжения

Диаграмму напряжений при растяжении, показанную на рис. 16, можно рассматривать как характеризующую свойства данного материала при растяжении.

Эта характеристика механических свойств материала является, однако, *условной*. Если в начале испытания площадь поперечного сечения образца почти не изменяется, то, начиная с напряжений, равных пределу текучести, наступает заметное уменьшение этой площади, сначала равномерное по всей длине, а с момента перехода за предел прочности — местное. Таким образом, ординаты кривой рис. 16 на участке за пределом текучести представляют собой условные напряжения, отнесенные не к *действительной* площади сечения, а *первоначальной*.

Точно так же абсциссы диаграммы рис. 16 до достижения предела прочности зависят лишь от способности материала удлиняться; после же образования шейки величина относительного удлинения зависит и от соотношения размеров образца (длины и диаметра) и, таким образом, не является уже характеристикой только материала. Поэтому, чтобы получить график, более точно характеризующий свойства самого материала, строят так называемую диаграмму истинных напряжений. Она иллюстрирует связь между напряжениями и деформациями в том сечении образца, где происходит разрыв.

Для построения диаграммы истинных напряжений необходимо отмечать в разные моменты опыта величину силы, растягивающей образец, и одновременно измерять поперечные размеры образца в наиболее суженном месте.

Таким образом, если обозначить истинное напряжение $\bar{\sigma}$, а истинную площадь поперечного сечения в наиболее суженном месте $\bar{F}$, то

$$\bar{\sigma}=\frac{P}{\bar{F}}. \qquad (3.4)$$

При больших деформациях начальная длина образца тоже значительно изменяется. В связи с этим истинное удлинение $\bar{e}$ должно быть отнесено к действительной длине стержня в данный момент испытания и может быть вычислено по формуле

$$\bar{e}=\int_{l_0}^{l_1}\frac{dl}{l}, \qquad (3.5)$$

где l_0— первоначальная длина, а l_1— длина в момент измерения. При больших значениях истинного удлинения оно обозначается через $\bar{e}$, а не через $\bar{\varepsilon}$.

Установим зависимости между истинными и условными деформациями и истинными и условными напряжениями.

При *равномерной* деформации по длине образца

$$\bar{e}=\int_{l_0}^{l_1}\frac{dl}{l}=\ln l\Big|_{l_0}^{l_1}=\ln l_1-\ln l_0=\ln\frac{l_1}{l_0}=\ln\frac{l_0+\Delta l}{l_0}.$$

Окончательно

$$\bar{e}=\ln(1+\varepsilon), \tag{3.6}$$

где $\varepsilon=\Delta l/l_0$— условная относительная деформация.

Формула (3.6) при неравномерной деформации не может быть использована, так как затруднено измерение Δl для вычисления ε.

При *неравномерной* деформации, с началом образования шейки, опыт показывает, что объем образца почти не меняется. Этот *закон постоянства объема* может быть записан так:

$$F_0l_0=\bar{F}l,$$

где F_0— первоначальная площадь поперечного сечения. Далее получим

$$F_0l_0=(F_0-\Delta F)\,(l_0+\Delta l),$$

после деления на F_0l_0:

$$1=\frac{F_0-\Delta F}{F_0}\cdot\frac{l_0+\Delta l}{l_0},$$

или

$$(1-\psi)(1+\varepsilon)=1, \quad \text{где} \quad \psi=\frac{\Delta F}{F_0}.$$

Отсюда

$$1+\varepsilon=\frac{1}{1-\psi}.$$

Подставив последнее равенство в формулу (3.6), окончательно получим

$$\bar{e}=\ln\frac{1}{1-\psi}. \tag{3.7}$$

Отметим, что величина ψ определяется по самому узкому месту шейки.

Для получения зависимости между истинными и условными напряжениями учтем, что

$$P=\sigma F_0=\bar{\sigma}\bar{F},$$

где σ — условное напряжение, т. е. отнесенное к первоначальной площади поперечного сечения. Далее,

$$\sigma=\bar{\sigma}\frac{\bar{F}}{F_0}=\bar{\sigma}\frac{F_0-\Delta F}{F_0}=\bar{\sigma}(1-\psi)$$

и

$$\bar{\sigma}=\sigma\frac{1}{1-\psi}.$$

Таким образом, учитывая полученную ранее зависимость между ε и ψ, при *равномерной* деформации по длине образца

$$\bar{\sigma}=\sigma(1+\varepsilon). \tag{3.8}$$

При неравномерной деформации, с началом образования шейки, истинное напряжение $\bar{\sigma}$ определяется непосредственно по формуле

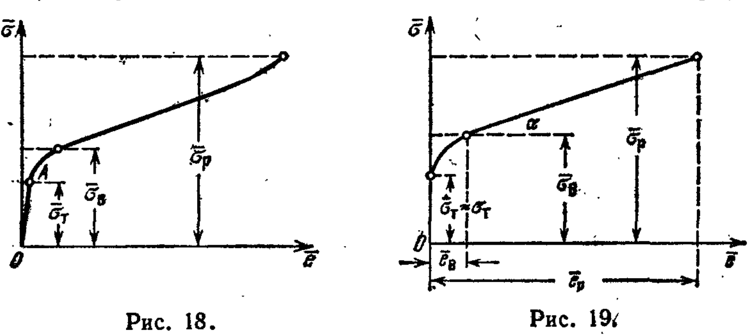


Рис. 18. Рис. 19.

(3.4), так как нахождение условных напряжений в этой стадии работы образца бессмысленно из-за значительной разницы между $\bar{F}$ и F_0.

Диаграмма в координатах истинные напряжения — истинные деформации изображена на рис. 18. Однако для практических целей эта диаграмма несколько упрощается. Учитывается, что $\bar{\sigma}_т\approx\sigma_т$ и пренебрегается небольшим участком кривой перед самым разрывом. Тогда она строится так, как показано на рис. 19.

Значение $\sigma_т=P_т/F_0$.

Величина *истинного предела прочности* или *истинного временного сопротивления* $\bar{\sigma}_в$ определяется по формуле (3.8).

Значение *истинного напряжения при разрыве* определяется по формуле (3.4), т. е. $\bar{\sigma}_р=P_р/\bar{F}$.

Величина *истинного равномерного удлинения* находится по формуле (3.6), т. е. $\bar{e}_в=\ln(1+\varepsilon)$, где ε есть условное относительное удлинение в момент начала образования шейки.

Наконец, значение *полного истинного удлинения в момент разрыва* определяется по формуле (3.7), где φ вычисляется для места разрыва: $\bar{e}_p = \ln \frac{1}{1-\psi}$.

Как видно из диаграмм, представленных на рис. 18 и 19, напряжение $\bar{\sigma}$ возрастает до *самого разрыва*, сначала быстро, после же достижения наибольшего значения нагрузки (напряжение $\bar{\sigma}_в$) менее резко. В момент разрыва напряжение, отнесенное к действительной площади сечения, оказывается бо́льшим предела прочности, вычисленного обычным способом.

Однако было бы ошибкой использовать эту последнюю величину для вычисления тех наибольших сил, которые может выдержать стержень до разрыва, что для нас и интересно с практической точки зрения. Это видно из обычной диаграммы растяжения рис. 12; наибольший груз, выдерживаемый образцом, соответствует не моменту разрыва, а более раннему; величина этого груза для образца данной площади и характеризуется пределом прочности. Повышение же действительных напряжений между точками, соответствующими наибольшему грузу и моменту разрыва, связано с резким уменьшением рабочей площади образца, т. е. практически с процессом его разрушения.

Пользуясь диаграммой истинных напряжений, можно установить ряд новых механических характеристик. Они были перечислены (выделены курсивом) при описании построения истинной диаграммы растения.

Ординаты истинной диаграммы характеризуют способность материала сопротивляться пластической деформации.

Для продолжения пластической (остаточной) деформации нам приходится давать материалу все большее и большее напряжение; по мере роста пластической деформации метериал оказывает ей все большее сопротивление. Это явление называется *упрочнением*. Способность материала к упрочнению характеризуется крутизной подъема истинной диаграммы, величиной $\operatorname{tg} \alpha$.

Разность между полным истинным удлинением и равномерным истинным удлинением характеризует способность материала к образованию местных деформаций (шейка) и называется *местным удлинением*.

§ 13. Диаграммы растяжения для пластичных и хрупких материалов

В предыдущих параграфах рассмотрена физическая картина явлений при растяжении образцов из пластичного материала типа малоуглеродистой стали. Для других видов материалов, дающих при растяжении пластическую деформацию, получаются диаграммы напряжений примерно того же вида, что и на рис. 16.

Некоторые сорта стали (специальные), медь, бронза не имеют площадки текучести. Прямая часть диаграммы переходит непосредственно в криволинейную. Для примера диаграммы напряжений литой стали (*а*), бронзы (*б*), никелевой стали (*в*) и марганцовистой стали (*г*) показаны на рис. 20.

Для материала, диаграмма растяжения которого не имеет площадки текучести, за величину предела текучести условно принято считать напряжение, при котором остаточное относительное удлинение образца достигает примерно такой же величины, как при наличии ясно выраженной площадки текучести. За эту величину остаточного относительного удлинения принимают обычно 0,2%.

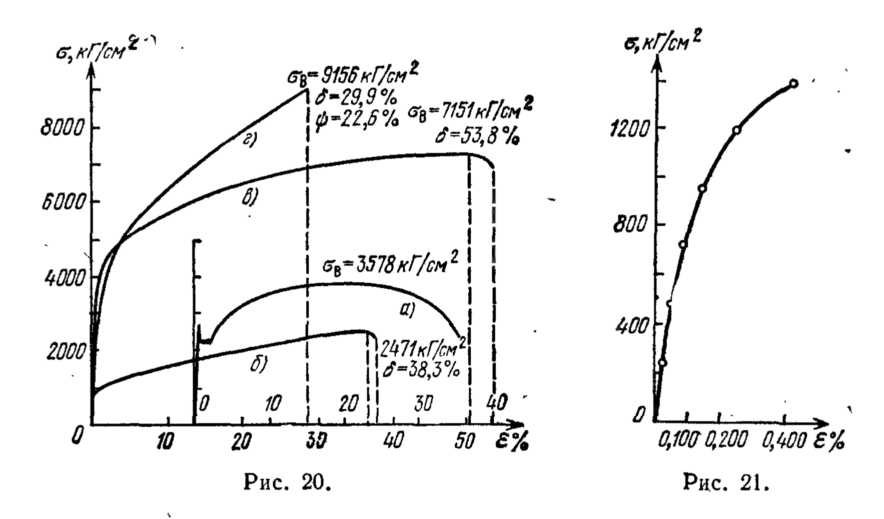


Рис. 20. Рис. 21.

Хрупкие материалы характеризуются тем, что разрушение происходит уже при небольших деформациях. При растяжении образца из такого типично хрупкого материала, как чугун, мы до самого момента разрыва наблюдаем лишь незначительные деформации; разрушение происходит внезапно; относительное удлинение и относительное сужение после разрыва оказываются очень малыми. Диаграмма напряжений при растяжении для чугуна дана на рис. 21. Обращаем внимание на то, что по сравнению с диаграммами рис. 20 горизонтальный масштаб диаграммы рис. 21 увеличен примерно в 40 раз, а вертикальный — примерно в 6 раз.

Как правило, хрупкие материалы плохо сопротивляются растяжению; их предел прочности на разрыв оказывается малым по сравнению с пределом прочности пластичных материалов.

Зависимость деформаций от напряжений при растяжении хрупких материалов обычно плохо изображается законом Гука; на диаграмме вместо прямолинейного участка мы уже при низких

напряжениях получаем слегка искривленную линию, т. е. не наблюдается строго линейной пропорциональности между силой или напряжением и соответствующей деформацией.

Таким образом, модуль упругости E, равный (§ 11) тангенсу угла наклона относительно оси абсцисс касательной к диаграмме напряжений, собственно говоря, нельзя считать для таких материалов постоянной величиной; он меняется в зависимости от величины того напряжения, для которого мы вычисляем деформацию. Чем эти напряжения больше, тем модуль меньше или больше, в зависимости от того, куда направлена выпуклость кривой диаграммы — вверх или вниз.

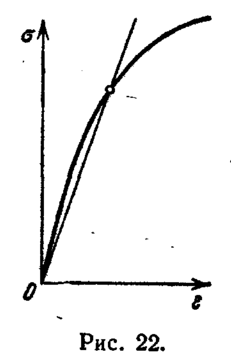


Рис. 22.

Однако в пределах тех напряжений, при которых материал обычно работает в сооружениях, наблюдающиеся отклонения от закона Гука незначительны. Поэтому при практических расчетах заменяют криволинейную часть диаграммы соответствующей хордой (рис. 22) и считают модуль E постоянным. Это тем более допустимо, что механические характеристики хрупких материалов изменяются для отдельных образцов в более широких пределах, чем характеристики пластичных материалов; поэтому нет смысла пользоваться более точными выражениями зависимости между напряжениями и деформациями.

§ 14. Характер разрушения при сжатии пластичных и хрупких материалов. Диаграмма сжатия

При изучении сопротивления материалов сжатию приходится применять образцы в виде кубика или цилиндра с высотой, немного большей диаметра. Для более длинных образцов в опытах трудно избежать искривления.

Размеры образцов для разных материалов различны и колеблются в пределах (ребро кубика) от 2 *см* (дерево) до 20—30 *см* (бетон).

При сжатии цилиндрика из пластичного материала при напряжениях ниже предела пропорциональности или текучести материал ведет себя так же, как при растяжении. Величины предела пропорциональности (а также текучести для стали) и модуля упругости для пластичных материалов при сжатии и растяжении примерно одинаковы.

После перехода за предел пропорциональности появляются заметные остаточные деформации, выражающиеся в укорочении образца и увеличении диаметра. Благодаря трению между опорными плитами пресса и основаниями образца затрудняются поперечные деформации материала у торцов образца; он принимает бочкообразную форму (рис. 23).

По мере увеличения площади поперечного сечения приходится для дальнейшей деформации все увеличивать нагрузку, образец продолжает сжиматься, обращаясь в лепешку. Напряжения, аналогичного пределу прочности при разрыве, наблюдать не приходится.

Типичная диаграмма напряжений при сжатии для пластичного материала (малоуглеродистая сталь) показана на рис. 24. При сжатии пластичных материалов, как и при их растяжении, имеет место явление наклепа.

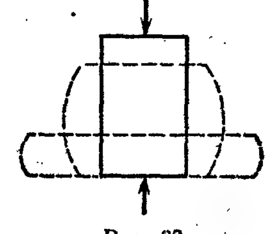


Рис. 23.

Хрупкие материалы — камень, чугун, бетон — при сжатии разрушаются так же, как и при растяжении, при весьма малых деформациях. На рис. 25 показана диаграмма напряжений при сжатии каменного образца (кубик размерами $10\times10\times10$ *см*, гранит). На рис. 26 дана диаграмма напряжений при сжатии чугуна. Здесь также обращаем внимание на то, что масштабы диаграмм рис. 25 и 26, в особенности горизонтальный, значительно увеличены по сравнению с масштабом диаграммы рис. 24.

Характер разрушения образцов камня показан на рис. 27: раздробленный образец представляет собой усеченные пирамиды, соединенные меньшими основаниями. Эта форма разрушения зависит от

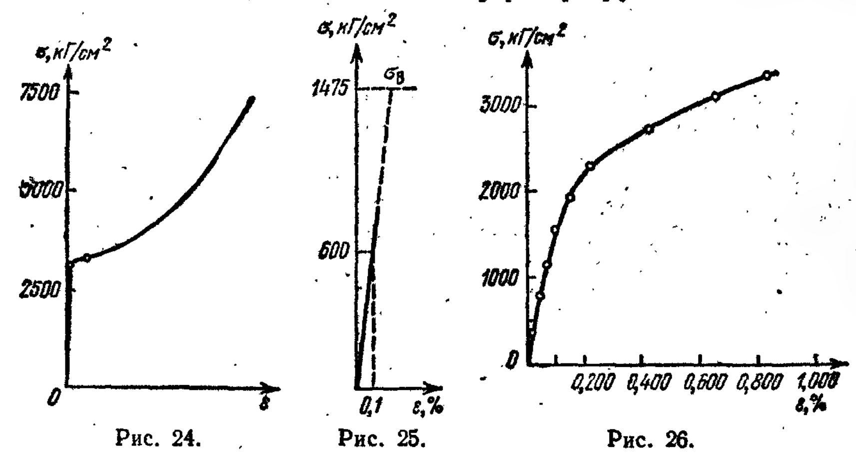
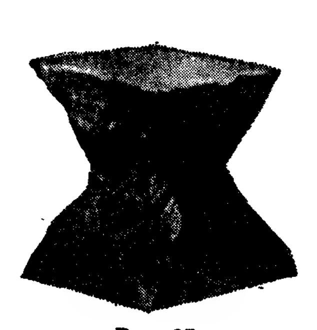


Рис. 24. Рис. 25. Рис. 26.

наличия при опыте сил трения между образцом и опорными плитами пресса. Если уничтожить это трение, например, путем смазывания парафином торцов кубика, то характер разрушения камня будет иным: камень будет разделяться на части трещинами, параллельными действию сжимающей силы (рис. 28). Разрушающая нагрузка для такого кубика будет меньше, чем для кубика, испытанного обычным путем, без смазки. Таким образом, при испытании на сжатие

величина предела прочности оказывается в значительной мере *условной* характеристикой прочности материала. Это обстоятельство приходится учитывать при назначении коэффициента запаса.



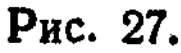


Рис. 27.



Рис. 28.

При медленном ведеии опыта на сжатие для образцов призматической формы из бетона или из каменной кладки подмечено, что разрушение начинается с появления продольных, параллельных направлению силы трещин. Таким образом, можно сказать, что *материал* сжимаемого образца разрушается, по-видимому, от нарушения сопротивления отрыву отдельных его частей.

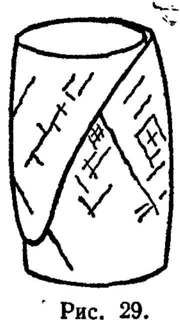


Рис. 29.

P

Вдоль

Поперек

Δl

Рис. 30.

Для чугуна характер разрушения близок к тому, который наблюдается для камня. Вид раздробленного сжатием вдоль оси чугунного цилиндра показан на рис. 29. *Необходимо отметить, что хрупкие материалы обычно сопротивляются сжатию гораздо лучше, чем растяжению.*

При сжатии образцов дерева получаются резко различные результаты в зависимости от направления сжатия по отношению к волокнам; дерево — материал, называемый *анизотропным*, т. е. обладающим разными свойствами в разных направлениях. При сжатии дерева вдоль волокон предел прочности оказывается примерно в 10 раз больше, чем при сжатии поперек волокон, а деформация значительно меньше. На рис. 30 показаны диаграммы сжатия деревянного кубика вдоль и поперек волокон. В таблице 3 приведены данные о пределах прочности при растяжении и сжатии важнейших материалов.

Таблица 3

Пределы прочности в *кГ/см²*

Наименование материала	При растяжении	При сжатии
Сталь для конструкций	3800÷4200	
Сталь машинноподелочная углеродистая	3200÷8000	
Рельсовая сталь	7000÷8000	
Специальные стали для машиностроения	7500÷19000	
Сплавы меди (латунь, бронза)	2200÷5000	
Чугун серый обыкновенный	1400÷1800	6000÷10000
Чугун серый мелкозернистый	2100÷2500	до 14000
Чугун белый	—	до 17500
Бакелит	200÷300	800÷1000
Целлулоид	500÷700	—
Текстолит	500÷1000	1500÷2500
Гетинакс	800÷1000	2400÷3400
Бакелизованная фанера	1300	1150
Жесткий поливинилхлорид (ПВХ, винипласт)	400÷500	800÷1000
Капролон	900÷950	1200
Полиэтилен высокого давления (ПВД)	120÷160	—
Фенопласт ФКПМ-15	200÷250	1200÷1500
Поликарбонат (дифлон)	600÷700	800÷900
Дерево (дуб, сосна, ель) при 15% влажности		
вдоль волокон	650÷950	350÷500
поперек волокон	—	40÷150
Гранит, диабаз, гнейс, кварцит	30÷50	1200÷2600
Песчаник, известняк	20	400÷1500
Кирпич	—	75÷300
Бетон	—	50÷350
Лед[1]) при температуре от 0 до —30° С и ниже		
пресный	—	4,5÷15
соленость 1÷2%	—	4÷13,5
соленость 3÷6%	—	3÷10,5

[1]) По СНиП 11-57-75

§ 15. Сравнительная характеристика механических свойств пластичных и хрупких материалов

Основная разница между хрупкими и пластичными материалами заключается в том, что хрупкие материалы разрушаются при очень небольших деформациях, в то время как окончательное разрушение пластичных материалов происходит лишь после значительных изменений формы. В связи с этим площади диаграмм для пластичных материалов значительно больше, чем для хрупких.

Для разрушения пластичных материалов необходимо затратить гораздо больше работы, чем для хрупких. Поэтому в тех случаях, где задачей конструкции является поглощение возможно большей кинетической энергии удара без разрушения, пластичные материалы оказываются более подходящими.

Хрупкие материалы очень легко разрушаются при действии удара именно потому, что их удельная работа деформации очень мала. При спокойной же, постепенно возрастающей сжимающей нагрузке те же хрупкие материалы способны иногда безопасно брать на себя значительно большие напряжения, чем пластичные, благодаря своей способности давать очень малые изменения формы до напряжений, близких даже к пределу прочности.

Вторым характерным признаком, разделяющим оба типа материалов, является тот признак, что для пластичных материалов можно считать почти одинаковым их поведение в первых стадиях деформации при растяжении и сжатии. Громадное же большинство хрупких материалов сопротивляется растяжению много хуже, чем сжатию. Это в значительной мере ограничивает область применения хрупких материалов или требует специальных мер при работе их на растяжение, например усиления бетона сталью в растянутых элементах.

Резкая разница между пластичными и хрупкими материалами обнаруживается в их поведении по отношению к так называемым *местным напряжениям*. Под местными напряжениями мы подразумеваем такие, которые распространяются на сравнительно малую часть поперечного сечения элемента, но величина которых выше среднего, или так называемого *номинального* их значения, получаемого по обычным формулам. Подробно о местных напряжениях будет сказано в § 186.

Так как у хрупких материалов не наблюдается значительных деформаций почти до самого разрушения, то такое неравномерное распределение напряжений будет иметь место при сжатии или растяжении стержня все время, т. е. пока наибольшие напряжения не достигнут предела прочности. В связи с этим стержень из хрупкого материала при наличии местных напряжений разрушится или даст хотя бы трещины при значительно меньших величинах *средних* нормальных напряжений $\sigma=P/F$, чем такой же стержень при отсут-

ствии местных напряжений. Последние, таким образом, резко понижают прочность хрупких материалов.

Пластичные материалы гораздо менее восприимчивы к влиянию этих местных напряжений. Роль пластичности по отношению к местным напряжениям заключается в том, что она как бы несколько выравнивает эти напряжения. Механизм такого выравнивания будет дан в главе XXXI.

Нами описана значительно упрощенная схема работы стержня при неравномерном распределении напряжений. На самом деле выравниванию напряжений препятствует не только явление упрочнения, но и изменение напряженного состояния в месте концентрации, переход его из линейного напряженного состояния в объемное. Такое сложное напряженное состояние будет исследовано в главе VI.

Наконец, еще одно обстоятельство обусловливает выбор того или другого типа материала при практическом применении. Зачастую при сборке конструкции бывает необходимо несколько погнуть или исправить искривленный элемент. Так как хрупкие материалы выдерживают без разрушения лишь очень малые деформации, то подобные операции с ними обычно ведут к появлению трещин. Пластичные же материалы, имеющие способность принимать значительные деформации без разрушения, обычно без всяких затруднений допускают такие изгибы и исправления.

Таким образом, хрупкие материалы плохо сопротивляются растяжению и ударам, очень чувствительны к местным напряжениям и не переносят исправлений формы изготовленных из них элементов.

Пластичные же материалы этими недостатками не обладают; таким образом, пластичность является одним из самых важных и желательных качеств материала.

У хрупких материалов имеется то достоинство, что они обычно дешевле и зачастую обладают высоким пределом прочности сжатию, что может быть использовано при спокойной нагрузке.

Таким образом, хрупкие и пластичные материалы обладают резко разнящимися, противоположными свойствами в отношении их сопротивления простому сжатию и растяжению. Однако эта разница является лишь *относительной*. Хрупкий материал может получить свойства пластичного, и наоборот. Эти свойства — хрупкость и пластичность — зависят от способа обработки материала, от вида напряженного состояния и температуры. Камень, являющийся при простом сжатии типично хрупким материалом, можно заставить деформироваться как пластичный; в некоторых опытах это удавалось при действии на цилиндрический образец камня давлений, приложенных не только по основаниям цилиндра, но и по его боковой поверхности. С другой стороны, малоуглеродистую сталь, пластичный материал, можно поставить в такие условия работы, например при низких температурах, что она дает совершенно хрупкое разрушение.

Таким образом, характеристики «хрупкий», «пластичный», которые мы даем материалам на основании опытов на растяжение и сжатие, относятся лишь к поведению этих материалов при *обычных температурах* и лишь при сопротивлении *указанным видам деформаций*. Вообще же хрупкий материал может перейти в пластичный, и наоборот. Поэтому правильнее говорить не о «хрупком» и «пластичном» материалах, а о *хрупком* или *пластичном состояниях* материала.

Необходимо отметить, что уже сравнительно небольшое повышение пластичности хрупкого материала (хотя бы до 2% относительного удлинения при разрыве) позволяет применять его в целом ряде случаев, исключавшихся для хрупких материалов (в частях машин). *Поэтому работа над повышением пластичности таких материалов, как бетон, чугун, заслуживает самого серьезного внимания.*

§ 16. Основания для выбора коэффициента запаса прочности

А. В предыдущих параграфах подробно изучены способы вычисления напряжений, определения механических свойств материалов при растяжении и сжатии и даны указания о выборе того или иного типа материала (пластичного или хрупкого) в зависимости от условий работы конструкции.

Для установления величины допускаемых напряжений, пригодных в разных случаях действия нагрузки, приведенных пока данных все же не вполне достаточно. Все величины, характеризующие механические свойства материала (предел прочности, относительное удлинение, предел пропорциональности и т. п.), получаются из опытов в лаборатории при действии *статической* нагрузки, т. е. возрастающей постепенно, без толчков, ударов и перемен знака. Точно так же формулы, связывающие величину нормальных напряжений σ с величиной сжимающих или растягивающих сил P, выведены для случая статического действия этих сил; предполагалось, что внешние силы и напряжения, приложенные к отсеченной части стержня, взаимно уравновешиваются. Между тем в целом ряде случаев приходится иметь дело с нагрузками, действующими ударно или систематически меняющимися.

Влияние ударно приложенной нагрузки сказывается двояко по сравнению со статической: с одной стороны, хрупкие и пластичные материалы различно реагируют как *материалы* на ударное действие нагрузок; с другой стороны, и *напряжения* оказываются в этом случае другими, чем при статических нагрузках. Подробнее этот вопрос будет разобран в главах о динамическом действии нагрузок. Здесь мы обратим внимание только на то обстоятельство, что при динамическом действии нагрузок напряжения обычно будут *бо́льшими*, чем при статическом действии тех же нагрузок. Это положение подтверждается опытами и может быть доказано теоретически, что и будет сделано в отделе IX.

Отношение напряжения $\sigma_д$, вызванного динамическим действием нагрузки, к напряжению σ, вызванному статическим действием той же нагрузки, носит название *динамического коэффициента* и обозначается $K_д$:

$$\frac{\sigma_д}{\sigma}=K_д.$$

Величина $K_д$ зависит от характера динамичности нагрузки и в ряде случаев достигает весьма больших значений.

Б. Сопротивление материалов действию нагрузок, систематически изменяющих свою величину или величину и знак, значительно отличается от сопротивления материалов статическому и ударному действию нагрузок.

Если, например, стальной стержень мы будем подвергать большое число раз попеременно растяжению и сжатию, то обнаружим, что после определенного количества перемен напряжений стержень в некоторых случаях даст трещину и затем разрушится при напряжениях, значительно меньших предела прочности. Даже в случае пластичного материала остаточная деформация образца, разрушенного подобным образом, оказывается весьма незначительной — происходит хрупкий излом.

Явление разрушения материала при действии переменных напряжений, меньших предела прочности, называется явлением *усталости*. Это название не отвечает физической природе явления, однако настолько укоренилось, что применяется и в настоящее время.

Опыты показывают, что при переменном растяжении и сжатии, по мере понижения величины действующей силы возрастает число перемен этой силы, необходимое для того, чтобы вызвать разрушение образца. Для каждого материала существует такое максимальное значение нормального напряжения σ, при котором образец выдерживает практически неограниченное число перемен усилий, не разрушаясь. Это напряжение обозначается σ_r и называется *пределом выносливости* или *пределом усталости*. Пока действительные напряжения в элементе не превзошли этого предела, разрушения не произойдет, сколько бы раз напряжение не меняло свою величину.

Таким образом, в случае систематически меняющихся нагрузок оказывается необходимым установить новую механическую характеристику материала — предел выносливости; эта величина определяет способность материала сопротивляться переменным внешним силам. Подробное изучение вопросов усталости материала при разных видах нагрузок будет дано в главе XXXI.

Все изложенное необходимо учитывать при выборе допускаемых напряжений на растяжение и сжатие или, что все равно, при определении коэффициента запаса k в формуле (см. §§ 4 и 7)

$$[\sigma]=\frac{\sigma_в}{k}. \qquad (3.9)$$

Этот коэффициент должен быть выбран с тем расчетом, чтобы величина нормальных напряжений, действующих по всему сечению, не превосходила предела упругости (или текучести) материала, иначе наш стержеиь получит остаточные деформации, а при действии переменных нагрузок не превосходила предела выносливости, который обычно ниже предела текучести.

При ударной нагрузке следует учесть, что напряжения обычно повышаются. Так как и в этом случае напряжения все же обычно вычисляют в предположении статического действия сил, то влияние динамического действия нагрузки приходится учитывать соответствующим увеличением коэффициента запаса.

В. Что касается местных напряжений (см. § 15), то можно мириться с переходом их за предел упругости и текучести в пластичных материалах при отсутствии переменных нагрузок. В этом случае мы получаем остаточные деформации лишь на протяжении такой небольшой части стержня, что на работе конструкции это обстоятельство не скажется. За счет появления остаточных деформаций местные напряжения прекращают свое увеличение, отчасти выравниваются. В хрупких материалах этого преимущества нет (§ 15): для них приходится коэффициент запаса назначать повышенным, тем более, что и в отношении сопротивления ударам они стоят значительно ниже пластичных.

При переменных нагрузках, когда мы вынуждены считаться с возможностью развития трещин усталости, учет величины местных напряжений необходим и может очень резко сказаться на выборе коэффициента запаса даже для пластичных материалов. Для появления трещин усталости необходимо, чтобы в каком-либо месте стержня *действительные* напряжения перешли за предел выносливости. Так как *местные* напряжения выше общих (действующих по большей части сечения), то опасность появлеиия трещин и вызывается тем, что именно местиые напряжения перейдут за предел выносливости. Так как подбор сечения мы ведем, исходя из величины наибольших общих напряжений по условию

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} \leqslant [\sigma] = \frac{\sigma_в}{k},$$

то коэффициент запаса для допускаемых *общих* напряжений в этом случае надлежит выбрать так, чтобы *местные* напряжения не превосходили *предела выносливости*. Это во многих случаях требует значительного увеличения коэффициента k по сравнению со случаем статической нагрузки.

Для *пластичных* материалов в тех случаях, когда предел выносливости лежит *выше* предела текучести, можно не учитывать местные напряжения, так как явление текучести уменьшает возможность их распространений, играет как бы роль буфера.

Для *хрупких* материалов, не имеющих площадки текучести, опасность появления трещин усталости при переменных нагрузках остается в полной мере, что требует соответствующего увеличения коэффициента запаса по сравнению со статической нагрузкой.

Таким образом, поскольку выбор коэффициента запаса обусловливается свойствами материала и способом приложения внешних сил, хрупкие материалы требуют обычно бо́льших коэффициентов запаса, чем пластичные; точно так же эти коэффициенты приходится выбирать бо́льшими при динамических и переменных нагрузках, чем при статических.

Г. При выборе допускаемых напряжений приходится учитывать еще ряд других обстоятельств. Величины сил, входящих в наши расчеты, известны нам не вполне точно; механические свойства материалов дают на практике зачастую значительные колебания; методы наших расчетов, наши представления о взаимодействии отдельных частей конструкций являются обычно упрощенными и приближенными. Коэффициент запаса должен покрыть все эти неточности, неизбежные в наших расчетах.

Чем неоднороднее материал, чем хуже мы знаем действительные нагрузки, чем упрощеннее мы представляем себе соединение отдельных элементов конструкции, тем бо́льшим этот коэффициент приходится выбирать. Части машин в работе изнашиваются, поэтому во многих случаях приходится давать «запас на износ». Точно так же в металлических и деревянных инженерных сооружениях приходится учитывать возможность коррозии и загнивания.

С другой стороны, имеются конструкции (самолеты), где необходимо идти до крайних пределов снижения коэффициента запаса с целью уменьшения веса.

Таким образом, правильный выбор допускаемых напряжений представляет собой весьма сложную задачу, связанную и с методами расчетов, методами исследования материалов, с хозяйственно-экономическими и некоторыми другими факторами. Выбор той или иной величины допускаемого напряжения определяет и расход данного материала, и формы его применения в конструкции; этот выбор регулирует и продолжительность использования сооружений, и область применения тех или других материалов.

Для многих конструкций нормы допускаемых напряжений устанавливаются стандартами, и инженер должен лишь уметь правильно применять их. В исключительных же обстоятельствах, например, в обстановке военного времени, инженеру приходится в некоторых случаях отступать от этих норм; тогда он может руководствоваться общими соображениями, изложенными в настоящем параграфе и в главе XXXI.

Д. Подводя итог всему сказанному выше, можно формулировать следующие основные соображения.

Коэффициент запаса надо выбирать с тем расчетом, чтобы был *обеспечен* известный запас против появления так называемого *опасного состояния* материала, которое будет *угрожающим* для работы конструкции.

При статической или ударной нагрузке для пластичных материалов такое состояние характеризуется появлением больших остаточных деформаций (явление текучести), для хрупких — появлением трещин, разрушением материала. При повторно-переменной нагрузке опасное состояние характеризуется появлением и развитием трещины усталости. Напряжение, соответствующее наступлению опасного состояния, мы будем называть условно σ^0. Это напряжение равно

$$\sigma^0 = \begin{cases} \sigma_т \text{ — пределу текучести — при наступлении текучести пластичного материала,} \\ \sigma_в \text{ — пределу прочности — при разрушении (трещины) хрупкого материала,} \\ \sigma_r \text{ — пределу выносливости — при появлении трещины усталости.} \end{cases}$$

Таким образом, формула (3.9) может быть теперь уточнена и заменена тремя формулами в зависимости от характера опасного состояния материала:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_т}{k_т}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_в}{k_в}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_r}{k_r}, \qquad (3.10)$$

где $k_т$, $k_в$, k_r — соответствующие коэффициенты запаса. Эти три формулы можно обобщить в виде

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{k},$$

подразумевая под σ^0 либо $\sigma_т$, либо $\sigma_в$, либо σ_r, а под k либо $k_т$, либо $k_в$, либо k_r.

Однако наша первоначальная формула (3.9) не утратила своего практического значения. Так как пределы текущести и выносливости в известной мере связаны с пределом прочности, то можно для всех видов опасного состояния установить коэффициент запаса и по отношению к пределу прочности $\sigma_в$.

Таковы, в общем, исходные соображения, положенные в основу решения задачи о выборе допускаемых напряжений.

Е. Переходя к вопросу о назначении величины коэффициента запаса, пока ограничимся весьма краткими указаниями. Неоднородность материала, неточность при определении величин сил, неточность расчета, т. е. *общие факторы*, учитываются так называемым *основным* коэффициентом запаса k_0. Для пластичных материалов (сталь) он принимается обычно равным $k_т = k_0 = 1,4 \div 1,6$, для хрупких материалов и дерева $k_в = k_0 = 2,5 \div 3,0$. Остальные факторы, т. е.

динамичность нагрузок, переменность их действия и влияние местных перенапряжений, учитываются дополнительными коэффициентами, на которые умножается основной.

При этом надо помнить, что полученное по формуле (3.9) допускаемое напряжение [σ] должно сопоставляться с действующим в детали конструкции статическим напряжением без учета динамичности нагрузки и прочих дополнительных факторов.

Если при назначении допускаемого напряжения учитываются только общие факторы, т. е. коэффициент запаса принимается равным одному лишь основному, то динамику и местные напряжения учитывают, когда это возможно, в величине действительного напряжения, умножая основное статическое напряжение на коэффициенты динамики и концентрации. Нетрудно убедиться, что в обоих случаях результаты будут одинаковыми.

Примерные значения общего коэффициента запаса по отношению к пределу прочности для различного состояния материала и для различного характера действия нагрузок с включением в него обычной величины влияния динамичности нагрузки и местных напряжений показаны в таблице 4.

Таблица 4

Коэффициенты запаса

Характер нагрузки	Состояние материала	$k_в$
Статическая нагрузка	Пластичный материал	2,4÷2,6
	Хрупкий материал	3,0÷9,0
Ударная нагрузка	Пластичный материал	2,8÷5,0
Переменная нагрузка (растяжение—сжатие одинаковой величины)	Пластичный материал (сталь)	5,0÷15,0

Эта таблица имеет лишь *ориентировочный* характер; она дает представление об изменении коэффициента в зависимости от различных обстоятельств. Подробнее о коэффициентах запаса для ударных и переменных нагрузок будет сказано в главах XXX и XXXI.

§ 17. Допускаемые напряжения на растяжение и сжатие для различных материалов

В предыдущем параграфе нами были выяснены те многочисленные обстоятельства, которые влияют на выбор величины коэффициента запаса прочности и, следовательно, на значение допускаемого напряжения. Ниже, в таблице 5, приводятся ориентировочные вели-

чины основных допускаемых напряжений на растяжение и сжатие некоторых главнейших материалов, применяемых в инженерном деле и в машиностроении. Эта таблица составлена на основании действующих в настоящее время в СССР норм.

Таблица 5

Ориентировочные величины основных допускаемых напряжений

Наименование материала	Допускаемое напряжение в $кГ/см^2$ на растяжение	на сжатие
Чугун серый в отливках	280÷800	1200÷1500
Стали малоуглеродистые	1600÷2000	—
Сталь углеродистая конструкционная в машиностроении	600÷2500	
Сталь легированная конструкционная в машиностроении	1000÷4000 и выше	
Медь	300÷1200	
Латунь	700÷1400	
Бронза	600÷1200	
Алюминий	300÷800	
Алюминиевая бронза	800÷1200	
Дюралюмин	800÷1500	
Текстолит	300÷400	
Гетинакс	500÷700	
Бакелизованная фанера	400÷500	
Сосна вдоль волокон	70÷100	100÷120
Сосна поперек волокон	—	15÷20
Дуб вдоль волокон	90÷130	130÷150
Дуб поперек волокон	÷	20÷35
Каменная кладка	до 3	4÷40
Кирпичная кладка	до 2	6÷25
Бетон	1÷7	10÷90

Материалы, перечисленные в таблице 5, должны удовлетворять требованиям и нормам (в отношении механической прочности, пластичности, технологии изготовления, химического состава и пр.), содержащимся в соответствующих стандартах. Она не охватывает всего многообразия материалов и условий их работы. В каждом частном случае расчетной практики следует устанавливать допускаемые напряжения в соответствии с официальными техническими условиями и нормами проектирования данной конкретной конструкции или, при их отсутствии, на основании соображений, изложенных в предыдущем параграфе.

Отдел II

СЛОЖНЫЕ СЛУЧАИ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ

Глава IV

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ ПО ДОПУСКАЕМЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

§ 18. Статически неопределимые системы

Умение вычислять деформации стержней при растяжении и сжатии дает нам возможность установить, насколько изменяются формы и размеры частей конструкций при действии внешних сил. Обычно эти изменения формы настолько незначительны, что кажутся лишенными практического значения.

Однако есть целый класс конструкций, для которых проверка прочности и определение сечения отдельных элементов невозможны без умения определять деформации; это так называемые *статически неопределимые* конструкции (системы); нахождение усилий в их элементах представляет собой *статически неопределимую задачу*.

Во всех примерах, которые мы рассматривали до сих пор, усилия, растягивающие или сжимающие стержни, определялись из условий статики твердого тела.

Так, в случае подвески груза Q на двух стержнях (рис. 31) AB и AC мы находим усилия N_1 и N_2, растягивающие эти стержни, из условия равновесия точки A. Три силы, приложенные в точке A, должны удовлетворять двум уравнениям равновесия, а именно: сумма проекций этих сил на каждую из двух координатных осей должна равняться нулю. Таким образом, число неизвестных (два) равно числу уравнений (два), и усилия N_1 и N_2 их этих уравнений могут быть найдены. Эта задача — статически определимая.

Иначе будет обстоять дело, если груз Q будет подвешен на трех стержнях (рис. 32). В этом случае точка A находится в равновесии под действием четырех сил: Q, N_3, N_1 и N_2, причем при последние являются неизвестными. Уравнений же равновесия можно написать по-прежнему лишь два. Таким образом, число неизвестных на единицу больше числа уравнений — конструкция один раз статически неопределима, и задача не может быть решена только с помощью уравнений статики.

Необходимое для решения задачи дополнительное уравнение можно составить, пользуясь теми представлениями о свойствах

материалов, которые мы получили, переходя от теоретической механики к сопротивлению материалов. Речь идет об учете деформируемости материала. Дополнительное уравнение мы сможем найти, изучая те деформации, которые испытывает конструкция. Оказывается, что *всегда* можно найти столько дополнительных уравнений, сколько нам нужно, чтобы полное число уравнений вместе с условиями статики равнялось числу неизвестных.

Эти дополнительные уравнения составляются на основании одного общего принципа, они должны выразить *условия совместности деформаций* системы.

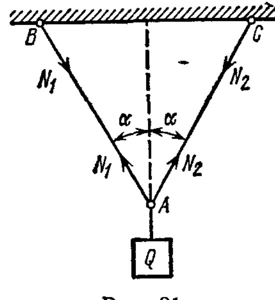


Рис. 31.

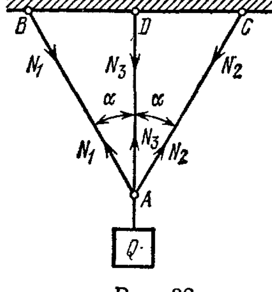


Рис. 32.

Всякая конструкция деформируется так, что не происходит разрывов стержней, разъединения их друг от друга, или не предусмотренных схемой сооружения перемещений одной части конструкции относительно другой. В этом и заключается *совместность деформаций* элементов системы.

Общий метод расчета статически неопределимых систем таков. Сначала следует выяснить, какие усилия необходимо определить; затем написать все уравнения статики твердого тела; после этого — составить дополнительные уравнения в таком числе, чтобы можно было найти все неизвестные усилия.

Ход решения выясним на взятом частном примере (рис. 32). Пусть крайние стержни, имеющие равные площади поперечных сечений,— стальные, средний же стержень — медный. Длина среднего стержня l_3, крайних l_1; допускаемые напряжения для стали пусть будут $[\sigma_c]$, а для меди $[\sigma_м]$. Требуется установить прочные размеры поперечных сечений этих стержней под действием подвешенного к ним груза Q.

Прежде всего установим силы, действующие на каждый из трех стержней. Так как в точках A, B, C и D имеются шарниры, все три стержня могут подвергаться только *осевым* усилиям. Считаем эти усилия растягивающими; для их определения мы должны рассмотреть равновесие точки A, к которой приложена единственная известная сила Q. Схема действия сил на точку и расположение

координатных осей даны на рис. 33. Приравниваем нулю суммы проекций на координатные оси сил, действующих на точку A:

$$N_2 \sin\alpha - N_1 \sin\alpha = 0,$$
$$Q - N_3 - N_1 \cos\alpha - N_2 \cos\alpha = 0.$$

Из первого уравнения получаем $N_1 = N_2$; подставляя вместо N_2 во второе уравнение величину N_1, получаем

$$N_3 + 2N_1 \cos\alpha = Q. \qquad (4.1)$$

Теперь у нас осталось *одно* уравнение *с двумя* неизвестными.

Для получения дополнительного уравнения мы должны обратиться к изучению деформаций нашей конструкции. Под действием силы Q все три стержня удлинятся и точка A опустится. Так как усилия N_1 и N_2 равны между собой и стержни *1* и *2* из одного материала, то при равных длинах стержней их удлинения Δl_1 и Δl_2 будут одинаковы, точка A опустится по вертикали вниз. Удлинение третьего стержня назовем Δl_3.

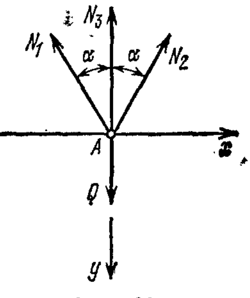


Рис. 33.

Изменения длин всех трех стержней будут совместны, т. е. и после деформации стержни остаются соединенными в точке A. Для нахождения нового положения этой точки разъединим в ней стержни и изобразим на чертеже (рис. 34) новые длины крайних стержней CC_2 и BB_2, увеличив их старую длину на величины $\Delta l_1 = AB_2$ и $\Delta l_2 = AC_2$. Для того чтобы найти новое положение точки A, необходимо свести вместе удлиненные стержни CC_2 и BB_2, вращая их вокруг точек B и C. Точки B_2 и C_2 совпадут в точке A_1, двигаясь по дугам C_2A_1 и B_2A_1, которые вследствие малости деформаций можно принять за прямые отрезки, *перпендикулярные* к CC_2 и BB_2.

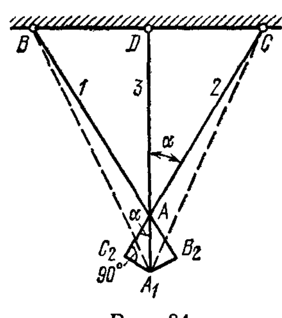


Рис. 34.

Новое положение крайних стержней BA_1 и CA_1 показано пунктиром. Так как конец среднего стержня тоже прикреплен к шарниру, то и он перейдет в точку A_1, и удлинение Δl_3 будет равно отрезку AA_1.

Удлинения всех трех стержней Δl_1, Δl_2 и Δl_3 по закону Гука будут пропорциональны усилиям, растягивающим эти стержни. Найдя из чертежа зависимость между этими удлинениями, мы получим добавочное уравнение, связывающее между собой неизвестные усилия в стержнях. Из треугольника A_1AB_2 имеем

$$AB_2 = AA_1 \cos\alpha, \quad \text{или} \quad \Delta l_1 = \Delta l_3 \cos\alpha. \qquad (4.2)$$

Выразим Δl_1 и Δl_3 через усилия N_1 и N_3. Для этого необходимо знать площади этих стержней. Здесь мы подходим к важной особенности статически неопределимых систем: *для нахождения усилий в стержнях необходимо предварительно задаваться размерами их поперечных сечений или их отношениями.*

Пусть площади сечений стержней будут F_1 и F_3; модуль упругости стали обозначим $E_с$ и модуль упругости меди $E_м$. Тогда

$$\Delta l_1=\frac{N_1 l_1}{E_с F_1};\quad \Delta l_3=\frac{N_3 l_3}{E_м F_3}. \tag{4.3}$$

Подставляя эти значения Δl_1 и Δl_3 в уравнение (4.2), получаем

$$\frac{N_1 l_1}{E_с F_1}=\frac{N_3 l_3}{E_м F_3}\cos\alpha.$$

Так как из треугольника ABD (рис. 34) следует, что

$$l_3=l_1\cos\alpha,$$

то

$$N_1=N_3\frac{E_с F_1}{E_м F_3}\cos^2\alpha. \tag{4.4}$$

Таким образом, путем рассмотрения совместности деформаций системы получено дополнительное уравнение, связывающее N_1 и N_3.

Условие совместности деформаций имело место и в статически определимых конструкциях, но там оно не налагало никаких ограничений на распределение усилий; для таких конструкций возможна только одна система усилий, удовлетворяющая условиям равновесия; так как там число неизвестных равно числу уравнений статики, соответствующая система деформаций удовлетворяет и условиям совместности. Например, для конструкции, изображенной на рис. 31, усилия в стержнях вполне определяются при малых деформациях из условий равновесия точки A; оба стержня могут получить вызываемые этими усилиями удлинения без нарушения связи их друг с другом,— условие совместности деформаций будет выполнено автоматически.

Наоборот, в статически неопределимых конструкциях может быть сколько угодно систем усилий, для которых выполнены уравнения равновесия, так как число неизвестных *больше* числа этих уравнений; условие совместности деформаций отбирает из всех этих возможных комбинаций усилий ту комбинацию, которая будет иметь место в действительности.

В статически неопределимой системе (рис. 32) положение точки A после деформации связывает между собой удлинения всех трех стержней; чтобы была соблюдена совместность деформаций, необходимо, чтобы эти удлинения находились между собой в определенном отношении; это условие и дает добавочное уравнение (4.4) для определения неизвестного усилия.

Продолжая решение нашей задачи, подставляем из (4,4) значение N_1 в уравнение (4.1) и получаем

$$N_3+2N_3\frac{E_cF_1}{E_мF_3}\cos^3\alpha=Q.$$

Отсюда

$$N_3=\frac{Q}{1+2\frac{E_cF_1}{E_мF_3}\cos^3\alpha} \tag{4.5}$$

и из (4.4)

$$N_1=\frac{Q\frac{E_cF_1}{E_мF_3}\cos^2\alpha}{1+2\frac{E_cF_1}{E_мF_3}\cos^3\alpha}=N_2. \tag{4.6}$$

Из полученных формул видно, что величина усилий N зависит не от абсолютных величин площадей F и модулей E, а от их *отношений*. Задаваясь различными соотношениями $n=F_1/F_3$, мы будем получать различные комбинации усилий N_1, N_2, N_3.

По величинам этих усилий и допускаемым напряжениям можно теперь найти и сами величины F_1 и F_3 из условий, что

$$\frac{N_1}{F_1}\leqslant[\sigma_c]; \quad \frac{N_3}{F_3}\leqslant[\sigma_м]. \tag{4.7}$$

Определив из первого условия F_1 и зная выбранную нами величину $n=F_1/F_3$, находим $F_3=F_1/n$. Затем проверяем, удовлетворяет ли она второму из условий (4.7); если нет, то из этого условия находим F_3, а F_1 определяем формулой

$$F_1=nF_3. \tag{4.8}$$

Таким образом, в *статически неопределимой системе при данной нагрузке* мы можем осуществить *много вариантов распределения усилий* между стержнями, меняя соотношение площадей поперечных сечений стержней. Для дальнейшего разъяснения возьмем числовой пример.

Пусть $Q=4$ *Т*; $\alpha=30°$; $[\sigma_c]=1000$ *кГ/см²*; $E_c=2\cdot10^6$ *кГ/см²*; $[\sigma_м]=600$ *кГ/см²*; $E_м=1\cdot10^6$ *кГ/см²*.

Для предварительного подсчета выбираем

$$n=\frac{F_1}{F_3}=1.$$

Тогда

$$N_1=N_2=\frac{4\frac{2\cdot10^6}{1\cdot10^6}\cos^2 30°}{1+2\frac{2\cdot10^6}{1\cdot10^6}\cos^3 30°}=1{,}67\ T,$$

$$N_3=\frac{4}{1+2\frac{2\cdot10^6}{1\cdot10^6}\cos^3 30°}=1{,}11\ T.$$

Из условий прочности получаем

$$F_1=\frac{N_1}{[\sigma_c]}=\frac{1670}{1000}=1,67\ см^2.$$

Так как мы приняли, что $F_1=F_3$, то $F_3=1,67$ $см^2$.

Проверим, будет ли при таких условиях удовлетворено условие прочности для среднего стержня:

$$\frac{N_3}{F_3}=\frac{1110}{1,67}=667\ кГ/см^2>600\ кГ/см^2.$$

Принятая площадь F_3 мала; необходимо взять

$$F_3=\frac{N_3}{[\sigma_м]}=\frac{1110}{600}=1,85\ см^2.$$

Для того чтобы было соблюдено положенное в основу нашего расчета условие $F_1=F_3$, мы должны принять $F_1=F_3=1,85$ $см^2$ вместо необходимой из первого условия величины 1,67 $см^2$. Таким образом, в крайних стержнях мы имеем дополнительный запас.

Если бы мы захотели избежать этого излишнего запаса и приняли бы

$$F_1=F_2=1,67\ см^2;\quad F_3=1,85\ см^2, \tag{4.9}$$

то сейчас же изменились бы усилия N_1, N_2 и N_2; отношение F_1/F_3 было бы равно уже не 1, как было раньше принято, а 0,9. В формуле (4.5) знаменатель уменьшится и N_3 увеличится; в формуле же (4.6) знаменатель уменьшится в меньшей степени, чем числитель, поэтому N_1 и N_2 уменьшатся.

Уменьшая площадь крайних стержней по отношению к площади среднего, мы *уменьшаем* усилия в этих крайних элементах и увеличиваем усилие в среднем стержне.

Здесь отражается общий закон, характеризующий распределение усилий между стержнями в статически неопределимых системах,— эти усилия распределяются соответственно жесткости стержней; *чем больше площадь данного стержня, тем бо́льшую долю усилия он на себя берет, и наоборот.*

Если мы будем площади F_1 и F_2 приближать к нулю, то и усилия N_1 и N_2 будут приближаться к нулю, а N_3 к Q. Если же будем уменьшать площадь F_3, то N_3 будет уменьшаться, а N_1 и N_2 — увеличиваться.

При отношении $n=0,9$ [формула (4.8)] $N_1=N_2=1,60$ T; $N_3=1,20$ T. Это потребует $F_3=2,0$ $см^2$ и $F_1=1,8$ $см^2$ вместо требуемой по условию прочности для стальных стержней 1,6 $см^2$.

Если бы мы приняли для крайних стержней $F_1=1,6$ $см^2$, то отношение n вновь уменьшилось бы, и средний стержень оказался бы опять перенапряженным. Поэтому приходится опять мириться с запасом в крайних стержнях. Из формулы (4.4) вытекает, что подобрать соотношение площадей $n=F_1/F_3$ так, чтобы напряжение во

всех стержнях было равно допускаемому, можно лишь при *определенном значении угла* α. В самом деле, если бы нам удалось назначить площади F точно по допускаемым напряжениям, то мы имели бы соотношения

$$N_1 = F_1[\sigma_c]; \quad N_3 = F_3[\sigma_м]. \tag{4.10}$$

Подставляя эти величины в равенство (4.4), получаем

$$F_1[\sigma_c] = F_3[\sigma_м]\frac{E_cF_1}{E_мF_3}\cos^2\alpha. \tag{4.11}$$

Отсюда имеем

$$\cos^2\alpha = \frac{[\sigma_c]}{[\sigma_м]}\cdot\frac{E_м}{E_c}, \tag{4.12}$$

т. е. для возможности подбора сечений стержней без излишнего запаса при всяком n необходимо, чтобы $\cos\alpha$ удовлетворял условию (4.12).

При наших данных получаем

$$\cos^2\alpha = \frac{1000\cdot 1\cdot 10^6}{600\cdot 2\cdot 10^6} \quad \text{и} \quad \alpha = 24°.$$

Так как в нашей конструкции $\alpha=30°$, то при *всяком* n мы вынуждены будем или давать запас в одной группе стержней или идти на перенапряжение для другой группы. Саму же величину n надо выбирать так, чтобы получить наиболее экономичное решение. В таблице 6 даны результаты подсчета для различных n. Зная

Таблица 6

Результаты расчетов при различных значениях n

$n=\frac{F_1}{F_3}$	$N_1=N_2$, T	N_3, T	$F_1=F_2$, $см^2$		F_3, $см^2$
			необходимая	принятая	
0,8	1,56	1,30	1,56	1,74	2,17
0,9	1,60	1,20	1,60	1,80	2,00
1,0	1,67	1,11	1,67	1,85	1,85
1,2	1,75	0,97	1,75	1,94	1,62
1,5	1,83	0,82	1,83	2,06	1,37

площади, длины и материал стержней, можно выбрать комбинацию, дающую наиболее экономичное решение в зависимости от стоимости материала.

§ 19. Влияние неточностей изготовления на усилия в элементах статически неопределимых конструкций

В предыдущих параграфах мы установили особенности работы и расчета статически неопределимых систем.

1. Недостающие для определения усилий уравнения могут быть получены *только* при помощи изучения совместности деформаций данной системы.

2. Распределение усилий между элементами статически неопределимой конструкции зависит от соотношения между площадями, модулями упругости и длинами этих элементов.

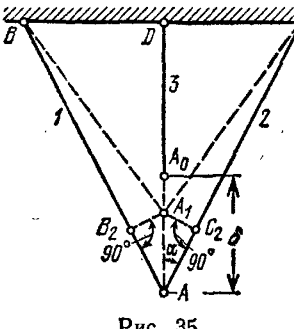


Рис. 35.

3. Чем более жёсток данный элемент, т. е. чем меньше его длина и больше площадь и модуль упругости, тем сравнительно бо́льшую долю усилия он принимает на себя.

В настоящем параграфе мы рассмотрим еще одно важное для практики свойство статически неопределимых конструкций.

При изготовлении всякого рода сооружений нельзя обеспечить абсолютно точного выполнения размеров их частей; всегда надо считаться с возможностью тех или иных небольших неправильностей при их изготовлении. Если мы имеем дело со статически определимой системой, то такие неточности не вызовут никаких напряжений в этой системе. Так, например, если стержень AB (рис. 31) будет сделан немного короче, чем предполагалось по чертежу, то это поведет за собой лишь легкое искажение треугольника CAB. При отсутствии силы Q усилия в стержнях AB и AC будут равны нулю независимо от того, с какой точностью исполнены длины этих стержней.

Совсем иначе поведет себя статически неопределимая конструкция, изображенная на рис. 32. Пусть средний стержень будет сделан короче, чем следует, на длину $AA_0=\delta$ (рис. 35). Чтобы соединить конец среднего стержня A_0 с концами A крайних стержней где-то в точке A_1, необходимо средний стержень растянуть на длину $\Delta l_3=A_0A_1$, а крайние сжать на длину $\Delta l_1=AB_2=AC_2$. Проводя в точках C_2 и B_2 перпендикуляры к первоначальным положениям крайних стержней, как описано в § 18, получаем точку соединения концов всех трех стержней A_1. Из чертежа получаем уравнение совместности деформаций стержней:

$$A_0A=A_0A_1+A_1A,$$

или

$$\delta=\Delta l_3+\frac{\Delta l_1}{\cos\alpha}. \tag{4.13}$$

Так как внешних нагрузок нет и усилие N_1 — сжимающее, а N_3 — растягивающее, то уравнение равновесия (4.1) принимает вид

$$N_3 - 2N_1 \cos\alpha = 0. \qquad (4.14)$$

Заменяя в уравнении (4.13) величины Δl_1 и Δl_3 их значениями

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_c F_1} \quad \text{и} \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_м F_3} = \frac{N_3 l_1 \cos\alpha}{E_м F_3}$$

и решая совместно (4.13) и (4.14), получаем

$$N_3 = \frac{\delta E_м F_3}{l_3\left[1 + \frac{E_м F_3}{2E_c F_1 \cos^3\alpha}\right]}; \quad N_1 = \frac{N_3}{2\cos\alpha}. \qquad (4.15)$$

Знак плюс перед значениями усилий N_1 и N_3 показывает, что наши предположения об их направлении правильны.

Отметим, что в формулу (4.3) можно подставлять взамен длины среднего стержня величину l_3, а не $l_3 - \delta$, ввиду малости δ по сравнению с l_3. Это упрощение всегда следует применять при расчете на неточность изготовления.

Приведенный расчет показывает, что неточности изготовления влекут за собой напряжения в стержнях *даже при отсутствии внешних воздействий на конструкцию*. Таким образом, возможность появления так называемых *начальных* напряжений тоже является основным свойством статически неопределимых конструкций.

Если все три стержня будут сделаны из одного материала и одинаковой площади, то при действии груза Q (рис. 32) растягивающее усилие в среднем стержне будет больше, чем в крайних (4.4); наличие рассмотренной неточности изготовления вызывает добавочное растягивающее усилие в среднем и сжимающие усилия в крайних стержнях; в этом примере наличие начальных напряжений *усиливает неравномерность* работы стержней и является поэтому вредным.

Если бы мы сделали средний стержень длиннее, чем следовало, на величину δ, то начальные напряжения изменили бы знак и несколько *выравняли* бы неравномерность распределения усилий между средним и крайними стержнями под нагрузкой Q. В этом случае рассмотренное свойство статически неопределимых систем было бы использовано для улучшения работы конструкции.

Другим примером целесообразного использования начальных напряжений является посадка бандажей на колеса подвижного состава. Эти колеса состоят из двух частей: средней отливки — колесного центра и стального кованого кольца, надеваемого на центр,— бандажа (рис. 36, *а* и *б*). Для закрепления бандажа на центре применяют специальные приспособления; кроме того, его внутренний диаметр d_2 делают несколько меньше диаметра d_1; обычно эта разница составляет $\frac{1}{n} d_1$ — около $\frac{1}{2000} d_1$. При надевании бандажа на ко-

лесный центр его нагревают настолько, чтобы внутренний диаметр его стал больше диаметра центра; надетый бандаж, охлаждаясь, будет стремиться сжаться и будет стягивать центр. В бандаже возникает растягивающее усилие N, а между бандажом и центром — реакция p (рис. 36, б). Если мы разрежем бандаж по диаметру (рис. 37), то две силы N должны уравновешивать сумму давлений на внутреннюю поверхность отрезанной части бандажа. Составим

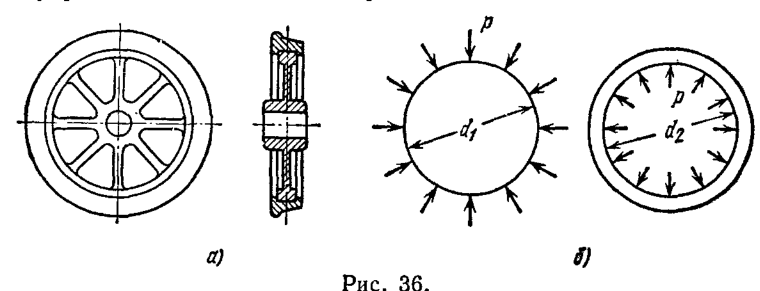


Рис. 36.

условие равновесия, проектируя все силы на ось y (рис. 37); на элемент длины бандажа ds действует давление $p\,ds$; его проекция на ось y равна $-p\,ds\sin\alpha = -p\frac{d}{2}\sin\alpha\,d\alpha$, так как $ds=\frac{d}{2}d\alpha$.

Условие равновесия принимает вид

$$2N-\int\limits_{ABC} p\frac{d}{2}\sin\alpha\,d\alpha=0,\quad \text{или}\quad 2N-\frac{pd}{2}\int\limits_0^{\pi}\sin\alpha\,d\alpha=0.$$

Отсюда

$$2N-pd=0\quad \text{и}\quad N=\frac{pd}{2},\quad \text{или}\quad p=\frac{2N}{d}.$$

Таким образом, для двух неизвестных N и p мы имеем одно уравнение статики; задача статически неопределима. Для нахождения неизвестных усилий необходимо учесть совместность деформаций конструкции.

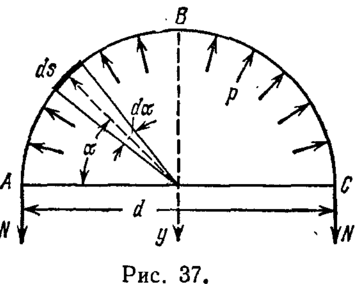


Рис. 37.

Растяжение бандажа и сжатие центра должны быть таковы, чтобы уравнялась разница в диаметрах d_1 и d_2. Пренебрегая деформацией центра ввиду его массивности по сравнению с бандажом, получаем, что все уравнивание разницы в диаметрах пойдет за счет удлинения бандажа. Если эта разница составляет $1/n$ долю диаметра бандажа, то относительное удлинение ε_n диаметра, а стало быть, и всего бандажа будет тоже $1/n$.

Относительное удлинение бандажа от усилия N будет $\varepsilon_N = N/(EF)$, где F — площадь поперечного сечения бандажа. Приравнивая эти значения $\varepsilon_n = \varepsilon_N$, получаем добавочное уравнение

$$\frac{N}{EF} = \frac{1}{n}; \quad N = \frac{EF}{n} \quad \text{и} \quad p = \frac{2EF}{nd}. \qquad (4.16)$$

Напряжение в бандаже равно $\sigma = N/F = E/n$.

В формулу (4.16) вместо d можно подставлять (вместо начального диаметра бандажа d_2) диаметр центра d_1, так как обе эти величины отличаются друг от друга чрезвычайно мало.

Возьмем числовой пример (бандаж товарного вагона шириной 13 *см* и толщиной 7,5 *см*). Пусть $d = d_1 = 900$ *мм*; $1/n = 1/1000$; $E = 2 \cdot 10^6$ *кГ/см*²; $F = 7{,}5 \cdot 13 = 97{,}5$ *см*². Тогда получаем

$$\sigma = \frac{2 \cdot 10^6}{1000} = 2000 \text{ кГ/см}^2,$$

$$N = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 97{,}5}{1000} = 195\,000 \text{ кГ} = 195 \text{ Т},$$

$$p = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 97{,}5}{90 \cdot 1000} = 4330 \text{ кГ/см}.$$

§ 20. Расчет на растяжение и сжатие стержней, состоящих из разнородных материалов

Этот вид стержней относится к категории статически неопределимых. В качестве примера рассмотрим определение размеров сжатого силами P составного стержня (рис. 38), состоящего из центрального стального сердечника круглого поперечного сечения с диаметром $d_с$, находящегося внутри бронзовой рубашки с наружным диаметром $d_б$, и с толщиной стенки t.

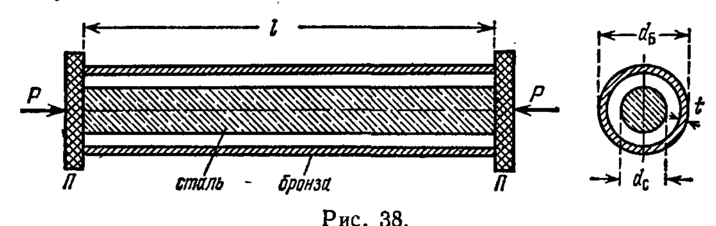


Рис. 38.

Введем следующие обозначения: $F_б$ — площадь поперечного сечения бронзовой трубки; $F_с$ — площадь поперечного сечения стального сердечника; $[\sigma_б]$, $[\sigma_с]$, $E_б$, $E_с$ — допускаемые напряжения и модули упругости для бронзы и стали соответственно.

Пусть требуется определить поперечные размеры стержня так, чтобы он мог взять на себя нагрузку P.

Найдем напряжения $\sigma_б$ и $\sigma_с$, возникающие от нагрузки P по площадям $F_б$ и $F_с$, и составим условия прочности.

Силы P, приложенные в центре тяжести сечения через жесткие плиты $П$, деформацией которых мы пренебрегаем (см. рис. 38), сжимают стержень вдоль его оси. Часть $P_б$ сжимающих стержень сил передается через бронзовую рубашку, часть P_c — через стальной сердечник (рис. 39). Для нахождения этих двух сил, вызывающих напряжения в сердечнике и рубашке, мы имеем лишь одно условие статики

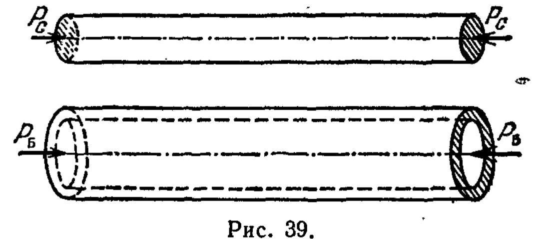


Рис. 39.

$$P_c+P_б=P. \tag{4.17}$$

Задача является статически неопределимой; второе уравнение получается из рассмотрения условий совместности деформаций с учетом того, что как бронзовая, так и стальная части стержня (рис. 39) укоротятся на одну и ту же величину Δl, так как боковые плоскости обеих частей совпадают. По закону Гука имеем

$$\Delta l=\frac{P_б l}{E_б F_б}=\frac{P_c l}{E_c F_c}, \tag{4.18}$$

это и будет второе уравнение, связывающее $P_б$ и P_c. Из (4.18) находим

$$P_c=P_б\frac{F_c E_c}{F_б E_б};$$

подставляя это значение P_c в уравнение (4.17), получаем

$$P_б\left(1+\frac{F_c}{F_б}\cdot\frac{E_c}{E_б}\right)=P$$

и

$$P_б=\frac{P}{1+\frac{F_c}{F_б}\cdot\frac{E_c}{E_б}};\quad P_c=\frac{P\frac{F_c}{F_б}\cdot\frac{E_c}{E_б}}{1+\frac{F_c}{F_б}\cdot\frac{E_c}{E_б}}=\frac{P}{1+\frac{F_б}{F_c}\cdot\frac{E_б}{E_c}}, \tag{4.19}$$

$$\sigma_б=\frac{P}{F_б+F_c\frac{E_c}{E_б}};\quad \sigma_c=\frac{P}{F_c+F_б\frac{E_б}{E_c}}. \tag{4.20}$$

Распределение усилий между элементами в статически неопределимых системах зависит от отношения площадей этих элементов и их модулей упругости. Из уравнения же (4.18), учитывая, что

$$\frac{P_б}{F_б}=\sigma_б \quad и \quad \frac{P_c}{F_c}=\sigma_c,$$

получаем, что отношение напряжений в бронзе и стали зависит лишь от отношения модулей

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_б}=\frac{E_c}{E_б};$$

напряжения распределяются прямо пропорционально модулям упругости. Если взять средние значения модулей (см. таблицу 1) $E_c=2\cdot10^6$ *кГ/см*^{2} и $E_б=1\cdot10^6$ *кГ/см*^{2}, то напряжение в стальном сердечнике будет при любой нагрузке в *два* раза больше, чем напряжение в бронзовой рубашке. Допускаемые же напряжения для стали обычно раза в *три* больше, чем допускаемые напряжения для бронзы. Поэтому, если напряжения в бронзовой трубке будут равны допускаемым для бронзы, то напряжения в стальном сердечнике будут *ниже* допускаемых для стали. Таким образом, размеры стержня должны определяться по условию прочности для бронзовой трубки:

$$\sigma_б=\frac{P}{F_б+F_c\frac{E_c}{E_б}}=\frac{P}{F_б\left(1+\frac{E_c}{E_б}\cdot\frac{F_c}{F_б}\right)}\leqslant[\sigma_б]. \qquad (4.21)$$

Пусть $P=25$ *Т*. Отношением площадей $F_c/F_б$ обычно задаются из конструктивных соображений. Возьмем $F_c/F_б=2$, а допускаемое напряжение $[\sigma_б]=500$ *кГ/см*^{2}. Тогда уравнение (4.21) примет вид

$$\frac{25\,000}{F_б(1+2\cdot2)}\leqslant500,$$

откуда

$$F_б\geqslant\frac{25\,000}{5\cdot500}=10\ см^2 \quad и \quad F_c=2\cdot10=20\ см^2.$$

Диаметр стального сердечника получим из условия

$$\frac{\pi d_c^2}{4}\geqslant F_c, \quad откуда \quad d_c=\sqrt{\frac{4F_c}{\pi}}=\sqrt{\frac{4\cdot20}{3,14}}=5,05\ см\approx51\ мм.$$

Размеры сечения бронзовой рубашки можем получить, задавшись из конструктивных соображений ее толщиной t. Пусть $t=5$ *мм* $=0,5$ *см*. Тогда, применяя для кольца приближенную формулу, имеем

$$F_б\leqslant\pi d_б t, \quad откуда \quad d_б\geqslant\frac{F_б}{\pi t}=\frac{10}{3,14\cdot0,5}=6,48\ см\approx65\ мм.$$

Вычисление деформаций для таких конструкций ведется по общим правилам. Так как укорочение бронзовой и стальной частей стержня одинаково, то безразлично, какой формулой в равенстве (4.18) воспользоваться для вычисления Δl.

§ 21. Напряжения, возникающие при изменении температуры

В статически неопределимых системах возникают напряжения при отсутствии внешних нагрузок не только от неточностей изготовления и сборки, но и от изменения температуры.

Довольно значительные напряжения этого типа получаются в рельсах, сваренных в одну непрерывную линию. При изменении температуры рельсов по отношению к той, при которой была произведена сварка, в них возникают либо растягивающие, либо сжимающие напряжения. Эту задачу можно схематизировать в таком виде: дан стержень, защемленный неподвижно концами при температуре t_1; найти, какие возникнут в нем напряжения при изменении температуры до t_2 (рис. 40). Длина стержня l, площадь поперечного сечения F, модуль упругости E.

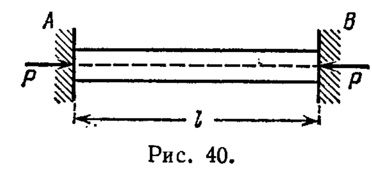


Рис. 40.

Выясним, какие силы будут действовать на стержень, если температура повысится от t_1 до t_2. Стержень в таком случае стремится удлиниться и будет распирать опоры A и B. Со стороны этих опор на стержень будут действовать реакции, направленные, как показано на чертеже. Эти силы и будут вызывать *сжатие* стержня.

Их величины нельзя найти из условий статики, так как единственное условие равновесия дает нам, что реакции опор в точках A и B равны и прямо противоположны. Величина же реакций P остается неизвестной, и конструкция оказывается статически неопределимой.

Для составления дополнительного уравнения учтем, что длина l стержня, закрепленного концами, остается и при нагревании неизменной; значит, укорочение Δl_p, вызываемое силами P, равно по абсолютной величине тому температурному удлинению Δl_t, которое стержень получил бы, если бы опора A осталась на месте, а конец B стержня был бы освобожден и мог бы перемещаться при нагревании. Значит,

$$\Delta l_t - \Delta l_P = 0. \qquad (4.22)$$

Это и будет *условие совместности деформаций*, оно указывает на то, что и после повышения или понижения температуры длина стержня не изменилась — он не оторвался от неподвижных опор. Так как

$$\Delta l_P = \frac{Pl}{EF} \quad \text{и} \quad \Delta l_t = \alpha l (t_2 - t_1),$$

где α — коэффициент линейного температурного расширения материала стержня, то

$$\frac{Pl}{EF} = \alpha l (t_2 - t_1)$$

и

$$\frac{P}{F}=\sigma=\alpha E\,(t_2-t_1), \tag{4.23}$$

т. е. напряжение, вызванное изменением температуры в стержне *постоянного* сечения с жестко защемленными концами, зависит лишь от модуля упругости материала, его коэффициента линейного расширения, разности температур и не зависит ни от его длины, ни от площади поперечного сечения.

Сила P равна

$$P=\alpha EF\,(t_2-t_1).$$

В рассматриваемом примере при $t_2>t_1$ напряжение σ будет сжимающим, так как направление реакций P внутрь стержня здесь принято положительным. Если придерживаться обычно применяемого обозначения сжимающих напряжений знаком минус, а растягивающих знаком плюс, то для автоматического получения знака напряжений формула (4.23) должна быть написана так:

$$\sigma=\alpha E\,(t_1-t_2).$$

Когда поперечное сечение стержня *не постоянно* по его длине или он сделан из разных материалов, когда конструкция опор дает ему возможность *несколько* изменить свою длину, или эти условия имеют место одновременно, метод определения температурных напряжений, в основе своей оставаясь прежним, имеет все же ряд особенностей.

Переменность сечения и различие в материалах необходимо учесть при подсчете Δl, определяя его суммированием подсчетов, сделанных по каждому отдельному участку. Возможность для стержня несколько изменить свою длину отразится в уравнении совместности деформаций (4.22); разность деформаций, температурной и вызванной силами, в этом случае не будет равна нулю, а будет равна той величине, на которую наш стержень имеет возможность удлиниться.

Рис. 41.

В качестве примера рассмотрим стальной стержень, состоящий из двух частей длиной $l_1=40$ *см* и $l_2=60$ *см* и площадью соответственно $F_1=10$ *см*^{2} и $F_2=20$ *см*^{2}, защемленный одним концом; другой конец не доходит до опоры на величину $\Delta_0=0{,}3$ *мм* (рис. 41). Найти напряжения в обеих частях при повышении температуры на $t=50°$C, если $\alpha=125\cdot 10^{-7}$.

Повышение температуры вызывает удлинение стержня Δl_t, а сжатие его реакциями опор P — укорочение Δl_P. Разность этих двух деформаций (по абсолют-

ной величне) равна Δ_0 (см. рис. 41):

$$\Delta l_t - \Delta l_P = \Delta_0;$$

это и будет условие совместности деформаций. Величины Δl_t и Δl_P соответственно равны

$$\Delta l_t = \alpha t\,(l_1 + l_2); \quad \Delta l_P = \frac{Pl_1}{EF_1} + \frac{Pl_2}{EF_2} = \frac{Pl_1}{EF_1}\left[1 + \frac{l_2F_1}{l_1F_2}\right];$$

поэтому

$$\alpha t\,(l_1 + l_2) - \frac{Pl_1}{EF_1}\left[1 + \frac{l_2F_1}{l_1F_2}\right] = \Delta_0.$$

Отсюда

$$P = \frac{[\alpha t\,(l_1 + l_2) - \Delta_0]\,EF_1}{l_1\left[1 + \frac{l_2F_1}{l_1F_2}\right]} = \frac{[125\cdot 10^{-7}\cdot 100\cdot 50 - 0{,}03]\,2\cdot 10^6\cdot 10}{40\left[1 + \frac{60\cdot 10}{40\cdot 20}\right]} = 9300\ кГ.$$

Напряжение в верхней части равно $\sigma' = P/F_1 = 9300/10 = 930$ *кГ/см*^{2}; в нижней части $\sigma'' = P/F_2 = 9300/20 = 465$ *кГ/см*^{2} (оба напряжения — сжимающие).

Если бы зазора Δ_0 не было, то усилие и напряжения возросли бы в 1,92 раза.

§ 22. Одновременный учет различных факторов

Иногда в статически неопределимых конструкциях приходится одновременно учитывать влияние внешней нагрузки, изменения температуры и неточности изготовления. Решение таких задач возможно двумя путями: первый путь — это *одновременный* учет всех факторов. В этом случае в уравнение совместности деформаций должны быть включены члены, отражающие влияние всех этих обстоятельств (нагрузки, температуры, неточности изготовления). Полученные в результате расчета усилия и напряжения являются окончательными.

Второй путь расчета подобных конструкций заключается в *раздельном* учете усилий и напряжений, вызванных нагрузкой, температурой, неточностью изготовления. Решается как бы несколько отдельных задач, в каждой из которых учитывается *только один* из этих факторов. Окончательные усилия и напряжения определяются путем алгебраического *суммирования* этих величин, полученных при решении каждой из задач. Последний путь часто является более ясным и удобным, вызывая лишь небольшое увеличение количества выкладок. Он носит название *способа сложения действия сил*. Этот способ возможен благодаря применению так называемого *принципа независимости действия сил*. Дело в том, что при малых значениях деформации, вызванные какой-либо силой или группой сил, не влияют на деформации, вызванные другой силой или группой сил, или это влияние столь незначительно (на порядок меньше), что им можно пренебречь. Данный принцип неприменим для очень гибких или сильно деформирующихся конструкций типа тонких длинных стержней, мембран, резиновых деталей и других.

Для ознакомления с приемом одновременного учета различных факторов решим следующий числовой пример.

Три параллельных вертикальных стержня одинаковой длины $l=2$ *м* поддерживают жесткий брус AB, к которому приложена сила $P=4$ *Т* (рис. 42). Расстояния между стержнями и от среднего стержня до силы P соответственно равны $a=1{,}5$ *м*; $b=1$ *м* и $c=0{,}25$ *м*. Средний стержень выполнен короче проектного размера на $\delta=0{,}2$ *мм*. Данные о стержнях помещены в таблице 7.

Таблица 7

№ стержней	Материал	F, *см²*	E, *кГ/см²*	α
1	Медь	2	$1\cdot10^6$	$17\cdot10^{-6}$
2	Сталь	1	$2\cdot10^6$	$13\cdot10^{-6}$
3	Сталь	3	$2\cdot10^6$	$13\cdot10^{-6}$

Температура конструкции во время ее эксплуатации может повыситься на 20°С.

Определить напряжения в каждом из трех стержней.

Предположим, что усилия во всех стержнях N_1, N_2 и N_3 будут растягивающими. Равные им реакции точек подвеса стержней показаны на рис. 42. Уравнений

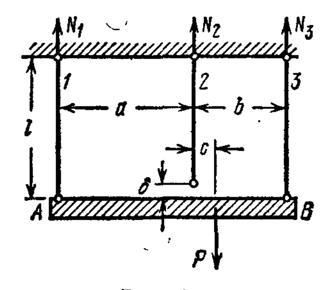


Рис. 42.

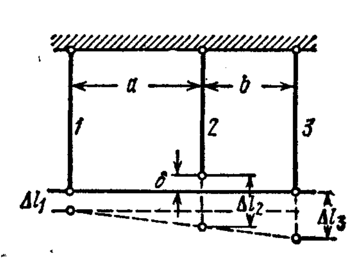


Рис. 43.

равновесия ввиду параллельности всех сил мы можем составить два. Первое — сумма проекций на вертикаль — имеет следующий вид:

$$N_1+N_2+N_3-P=0. \tag{4.24}$$

Для составления второго уравнения возьмем сумму моментов всех сил относительно точки подвеса второго стержня:

$$N_1a-N_3b+Pc=0. \tag{4.25}$$

Для определения трех неизвестных усилий этих двух уравнений равновесия недостаточно. Необходимо обратиться к рассмотрению деформаций. На рис. 43 показана схема деформаций нашей конструкции, составленная в предположении растягивающих усилий во всех стержнях. Из рассмотрения этой схемы можно составить следующее условие совместности деформаций:

$$\frac{\Delta l_3-\Delta l_1}{\Delta l_2-\Delta l_1-\delta}=\frac{a+b}{a}. \tag{4.26}$$

Значения входящих в это уравнение деформаций (с учетом влияния температуры) будут следующими:

$$\Delta l_1=\frac{N_1 l}{E_1F_1}+\alpha_1 l\,\Delta t;\quad \Delta l_2=\frac{N_2 l}{E_2F_2}+\alpha_2 l\,\Delta t;\quad \Delta l_3=\frac{N_3 l}{E_3F_3}+\alpha_3 l\Delta t.$$

Подставим эти значения деформаций в уравнение (4.26):

$$\frac{\frac{N_3 l}{E_3F_3}+\alpha_3 l\,\Delta t-\frac{N_1 l}{E_1F_1}-\alpha_1 l\,\Delta t}{\frac{N_2 l}{E_2F_2}+\alpha_2 l\Delta t-\frac{N_1 l}{E_1F_1}-\alpha_1 l\,\Delta t-\delta}=\frac{a+b}{a}. \tag{4.27}$$

Совместно решая уравнения (4.24), (4.25) и (4.27), определяем N_1, N_2 и N_3. Они будут равны

$$N_1=792\ кГ;\quad N_2=1020\ кГ \text{ и } N_3=2188\ кГ.$$

Если бы наше предположение о направлении усилий для какого-нибудь стержня оказалось ошибочным, то мы получили бы отрицательное значение этого усилия.

Теперь находим соответствующие напряжения:

в первом стержне $\sigma_1=\frac{N_1}{F_1}=\frac{792}{2}=396\ кГ/см^2$,

во втором стержне $\sigma_2=\frac{N_2}{F_2}=\frac{1020}{1}=1020\ кГ/см^2$,

в третьем стержне $\sigma_3=\frac{N_3}{F_3}=\frac{2188}{3}=729\ кГ/см^2$.

Эта же задача могла бы быть решена при раздельном учете влияний нагрузки, температуры и неточности изготовления с последующим алгебраическим суммированием напряжений. Результат был бы, конечно, такой же.

§ 23. Более сложные случаи статически неопределимых конструкций

Во всех рассмотренных статически неопределимых задачах число неизвестных усилий на единицу превышало число уравнений статики; это задачи один раз статически неопределимые; одно из неизвестных усилий может быть принято, как говорят, за лишнюю, не определяемую из уравнений статики неизвестную.

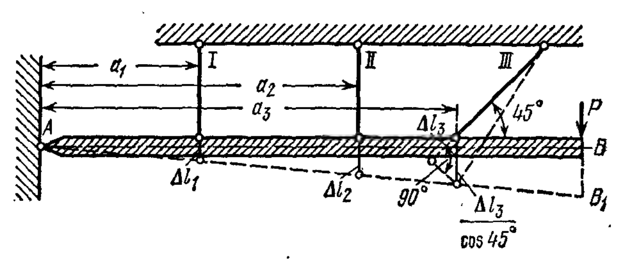


Рис. 44.

Могут быть случаи, когда таких лишних неизвестных будет несколько; тогда придется составить столько же дополнительных уравнений, рассматривая совместность деформаций системы. Это всегда возможно. Как пример можно указать кон-

струкцию, изображенную на рис. 44: очень жесткий стержень шарнирно прикреплен к неподвижной опоре, подвешен на трех стержнях и нагружен силой P.

Для стержня AB можно написать три уравнения равновесия; число же неизвестных будет пять: усилия в трех подвесках и вертикальная и горизонтальная составляющие реакции в шарнире A.

Дополнительные уравнения можно написать, рассматривая деформацию системы. Так как стержень AB мы считаем очень жестким, то его собственными деформациями можно пренебречь. Тогда он, оставаясь прямым, займет положение AB_1. Из подобия треугольников можно найти соотношения между Δl_1, Δl_2 и Δl_3, что и дает два дополнительных уравнения, а именно:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2}=\frac{a_1}{a_2} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta l_1}{\frac{\Delta l_3}{\cos 45^\circ}}=\frac{a_1}{a_3}.$$

Дальнейший ход решения задачи подобен рассмотренному выше (§ 18).

Глава V

УЧЕТ СОБСТВЕННОГО ВЕСА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ. РАСЧЕТ ГИБКИХ НИТЕЙ

§ 24. Подбор сечений с учетом собственного веса (при растяжении и сжатии)

При установлении внешних сил, растягивающих или сжимающих элементы конструкций, мы до сих пор игнорировали собственный вес этих элементов. Возникает вопрос, не вносится ли этим упрощением расчета слишком большая погрешность? В связи с этим подсчитаем величины напряжений и деформаций при учете влияния собственного веса растянутых или сжатых стержней.

Пусть вертикальный стержень (рис. 45, *а*) закреплен своим верхним концом; к нижнему его концу подвешен груз P. Длина стержня l, площадь поперечного сечения F, удельный вес материала γ и модуль упругости E. Подсчитаем напряжения по сечению AB, расположенному на расстоянии x от свободного конца стержня.

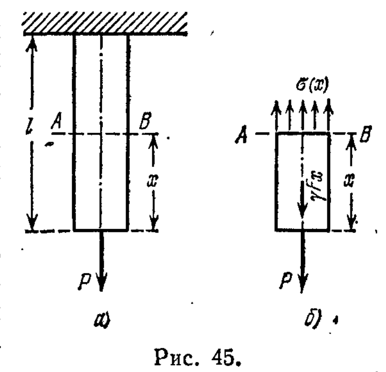


Рис. 45.

Рассечем стержень сечением AB и выделим нижнюю часть длиной x с приложенными к ней внешними силами (рис. 45, *б*) — грузом P и ее собственным весом γFx. Эти две силы уравновешиваются напряжениями, действующими на площадь AB от отброшенной части. Эти напряжения будут нормальными, равномерно распреде-

ленными по сечению и направленными наружу от рассматриваемой части стержня, т. е. растягивающими. Величина их будет равна

$$\sigma(x)=\frac{P+\gamma Fx}{F}=\frac{P}{F}+\gamma x. \qquad (5.1)$$

Таким образом, при учете собственного веса нормальные напряжения оказываются неодинаковыми во всех сечениях. Наиболее напряженным, *опасным*, будет верхнее сечение, для которого x достигает наибольшего значения l; напряжение в нем равно

$$\sigma_{\max}=\frac{P}{F}+\gamma l. \qquad (5.2)$$

Условие прочности должно быть выполнено именно для этого сечения:

$$\sigma_{\max}=\left(\frac{P}{F}+\gamma l\right)\leqslant[\sigma]. \qquad (5.3)$$

Отсюда необходимая площадь стержня равна

$$F\geqslant\frac{P}{[\sigma]-\gamma l}. \qquad (5.4)$$

От формулы, определяющей площадь растянутого стержня без учета влияния собственного веса, эта формула отличается лишь тем, что из допускаемого напряжения вычитается величина γl.

Чтобы оценить значение этой поправки, подсчитаем ее для двух случаев. Возьмем стержень из малоуглеродистой стали длиной 10 *м*; для него $[\sigma]=1600$ *кГ/см*², а величина $\gamma l = 7{,}85\cdot10^{-3}\cdot10^{3}=7{,}85$ *кГ/см*². Таким образом, для стержня из малоуглеродистой стали поправка составит 7,85/1600, т. е. около 0,5%. Теперь возьмем кирпичный столб высотой тоже 10 *м*; для него $[\sigma]=12$ *кГ/см*², а величина $\gamma l=1{,}8\cdot10^{-3}\cdot10^{3}=1{,}8$ *кГ/см*². Таким образом, для кирпичного столба поправка составит 1,8/12, т. е. уже 15%.

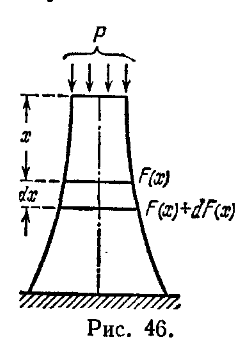


Рис. 46.

Вполне понятно, что влиянием собственного веса при растяжении и сжатии стержней можно пренебрегать, если мы не имеем дела с длинными стержнями или со стержнями из материала, обладающего сравнительно небольшой прочностью (камень, кирпич) при достаточном весе. При расчете длинных канатов подъемников, различного рода длинных штанг и высоких каменных сооружений (башни маяков, опоры мостовых ферм) приходится вводить в расчет и собственный вес конструкции.

В таких случаях возникает вопрос о целесообразной форме стержня. Если мы подберем сечение стержня (рис. 45) по формуле (5.4) и дадим одну и ту же площадь поперечного сечения по всей длине, то материал стержня будет плохо использован; нормальное напря-

жение в нем дойдет до допускаемого лишь в одном верхнем сечении; во всех прочих сечениях мы будем иметь *запас* в напряжениях, т. е. излишний материал. Поэтому желательно так запроектировать размеры стержня, *чтобы во всех его поперечных сечениях* (перпендикулярных к оси) *нормальные напряжения были постоянны.*

Такой стержень называется стержнем *равного сопротивления* растяжению или сжатию. Если при этом напряжения равны допускаемым, то такой стержень будет иметь наименьший вес.

Возьмем длинный стержень, подверженный сжатию силой P и собственным весом (рис. 46). Чем ближе к основанию стержня мы будем брать сечение, тем больше будет сила, вызывающая напряжения в этом сечении, тем бо́льшими придется брать размеры площади сечения. Стержень получит форму, расширяющуюся книзу. Площадь сечения F будет изменяться по высоте в зависимости от x, т. е. $F=f(x)$.

Установим этот закон изменения площади в зависимости от расстояния сечения x от верха стержня.

Площадь верхнего сечения стержня F_0 определится из условия прочности:

$$\frac{P}{F_0}=[\sigma] \quad \text{и} \quad F_0=\frac{P}{[\sigma]},$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение на сжатие; напряжения во всех прочих сечениях стержня также должны равняться величине

$$\sigma=[\sigma]=\frac{P}{F_0}.$$

Чтобы выяснить закон изменения площадей по высоте стержня, возьмем два смежных бесконечно близких сечения на расстоянии x от верха стержня; расстояние между сечениями dx; площадь верхнего назовем $F(x)$, площадь же смежного $F(x)+dF(x)$.

Приращение площади $dF(x)$ при переходе от одного сечения к другому должно воспринять вес $\gamma F(x)dx$ элемента стержня между сечениями. Так как на площади $dF(x)$ он должен вызвать напряжение, равное допускаемому $[\sigma]$, то $dF(x)$ определится из условия

$$\frac{\gamma F(x)\,dx}{dF(x)}=[\sigma]. \tag{5.5}$$

Отсюда

$$\frac{dF(x)}{F(x)}=\frac{\gamma}{[\sigma]}dx.$$

После интегрирования получаем

$$\ln F(x)+C=\frac{\gamma}{[\sigma]}x. \tag{5.6}$$

При $x=0$ площадь $F(x)=F_0$; подставляя эти значения в (5.6), имеем

$$\ln F_0+C=0 \quad \text{и} \quad C=-\ln F_0.$$

Отсюда

$$\frac{\gamma}{[\sigma]}x = \ln F(x) - \ln F_0 = \ln\frac{F(x)}{F_0}, \quad \frac{F(x)}{F_0} = e^{\frac{\gamma}{[\sigma]}x}$$

и

$$F(x) = F_0 e^{\frac{\gamma}{[\sigma]}x}. \tag{5.7}$$

Если менять сечения точно по этому закону, то боковые грани стержня получат криволинейное очертание (рис. 46), что усложняет и удорожает работу. Поэтому обычно такому сооружению придают лишь приближенную форму стержня разного сопротивления, например в виде усеченной пирамиды с плоскими гранями.

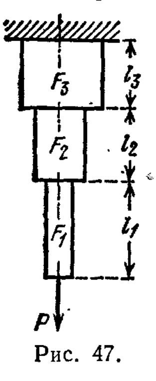


Рис. 47.

Приведенный расчет является приближенным. Мы предполагали, что по всему сечению стержня равного сопротивления передаются только нормальные напряжения; на самом деле у краев сечения напряжения будут направлены по касательной к боковой поверхности.

В случае длинных канатов или растянутых штанг форму стержня равного сопротивления осуществляют тоже приближенно, разделяя стержень по длине на ряд участков; на протяжении каждого участка сечение остается постоянным (рис. 47) — получается так называемый ступенчатый стержень.

Определение площадей F_1, F_2,... при выбранных длинах производится следующим образом. Площадь поперечного сечения первого снизу участка будет по формуле (5.4) равна

$$F_1 = \frac{P}{[\sigma] - \gamma l_1}.$$

Чтобы получить площадь поперечного сечения второго участка, надо нагрузить его внешней силой P и весом первого участка $\gamma F_1 l_1$:

$$F_2 = \frac{P + \gamma F_1 l_1}{[\sigma] - \gamma l_2}.$$

Для третьего участка к внешней силе добавляются веса первого и второго участков. Подобным же образом поступают и для других участков. Для того чтобы сравнить выгодность применения брусьев равного сопротивления, ступенчатых и постоянного сечения, рассмотрим следующий пример.

Опора высотой $h=42$ *м* подвергается сжатию центрально приложенной силой $P=400$ *Т*; принимая объемный вес кладки 2,2 *Т/м*³, а допускаемое напряжение на сжатие 12 *кГ/см*², сравнить объемы кладки для случаев:

опоры постоянного сечения,

опоры из трех призматических частей равной длины,

опоры равного сопротивления сжатию.

Расчет ведем в тоннах и метрах.

Для первого случая площадь поперечного сечения равна

$$F=\frac{P}{[\sigma]-h\gamma}=\frac{400}{120-42\cdot 2,2}=14,5\ м^2.$$

Объем равен

$$V=Fh=14,5\cdot 42\approx 610\ м^3.$$

Во втором случае площадь сечения верхней части равна

$$F_1=\frac{P}{[\sigma]-\frac{h}{3}\gamma}=\frac{400}{120-14\cdot 2,2}=4,48\ м^2.$$

Площадь сечения второго участка равна

$$F_2=\frac{P+\gamma F_1\frac{h}{3}}{[\sigma]-\frac{h}{3}\gamma}=\frac{400+2,2\cdot 4,48\cdot 14}{120-14\cdot 2,2}=6,04\ м^2.$$

Площадь сечения на третьем участке равна

$$F_3=\frac{P+\gamma F_1\frac{h}{3}+\gamma F_2\frac{h}{3}}{[\sigma]-\frac{h}{3}\gamma}=\frac{400+2,2\cdot 4,48\cdot 14+2,2\cdot 6,04\cdot 14}{120-14\cdot 2,2}=8,12\ м^2.$$

Полный объем кладки равен

$$V=(F_1+F_2+F_3)\frac{h}{3}=(4,48+6,04+8,12)\ 14=261\ м^3.$$

Этот же ответ можно получить из условия, что усилие внизу третьего участка, равное $P+G$ (где G — вес всей опоры), одновременно равно $[\sigma]\ F_3$; тогда

$$V=\frac{G}{\gamma}=\frac{[\sigma]\ F_3-P}{\gamma}=261\ м^3.$$

Для опоры равного сопротивления сжатию площадь верхнего сечения равна

$$F_0=\frac{P}{[\sigma]}=\frac{400}{120}=3,33\ м^2.$$

Площадь нижнего сечения равна

$$F_h=F_0e^{\frac{\gamma}{[\sigma]}h}=3,33e^{\frac{2,2\cdot 42}{120}}=3,33e^{0,77}=7,15\ м^2.$$

Вес опоры равного сопротивления G определится из условия

$$P+G=[\sigma]\ F_h;$$

отсюда

$$G=[\sigma]\ F_h-P=120\cdot 7,15-400=460\ T.$$

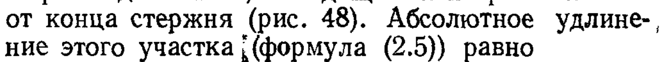
Объем опоры равен

$$V=\frac{G}{\gamma}=\frac{460}{2,2}=209\ м^3,$$

что меньше объема ступенчатой опоры на 20% и примерно втрое меньше объема опоры постоянного сечения.

§ 25. Деформации при действии собственного веса

При определении влияния собственного веса на деформацию при растяжении и сжатии стержней придется учесть, что относительное удлинение различных участков стержня будет переменным, как и напряжение $\sigma(x)$. Для вычисления полного удлинения стержня постоянного сечения определим сначала удлинение бесконечно малого участка стержня длиной dx, находящегося на расстоянии x от конца стержня (рис. 48). Абсолютное удлинение этого участка (формула (2.5)) равно



$$\Delta dx = \frac{(P + \gamma x F)\,dx}{EF} = \frac{dx}{E}\left[\frac{P}{F} + \gamma x\right].$$

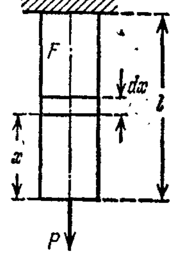


Рис. 48.

Полное удлинение стержня Δl равно

$$\Delta l = \int_0^l \Delta\,dx = \int_0^l \frac{dx}{E}\left[\frac{P}{F} + \gamma x\right] = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E}.$$

Что же касается деформаций стержней равного сопротивления, то, так как нормальные напряжения во всех сечениях одинаковы и равны допускаемым $[\sigma]$, относительное удлинение по всей длине стержня одинаково и равно

$$\varepsilon = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Абсолютное же удлинение при длине стержня l равно

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{[\sigma]\,l}{E} = \frac{Pl}{EF_0},$$

где обозначения соответствуют рис. 46.

Деформацию ступенчатых стержней следует определять по частям, выполняя подсчеты по отдельным призматическим участкам. При определении деформации каждого участка учитывается не только его собственный вес, но и вес тех участков, которые влияют на его деформацию, добавляясь к внешней силе. Полная деформация получится суммированием деформаций отдельных участков.

§ 26. Гибкие нити

А. В технике встречается еще один вид растянутых элементов, при определении прочности которых важное значение имеет собственный вес. Это — так называемые гибкие нити. Таким термином обозначаются гибкие элементы в линиях электропередач, в канатных дорогах, в висячих мостах и других сооружениях.

Пусть (рис. 49) имеется гибкая нить постоянного сечения, нагруженная собственным весом и подвешенная в двух точках, нахо-

дящихся на разных уровнях. Под действием собственного веса нить провисает по некоторой кривой AOB.

Горизонтальная проекция расстояния между опорами (точками ее закрепления), обозначаемая l, носит название *пролета*.

Нить имеет постоянное сечение, следовательно, вес ее распределен равномерно по ее длине. Обычно провисание нити невелико по сравнению с ее пролетом, а длина кривой AOB мало отличается (не более чем на 10%) от длины хорды AB. В этом случае с достаточной степенью точности можно считать, что вес нити равномерно распределен по длине ее проекции на горизонтальную ось, т. е. вдоль *пролета* l. Эту категорию гибких нитей мы и рассмотрим. Примем, что интенсивность нагрузки, равномерно распределенной по пролету нити, равна q. Эта нагрузка, имеющая размерность *сила/длина*, может быть не только собственным весом нити, приходящимся на единицу длины пролета, но и весом льда или любой другой нагрузкой, также равномерно распределенной. Сделанное допущение о законе распределения нагрузки значительно облегчает расчет, но делает его вместе с тем приближенным; если при точном решении (нагрузка распределена вдоль кривой) кривой провисания будет цепная линия, то в приближенном решении кривая провисания оказывается квадратной параболой.

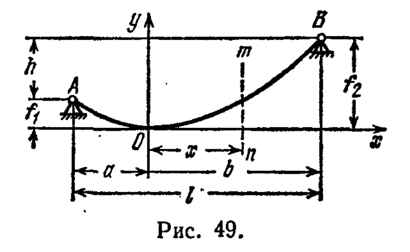


Рис. 49.

Начало координат выберем в самой низшей точке провисания нити O (рис. 49), положение которой, нам пока неизвестное, очевидно, зависит от величины нагрузки q, от соотношения между длиной нити и длиной пролета, а также от относительного положения опорных точек. В точке O касательная к кривой провисания нити, очевидно, горизонтальна. По этой касательной направим вправо ось x.

Вырежем двумя сечениями — в начале координат и на расстоянии x от начала координат (сечение m—n) — часть длины нити. Так как нить предположена гибкой, т. е. способной сопротивляться лишь растяжению, то действие отброшенной части на оставшуюся возможно только в виде силы, направленной по касательной к кривой провисания нити в месте разреза; иное направление этой силы невозможно.

На рис. 50 представлена вырезанная часть нити с действующими на нее силами. Равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q направлена вертикально вниз. Воздействие левой отброшенной части (горизонтальная сила H) направлено, ввиду того, что нить работает на растяжение, влево. Действие правой отброшенной части, сила T, направлено вправо по касательной к кривой провисания нити в этой точке.

Составим уравнение равновесия вырезанного участка нити. Возьмем сумму моментов всех сил относительно точки приложения силы T и приравняем ее нулю. При этом учтем, опираясь на приведенное в начале допущение, что равнодействующая распределенной нагрузки интенсивностью q будет qx и что она приложена посредине отрезка x (рис. 50). Тогда

$$H\cdot y - qx\cdot\frac{x}{2}=0, \quad \text{откуда} \quad y=\frac{qx^2}{2H}. \tag{5.8}$$

Отсюда следует, что кривая провисания нити является параболой. Когда обе точки подвеса нити находятся на одном уровне, то $f_1=f_2=f$. Величина f в данном случае будет так называемой *стрелой провисания*. Ее легко определить из уравнения (5.8); так как в этом случае, ввиду симметрии, низшая точка нити находится посредине пролета, то $a=b=l/2$; подставляя в уравнение (5.8) значения $x=b=l/2$ и $y=f$, получаем

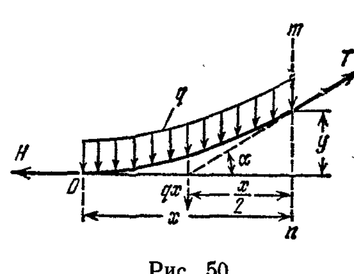


Рис. 50.

$$f=\frac{ql^2}{8H}. \tag{5.9}$$

Из этой формулы находим величину силы H:

$$H=\frac{ql^2}{8f}. \tag{5.10}$$

Величина H называется горизонтальным *натяжением нити*.

Таким образом, если известны нагрузка q и натяжение H, то по формуле (5.9) найдем стрелу провисания f. При заданных q и f натяжение H определяется формулой (5.10). Связь этих величин с длиной s нити устанавливается при помощи известной из математики приближенной формулы [1])

$$s\approx l\left(1+\frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}\right). \tag{5.11}$$

Вернемся к рассмотрению рис. 50. Составим еще одно условие равновесия вырезанной части нити, а именно, приравняем нулю

---

[1]) Элемент длины кривой $ds=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$; так как из формул (5.8) и (5.10) следует, что $\frac{dy}{dx}=\frac{qx}{H}=\frac{8fx}{l^2}$, то

$$ds=dx\left(1+\frac{64f^2x^2}{l^4}\right)^{1/2}\approx dx\left(1+\frac{32f^2x^2}{l^4}\right).$$

После интегрирования в пределах от $x=0$ до $x=l/2$ и удваивания приходим к формуле (5.11).

сумму проекций всех сил на ось x:

$$-H+T\cos\alpha=0.$$

Из этого уравнения найдем силу T — натяжение в произвольной точке

$$T=\frac{H}{\cos\alpha}. \qquad (5.12)$$

Из формулы (5.12) видно, что сила T увеличивается от низшей точки нити к опорам и будет наибольшей в точках подвеса — там, где касательная к кривой провисания нити составляет наибольший угол с горизонталью. При малом провисании нити этот угол не достигает больших значений, поэтому с достаточной для практики степенью точности можно считать, что усилие в нити постоянно и равно ее натяжению H. На эту величину обычно и ведется расчет прочности нити. Если все же требуется вести расчет на наибольшую силу у точек подвеса, то для симметричной нити ее величину определим следующим путем. Вертикальные составляющие реакций опор равны между собой и равны половине суммарной нагрузки на нить, т. е. $ql/2$. Горизонтальные составляющие равны силе H, определяемой по формуле (5.10). Полные реакции опор получатся как геометрические суммы этих составляющих:

$$T_{\max}=\sqrt{\left(\frac{ql^2}{8f}\right)^2+\left(\frac{ql}{2}\right)^2}=\frac{ql^2}{8f}\sqrt{1+16\frac{f^2}{l^2}}=H\sqrt{1+\frac{16f^2}{l^2}}.$$

Условие прочности для гибкой нити, если через F обозначена площадь сечения, имеет вид

$$\sigma=\frac{H}{F}\leqslant[\sigma].$$

Заменив натяжение H его значением по формуле (5.10), получим

$$\frac{ql^2}{8fF}\leqslant[\sigma].$$

Из этой формулы при заданных l, q, F и $[\sigma]$ можно определить необходимую стрелу провисания f. Решение при этом упростится, если в q включен лишь собственный вес; тогда $q=\gamma\cdot F$, где γ — вес единицы объема материала нити, и

$$f=\frac{\gamma F l^2}{8F[\sigma]}=\frac{\gamma l^2}{8[\sigma]},$$

т. е. величина F не войдет в расчет.

Б. Если точки подвеса нити находятся на разных уровнях, то, подставляя в уравнение (5.8) значения $x=-a$ и $x=b$, находим f_1 и f_2:

$$f_1=\frac{qa^2}{2H}; \quad f_2=\frac{qb^2}{2H}. \qquad (5.13)$$

Отсюда из второго выражения определяем натяжение

$$H=\frac{qb^2}{2f_2}, \tag{5.14}$$

а деля первое на второе, находим

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{a^2}{b^2} \quad \text{или} \quad a=\pm b\sqrt{\frac{f_1}{f_2}}.$$

Имея в виду, что $b+a=l$, получаем

$$b\pm b\sqrt{\frac{f_1}{f_2}}=l, \quad \text{или} \quad b=\frac{l}{1\pm\sqrt{\frac{f_1}{f_2}}}.$$

Подставив это значение b в формулу (5.14), окончательно определяем [1])

$$H=\frac{ql^2}{2(\sqrt{f_2}\pm\sqrt{f_1})^2} \tag{5.15}$$

Два знака в знаменателе указывают на то, что могут быть две основные формы провисания нити. Первая форма при меньшем значении H (знак плюс перед вторым корнем) дает нам вершину параболы между опорами нити (рис. 49 и пунктирная кривая AO_1B на рис. 51). При большем натяжении H (знак минус перед вторым корнем) вершина параболы расположится левее опоры A (сплошная кривая O_2AB на рис. 51). Получаем вторую форму кривой.

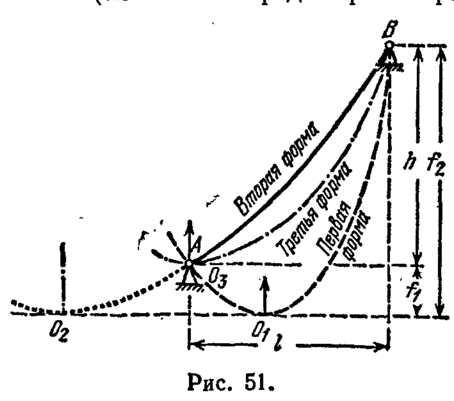


Рис. 51.

Возможна и третья (промежуточная между двумя основными) форма провисания, соответствующая условию $f_1=0$; тогда начало координат O_3 совмещается с точкой A. Та или иная форма будет получена в зависимости от соотношений между длиной нити AOB (рис. 49) и длиной хорды AB.

Если при подвеске нити на разных уровнях неизвестны стрелы провисания f_1 и f_2, но известно натяжение H, то легко получить значения расстояний a и b и стрел провисания f_1 и f_2.

Разность h уровней подвески равна (рис. 49 и 51)

$$h=f_2-f_1.$$

---

[1]) Впервые формула для H в таком примерно виде была указана проф. Штаерманом И. Я. «Наука и техника», журнал Одесского политехнического института, 1925).

Подставим в это выражение значения f_1 и f_2, согласно (5.13), и преобразуем его, имея в виду, что $a+b=l$:

$$h=\frac{qb^2}{2H}-\frac{qa^2}{2H}=\frac{q}{2H}(b^2-a^2)=\frac{q}{2H}(b+a)(b-a)=\frac{ql}{2H}(b-a),$$

откуда

$$b-a=\frac{2Hh}{ql},$$

а так как $a+b=l$, то

$$a=\frac{l}{2}-\frac{Hh}{ql} \quad \text{и} \quad b=\frac{l}{2}+\frac{Hh}{ql}.$$

Следует иметь в виду, что при $a>0$ будет иметь место первая форма провисания нити (рис. 51), при $a<0$ — вторая форма провисания и при $a=0$ — третья форма. Подставляя значения a и b в выражения (5.13), получаем величины f_1 и f_2:

$$f_1=\frac{ql^2}{8H}+\frac{Hh^2}{2ql^2}-\frac{h}{2}$$

и

$$f_2=\frac{ql^2}{8H}+\frac{Hh^2}{2ql^2}+\frac{h}{2}.$$

B. Теперь выясним, что произойдет с симметричной нитью, перекрывающей пролет l, если после подвешивания ее при температуре t_1 и интенсивности нагрузки q_1 температура нити *повысится* до t_2, а нагрузка *увеличится* до интенсивности q_2 (например, из-за ее обледенения). При этом предположим, что в первом состоянии задано или натяжение H_1, или стрела провисания f_1. (Зная одну из этих двух величин, по формуле (5.10) всегда можно определить другую.)

При подсчете *деформации* нити, являющейся по сравнению с длиной нити малой величиной, сделаем два допущения: длина нити равна ее пролету, а натяжение постоянно и равно H. При пологих нитях эти допущения дают небольшую погрешность.

В таком случае удлинение нити, вызванное увеличением температуры, будет равно

$$\Delta s_1=\alpha(t_2-t_1)l, \qquad (5.16)$$

где α — коэффициент линейного температурного расширения материала нити.

При повышении температуры нить удлиняется. В связи с этим увеличится ее стрела провисания и, как следствие, в соответствии с формулой (5.10) уменьшится ее натяжение. С другой стороны, из-за увеличения нагрузки, как видно из той же формулы (5.10), натяжение увеличится. Допустим, что окончательно натяжение увеличивается. Тогда удлинение нити, вызванное увеличением

натяжения, будет, согласно закону Гука, равно

$$\Delta s_2 = \frac{(H_2 - H_1)\,l}{EF}. \tag{5.17}$$

Если H_2 окажется меньше, чем H_1, то величина Δs_2 будет отрицательной. При понижении температуры будет отрицательной величина Δs_1.

Таким образом, длина нити во втором ее состоянии будет равна длине при первом ее состоянии с добавлением тех деформаций, которые произойдут от повышения температуры и натяжения:

$$s_2 = s_1 + \Delta s_1 + \Delta s_2. \tag{5.18}$$

Изменение длины нити вызовет изменение и ее стрелы провисания. Вместо f_1 она станет f_2.

Теперь заменим в уравнении (5.18) s_1 и s_2 их выражениями по формуле (5.11), а деформации Δs_1 и Δs_2 — их значениями по формулам (5.16) и (5.17). Тогда уравнение (5.18) примет следующий вид:

$$l\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f_2^2}{l^2}\right) = l\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f_1^2}{l^2}\right) + \alpha\,(t_2 - t_1)\,l + \frac{(H_2 - H_1)\,l}{EF}. \tag{5.19}$$

В этом уравнении заменим f_1 и f_2 их значениями по формуле (5.9)

$$f_1 = \frac{q_1 l^2}{8H_1} \quad \text{и} \quad f_2 = \frac{q_2 l^2}{8H_2}.$$

Тогда, после некоторых преобразований, уравнение (5.19) может быть написано в виде

$$H_2^3 = \left[\frac{EFq_1^2 l^2}{24H_1^2} + EF\alpha\,(t_2 - t_1) - H_1\right] H_2^2 - \frac{EFq_2^2 l^2}{24} = 0. \tag{5.20}$$

Определив из уравнения (5.20) натяжение H_2, можно найти по формуле (5.9) и стрелу f_2.

В случае, если при переходе от первого ко второму состоянию нагрузка не изменяется, а изменяется лишь температура, то в уравнении (5.20) интенсивность q_2 заменяется на q_1. В случае, если при переходе от первого ко второму состоянию не изменяется температура, а изменяется лишь нагрузка, то в уравнении (5.20) средний член в квадратной скобке равен нулю.

Уравнение (5.20) пригодно, конечно, и при понижении температуры и уменьшении нагрузки.

В тех случаях, когда стрела провисания не является малой по сравнению с пролетом, выведенные выше формулы неприменимы, так как действительная кривая провисания нити, цепная линия, будет уже значительно отличаться от параболы, полученной нами благодаря предположению о равномерном распределении нагрузки по *пролету* нити, а не по ее *длине*, как то имеет место в действительности.

Точные подсчеты показывают, что значение погрешности в величине натяжения H, вызванной этим предположением, таково: при отношении $f/l<1/20$ погрешность не превосходит 0,3%, при $f/l=$ $=1/10$ ошибка составляет уже 1,3%, а при $f/l=1/5$ погрешность несколько превосходит 5%.

Глава VI

СЛОЖНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

§ 27. Напряжения по наклонным сечениям при осевом растяжении или сжатии (линейное напряженное состояние)

В предыдущих параграфах, проверяя прочность растянутого или сжатого стержней, мы определяли напряжения только по сечению, перпендикулярному к его оси. Но правильно оценить опасность, угрожающую прочности стержня, можно, лишь зная полностью его напряженное состояние, а это требует уменья вычислять напряжения не только по сечению, перпендикулярному к оси, а по любому.

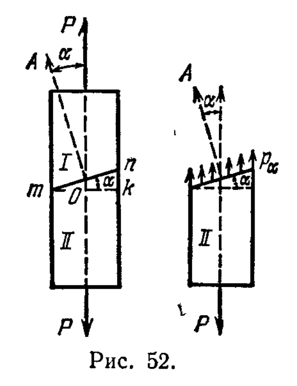


Рис. 52.

Вычислим напряжения, действующие по какому-либо наклонному сечению. Возьмем призматический стержень, растянутый силами P (рис. 52). Разделим его на две части: I и II сечением mn, составляющим угол α с поперечным сечением mk, перпендикулярным к оси. Тот же угол составляют между собой и нормали к этим сечениям.

За *положительное направление* отсчета этого угла возьмем направление *против* часовой стрелки. Нормаль OA, направленную *наружу* по отношению к отсеченной части стержня, будем называть *внешней* нормалью к сечению mn. Площадь сечения mk обозначим F_0, площадь же сечения mn обозначим F_α.

Для нахождения напряжений, передающихся через намеченное сечение от верхней (I) части на нижнюю (II), отбросим мысленно верхнюю часть и заменим действие ее на нижнюю напряжениями p_α. Для равновесия нижней части напряжения p_α должны уравновешивать силу P и быть направлены параллельно оси стержня. В данном случае напряжения уже не перпендикулярны к той площадке, по которой они действуют. Величина их тоже будет иной, чем для площадки mk.

Сделав предположение, что в достаточном удалении от мест приложения внешних сил P напряжения p_α равномерно распределены по площади наклонного сечения mn, найдем

$$p_\alpha = \frac{P}{F_\alpha}.$$

Но так как $F_\alpha = F/\cos\alpha$, то

$$p_\alpha = \frac{P\cos\alpha}{F_0} = \sigma_0 \cos\alpha,$$

где $\sigma_0 = P/F_0$ — нормальное напряжение по площадке mk, перпендикулярной к растягивающей силе.

При изменении угла α меняется и *величина* полных напряжений p_α, действующих по проведенной площадке. Чтобы при любом угле наклона α иметь дело всегда с одними и теми же видами напряжений, разложим напряжения p_α на две составляющие: в плоскости mn и перпендикулярно к ней (рис. 53). Таким образом, напряжение p_α, действующее в точке A площадки mn, мы заменяем двумя взаимно перпендикулярными напряжениями: *нормальным напряжением* σ_α и *касательным напряжением* τ_α. Величины этих двух напряжений будут меняться в зависимости от изменения угла α между нормалью к площадке и направлением растягивающей силы.

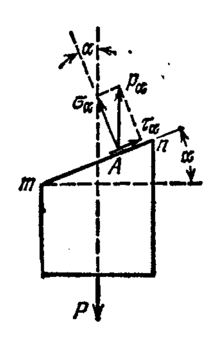


Рис. 53.

Из рис. 53 имеем

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos\alpha = \sigma_0 \cos^2\alpha, \tag{6.1}$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin\alpha = \sigma_0 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\alpha. \tag{6.2}$$

Установим следующие условия относительно *знаков* напряжений σ_α и τ_α. *Растягивающие* напряжения σ_α, т. е. совпадающие с направлением *внешней* нормали, будем считать *положительными;* нормальные напряжения *обратного* направления — *сжимающие* — будем принимать со знаком *минус.*

Касательное напряжение будем считать положительным, если при повороте вектора τ против часовой стрелки на 90° его направление совпадет с направлением внешней нормали. Обратное направление τ будем считать отрицательным.

На рис. 54 показаны принятые условия относительно знаков α, σ и τ.

При любом угле наклона площадки α мы всегда будем иметь дело лишь с *двумя* видами напряжений, действующих в каждой точке проведенного разреза: с *нормальным* и *касательным* напряжениями.

На рис. 55 показано действие этих напряжений на тонкий слой материала (на рисунке заштрихованный), выделенный из растянутого стержня двумя параллельными сечениями *1—1* и *2—2*. К каждой из плоскостей приложены и нормальные растягивающие напряжения σ_α, и касательные τ_α, вызывающие сдвиг сечений *1—1* и *2—2*, параллельно одно другому.

Таким образом, наличие двух видов напряжений приводит к двум видам деформации: удлинению (или укорочению) и деформации

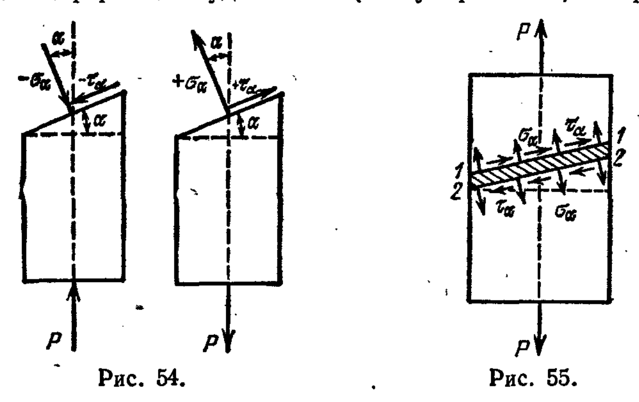


Рис. 54. Рис. 55.

сдвига. Этому соответствуют и два вида разрушения материала — *путем отрыва* и *путем сдвига*, что наблюдается и в опытах на растяжение.

Для проверки прочности материала стержня необходимо найти *наибольшие* значения напряжений σ_α и τ_α, величины которых зависят от положения площадки *mn*.

Из формул (6.1) и (6.2) следует, что σ_α достигает своего наибольшего значения, когда $\cos^2\alpha$ будет равен единице и угол $\alpha=0$. Максимум же τ_α получится при $\sin 2\alpha=1$, т. е. при $2\alpha=90°$ и $\alpha=45°$. Величины этих наибольших напряжений будут равны

$$\max\sigma_\alpha=\sigma_0=\frac{P}{F_0};\quad \max\tau_\alpha=\frac{\sigma_0}{2}. \tag{6.3}$$

Таким образом, *наибольшие нормальные напряжения возникают в данном случае по площадкам, перпендикулярным к оси стержня; наибольшие касательные напряжения действуют по площадкам, составляющим угол 45° с направлением оси стержня, и равны половине наибольших нормальных напряжений.*

Возникает вопрос, по отношению к какому из этих видов напряжений следует производить проверку прочности, какому из них приписать решающую роль в нарушении прочности материала. Это подробно освещено в главе VII.

§ 28. Понятие о главных напряжениях. Виды напряженного состояния материала

В предыдущих главах мы ознакомились с поведением материала при осевом (или, как его часто называют, простом) растяжении и сжатии. На практике, однако, возможны случаи, когда под действием внешних сил элемент материала подвергается растяжению или сжатию по двум и трем направлениям, т. е. находится в условиях *сложного напряженного состояния.*

В § 27 было показано, что и при простом растяжении возможны напряжения двух видов — нормальные σ и касательные τ. Из формул (6.1) и (6.2) следует, что по сечениям, перпендикулярным к оси растянутого стержня ($\alpha=0$), возникают только нормальные напряжения ($\tau=0$), а по сечениям, параллельным его оси ($\alpha=90°$), нет ни нормальных, ни касательных напряжений ($\sigma=0$ и $\tau=0$).

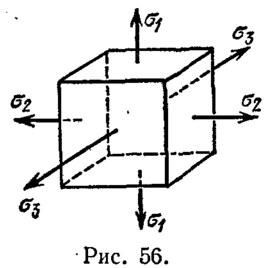


Рис. 56.

Такие площадки, по которым нет касательных напряжений, называются *главными;* нормальные напряжения, действующие по этим площадкам, называются *главными напряжениями.*

В теории упругости доказывается, что в каждой точке любого напряженного тела можно провести три взаимно перпендикулярные главные площадки, через которые передаются три *главных* (нормальных) *напряжения;* из них два имеют экстремальные значения; одно является *наибольшим* нормальным напряжением, другое — *наименьшим,* третье — промежуточное. В каждой точке напряженного тела можно выделить элементарный кубик; гранями которого служат *главные площадки.* Материал кубика растягивается или сжимается тремя взаимно перпендикулярными главными напряжениями, передающимися через эти грани (рис. 56).

В случае простого растяжения (§ 27) одна главная площадка в каждой точке перпендикулярна к оси стержня ($\alpha=0°$), а две другие параллельны этой оси ($\alpha=90°$). Так как по первой главной площадке нормальное напряжение не равно нулю ($\sigma_\alpha\neq 0$), а по двум другим оно обращается в нуль, то при простом растяжении и сжатии в каждой точке стержня из трех главных напряжений только *одно* не равно нулю; оно направлено параллельно растягивающей силе и оси стержня. Такое напряженное состояние материала называется *линейным* (или *одноосным*). Выделенный из стержня элемент растягивается лишь в одном направлении.

На практике встречаются случаи, когда элемент материала, в виде кубика, подвергается растяжению или сжатию по двум взаимно перпендикулярным направлениям или по всем трем (рис. 56). Случай работы материала, когда *два* главных напряжения не равны

нулю, называется *плоским* (или *двухосным*) *напряженным состоянием*. Если же все три главных напряжения не равны нулю в рассматриваемой точке, то налицо *самый общий* случай распределения напряжений в материале — *объемное (трехосное) напряженное состояние;* элементарный кубик будет подвергаться растяжению или сжатию по всем трем взаимно перпендикулярным направлениям.

Главные напряжения условимся в дальнейшем обозначать буквами σ_1, σ_2, σ_3. Нумерацию главных напряжений установим таким образом, чтобы σ_1 обозначало *наибольшее* по *алгебраической* величине, а σ_3 — *наименьшее* напряжение. Сжимающие напряжения условимся, как и прежде, считать отрицательными; поэтому, если, например, главные напряжения будут иметь значения +1000 *кГ/см²*, —600 *кГ/см²*, +400 *кГ/см²*, то нумерация должна быть такой:

$$\sigma_1 = +1000\ кГ/см^2; \quad \sigma_2 = +400\ кГ/см^2, \quad \sigma_3 = -600\ кГ/см^2;$$

условие $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ будет выполнено.

Таким образом, мы различаем *три* вида напряженного состояния:

1) *объемное напряженное состояние* — когда все три главных напряжения *не равны* нулю (например, случай растяжения или сжатия по трем взаимно перпендикулярным направлениям);

2) *плоское напряженное состояние* — когда одно главное напряжение равно нулю (случай растяжения или сжатия по двум направлениям);

3) *линейное напряженное состояние* — когда два главных напряжения равны нулю (случай растяжения или сжатия в одном направлении).

В § 27 мы рассмотрели распределение напряжений при линейном напряженном состоянии; ниже будут приведены примеры плоского и объемного напряженных состояний и изучено распределение напряжений по различным площадкам в этих случаях.

§ 29. Примеры плоского и объемного напряженных состояний. Расчет цилиндрического резервуара

А. В качестве примера сложного напряженного состояния рассмотрим напряжения, которым подвергается материал цилиндрической части тонкостенного резервуара, внутри которого находится газ, пар или вода при давлении q *ат*, т. е. q *кГ/см²*. Боковые стенки и днища резервуара подвергаются равномерно распределенному давлению q. Собственным весом жидкости в резервуаре пренебрегаем.

Давление на днища будет стремиться разорвать цилиндрическую часть по поперечному сечению; давление же на боковые стенки вызовет в них стремление разорваться по образующим цилиндра. Таким образом, если мы выделим из цилиндрической части

резервуара прямоугольный элемент $ABCD$, то этот элемент будет подвергаться растяжению в двух направлениях: напряжениями σ' по сечениям, перпендикулярным к образующим, и напряжениями σ'' по сечениям вдоль образующих (рис. 57).

Для вычисления напряжений σ' и σ'' воспользуемся методом сечений. Внутренний диаметр цилиндра обозначим D, а толщину стенок t. Будем считать, что t мало по сравнению с D ($t<D/20$).

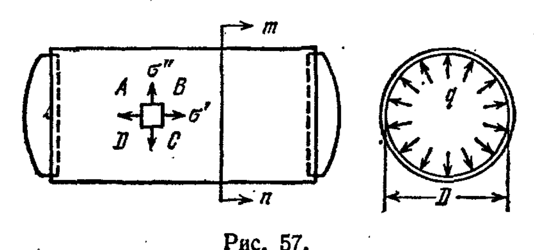


Рис. 57.

Рассечем резервуар (рис. 57) сечением mn на две части и рассмотрим равновесие одной из частей, например, правой (рис. 58, a). Давление газа на днище заменим равнодействующей P, растягивающей цилиндрическую часть резервуара вдоль образующей и равной

$$P=q\frac{\pi D^2}{4}.$$

Площадь кольцевого сечения (узкая полоска толщиною t и длиною $\sim\pi D$), воспринимающего эту силу:

$$F\approx t\pi D.$$

Нормальные напряжения в этом сечении:

$$\sigma'=\frac{q\pi D^2}{4\cdot t\pi D}=\frac{qD}{4t}.$$

Напряжения σ'', возникающие по площадкам, параллельным образующим цилиндра, найдем, выделив в некотором удалении от днищ часть резервуара двумя поперечными сечениями mn и $m'n'$ с расстоянием между ними a и разрезав полученное кольцо по диаметру (рис. 58, $б$). На диаметральную поверхность газа (или жидкости) передается давление q, равнодействующая которого равна $P_1=qDa$. Площадь диаметрального сечения цилиндра (две стенки), воспринимающего это давление, равна $F_1=2\cdot ta$ и напряжения в стенках

$$\sigma''=\frac{qDa}{2ta}=\frac{qD}{2t}.$$

Эти напряжения оказываются вдвое больше, чем σ', действующие по кольцевому сечению.

Так как и в кольцевом, и в диаметральном сечении касательные напряжения отсутствуют, то площадки F и F_1 — это главные площадки, а напряжения σ' и σ'' — главные напряжения. Третье главное напряжение, действующее на стенку резервуара в радиальном направлении $\sigma'''=-q$, пренебрежимо мало по сравнению с величинами σ' и σ''; его можно считать равным нулю.

Следовательно, элемент $ABCD$, вырезанный из стенки цилиндра (рис. 57), находится в условиях *плоского* напряженного состояния

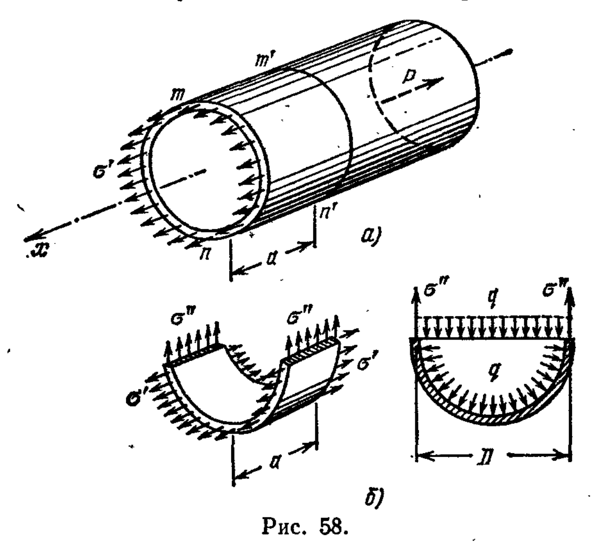


Рис. 58.

(двухосное растяжение). В соответствии с принятой нумерацией главных напряжений обозначим

$$\sigma_1=\frac{qD}{2t}; \quad \sigma_2=\frac{qD}{4t} \quad \text{и} \quad \sigma_3=0. \tag{6.4}$$

В условиях плоского напряженного состояния работает также материал сферических, конических и иных тонкостенных сосудов, пластин, всякого рода оболочек и др.

Б. Примером *объемного* напряженного состояния может служить работа материала при передаче давления в шариковом подшипнике от шарика на обойму или при передаче давления от колес подвижного состава на рельсы.

Так как соприкасание поверхностей головки рельса и бандажа представляет собой соприкасание двух цилиндров разных радиусов с образующими, расположенными накрест, то эти две поверхности должны касаться друг друга в точке. Нормальные напряжения, возникающие в точке соприкасания при передаче давления от одного тела на другое, называются *контактными* напряжениями.

При передаче нагрузки материал рельса и бандажа у этой точки деформируется, и передача давления происходит по площадке соприкасания, имеющей эллиптическую форму. Величина этой площадки зависит от величины передаваемого давления и соотношения радиусов соприкасающихся поверхностей. Если мы в центре площадки давления вырежем из материала рельса маленький кубик (например, с ребром 1 *мм*), грани которого параллельны и перпендикулярны к оси рельса (рис. 59), то на грани этого кубика будут действовать лишь нормальные сжимающие напряжения [1]). Таким образом (рис. 59, *б*) в данном случае мы имеем дело с *тремя* взаимно перпендикулярными площадками, по которым действуют главные напряжения σ', σ'' и σ'''. Появление боковых напряжений σ'' и σ''' объясняется тем, что под действием напряжений σ', перпендикулярных к площадке давления, материал выделенного нами кубика стремится раздаться в стороны и вызывает реакции σ'' и σ''' со стороны окружающего кубик материала рельса, препятствующие поперечной деформации.

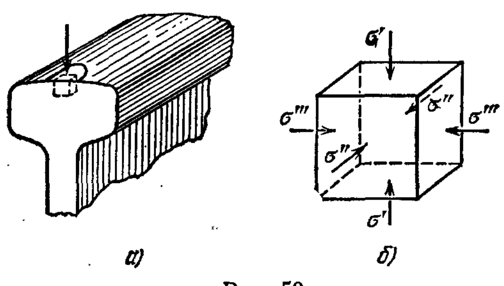


Рис. 59.

Величина этих напряжений, как показывают подсчеты, весьма значительны. Так, в точке соприкасания колеса локомотива с рельсом получены следующие значения контактных напряжений [2]):

$$\sigma' = -110\ кГ/мм^2; \quad \sigma'' = -90\ кГ/мм^2; \quad \sigma''' = -80\ кГ/мм^2.$$

По правилу нумерации главных напряжений

$$\sigma_1 = -80\ кГ/мм^2; \quad \sigma_2 = -90\ кГ/мм^2; \quad \sigma_3 = -110\ кГ/мм^2.$$

В рассмотренном примере все три главных напряжения меньше нуля. Это случай трехосного сжатия. Примером трехосного растяжения может служить работа материала в шейке растягиваемого образца. Нередки случаи смешанного объемного напряженного состояния, когда главные напряжения имеют разные знаки: $\sigma_1 > 0$, а $\sigma_3 < 0$ (например, в стенке толстостенного котла).

[1]) Вычисление этих напряжений приводится в курсах теории упругости.

[2]) Беляев Н. М., Вычисление наибольших расчетных напряжений при сжатии соприкасающихся тел, Сборник Ленинградского института инженеров путей сообщения, вып. 99 и 102, 1929.

Объемное напряженное состояние — это самый общий случай напряженного состояния в точке; плоское и линейное напряженные состояния — это частные случаи, когда одно или два из трех главных напряжений равны нулю.

§ 30. Напряжения при плоском напряженном состоянии

Для проверки прочности материала при плоском и объемном напряженном состояниях необходимо найти наибольшие значения нормальных и касательных напряжений.

Начнем с плоского напряженного состояния. Представим себе прямоугольный параллелепипед, на боковые грани которого действуют главные напряжения σ_1 и σ_2 (рис. 60). Оба эти напряжения будем считать растягивающими. По фасадным граням элемента никаких напряжений нет; следовательно, третье главное напряжение равно нулю. Если одно из напряжений σ_1, σ_2 или оба будут сжимающими, то в дальнейшие формулы придется вводить значение соответствующего напряжения со знаком минус и менять *нумерацию* главных напряжений в соответствии с условием § 28. Так, если одно из главных напряжений будет растягивающим, а другое сжимающим, то первое придется называть σ_1, а второе σ_3; если оба напряжения будут сжимающими, то меньшее по абсолютной величине придется назвать σ_2, а большее σ_3.

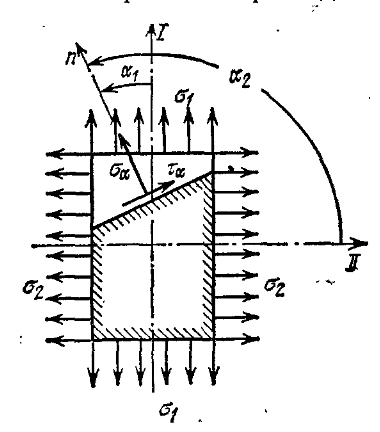


Рис. 60.

Поставим задачу отыскания наибольших нормальных и касательных напряжений по сечениям, *перпендикулярным к фасадным граням*.

Проведем такое сечение, нормаль к которому составит с направлением *I* угол α_1 (рис. 60). С направлением *II* та же нормаль составит угол α_2. По этому сечению будут действовать и нормальные (σ_α) и касательные (τ_α) напряжения, зависящие и от σ_1 и от σ_2. Величину их мы получим, рассматривая действие σ_1 и σ_2 отдельно и складывая результаты. Та доля нормальных напряжений, которую вызывают σ_1, выразится по формуле (6.1) так: $\sigma_1\cos^2\alpha_1$; другая же часть напряжений σ_α, вызванная σ_2, выразится по той же формуле в виде $\sigma_2\cos^2\alpha_2$. Полное нормальное напряжение σ_α равно

$$\sigma_\alpha = \sigma_1\cos^2\alpha_1 + \sigma_2\cos^2\alpha_2 = \sigma_1\cos^2\alpha_1 + \sigma_2\cos^2(\alpha_1 + 90^\circ),$$

или

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_1. \tag{6.5}$$

Таким же рассуждением при помощи формулы (6.2) находим величину касательных напряжений τ_α по проведенной площадке:

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}[\sigma_1 \sin 2\alpha_1 + \sigma_2 \sin 2\alpha_2] = \frac{1}{2}[\sigma_1 \sin 2\alpha_1 + \sigma_2 \sin 2(\alpha_1 + 90°)],$$

или

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha_1. \tag{6.6}$$

В этих формулах α_1 — угол, отсчитанный против часовой стрелки от направления оси I (напряжения σ_1) до нормали к рассматриваемому сечению. Знаки для σ_α и τ_α, а также для углов α_1 и α_2 будем принимать по правилу, установленному выше, в § 27.

В дальнейшем в формулах для σ_α и τ_α угол α_1 будем обозначать через α, отсчитывая этот угол всегда от направления *наибольшего* (алгебраически) главного напряжения *против* часовой стрелки.

Пользуясь формулами (6.5) и (6.6) для напряжений по площадке a — a (рис. 61), легко находим напряжения по площадке b—b, ей *перпендикулярной*, имеющей нормаль n_β, составляющую с направлением наибольшего главного напряжения угол $\beta = \alpha + 90°$:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\beta &= \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_2 \sin^2 \beta = \sigma_1 \cos^2 (\alpha + 90°) + \sigma_2 \sin^2 (\alpha + 90°), \\ \sigma_\beta &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha, \end{aligned}\right\} \tag{6.5'}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_\beta &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin (2\alpha + 180°), \\ \tau_\beta &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{6.6'}$$

Из полученных формул выясняются свойства напряжений, действующих по взаимно перпендикулярным площадкам. Для нормальных напряжений имеем

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha,$$
$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha.$$

Складывая, получим

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}, \tag{6.7}$$

т. е. *сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам постоянна и равна сумме главных напряжений.*

Для касательных напряжений, сопоставляя формулы (6.6) и (6.6′), получим

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha. \tag{6.8}$$

Следовательно, *касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам равны по величине и противоположны по знаку*. Это свойство обычно называют *«законом парности касательных напряжений»*, причем оно имеет место во всех случаях, когда имеются касательные напряжения.

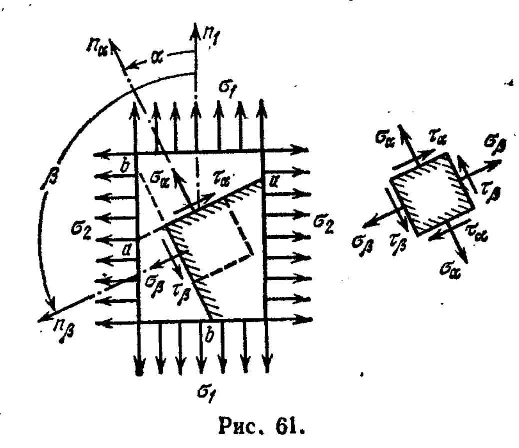


Рис. 61.

На гранях элементарного параллелепипеда, повернутого на некоторый угол α по отношению к направлениям главных напряжений σ_1 и σ_2, возникает система напряжений σ_α, σ_β, τ_α и τ_β, показанная на рис. 61. Касательные напряжения, образующие пары, которые поворачивают элемент по ходу часовой стрелки, будем считать *положительными*; на рис. 61 — это τ_α. Заметим, что это правило знаков для τ совпадает с принятым ранее (§ 27).

Из формул (6.5) и (6.6) видно, что величины нормальных и *касательных напряжений* по любой площадке зависят от угла наклона этой площадки.

Чтобы найти наибольшее значение нормального напряжения, исследуем выражение (6.5) на максимум. Взяв производную по α и приравняв ее нулю, получим

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\sigma_1 \cos\alpha \sin\alpha + 2\sigma_2 \sin\alpha \cos\alpha = 0,$$

или

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\alpha = 0. \tag{6.9}$$

Сопоставляя полученное выражение (6.9) с формулой (6.6), видим, что условие максимума для σ_α совпадает с условием равенства нулю касательных напряжений по соответствующим площадкам. Из этого же выражения следует, что $\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha$ получит наибольшее значение либо при $\alpha = 0$, либо при $\alpha = 90°$. Так как $\sigma_1 > \sigma_2$, то

$$\max \sigma_\alpha = \sigma_1 \quad (\text{при } \alpha = 0),$$
$$\min \sigma_\alpha = \sigma_2 \quad (\text{при } \alpha = 90°),$$

т. е. *наибольшее и наименьшее нормальные напряжения в данной точке* — это *главные напряжения* σ_1 *и* σ_2, *действующие по взаимно*

перпендикулярным площадкам, свободным от касательных напряжений.

Наибольшее значение касательных напряжений, как это видно из формулы (6.6), будет

$$\max \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (\text{при } \sin 2\alpha = 1, \text{ т. е. при } \alpha = 45^\circ). \quad (6.10)$$

Следовательно, наибольшие касательные напряжения равны полуразности главных напряжений и действуют по площадкам, наклоненным к главным площадкам на угол 45° и перпендикулярным к плоскости чертежа. По наклонным площадкам, параллельным σ_2, наибольшее касательное напряжение будет

$$\max \tau_2 = \frac{\sigma_1}{2}. \quad (6.10')$$

§ 31. Графическое определение напряжений (круг Мора)

Вычисление σ_α и τ_α по формулам (6.5) и (6.6) может быть заменено графическим построением (рис. 62).

Возьмем систему прямоугольных координат с осями σ и τ. Положительную ось σ направим вправо. Отложим на оси σ отрезки

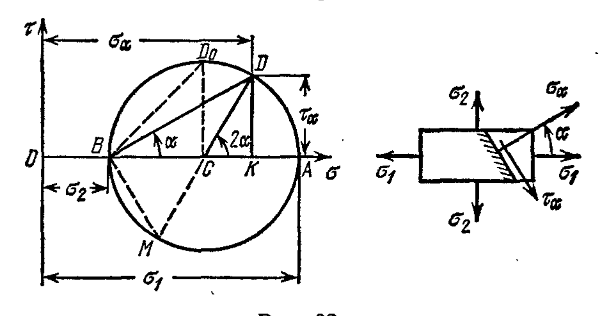


Рис. 62.

OA и OB, изображающие в определенном масштабе числовые величины напряжений σ_1 и σ_2 (ось σ удобно располагать параллельно наибольшему главному напряжению σ_1).

На рис. 62 оба эти напряжения приняты растягивающими и отложены на оси σ в положительном направлении. Если бы одно или оба эти напряжения были сжимающими, мы отложили бы их в противоположном направлении. Построим на отрезке AB, как на диаметре, круг с центром C, который назовем *кругом напряжений*. Тогда для нахождения нормального σ_α и касательного напряжения τ_α по площадке, нормаль к которой составляет с наибольшим глав-

ным напряжением σ_1 угол α, надо построить при точке C центральный угол 2α, откладывая его положительные значения от оси σ *против* часовой стрелки. Точка D круга напряжений будет *соответствовать* выбранной площадке; ее координаты OK и DK соответственно равны σ_α и τ_α. Это легко доказать. Из чертежа находим радиус круга напряжений

$$CD = AC = BC = \frac{AB}{2} = \frac{OA - OB}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2};$$

из прямоугольного треугольника KDC имеем

$$DK = CD \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \tau_\alpha.$$

Далее,

$$OK = OB + BC + CK = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha =$$
$$= \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}(1 + \cos 2\alpha) = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} 2\cos^2 \alpha =$$
$$= \sigma_2 + \sigma_1 \cos^2 \alpha - \sigma_2 \cos^2 \alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = \sigma_\alpha.$$

Таким образом, координаты точек окружности определяют напряжения. Величины σ_α измеряются отрезками по оси σ. Положительные σ_α отложены в положительном направлении оси σ. Величины τ_α измеряются отрезками, параллельными оси τ. Положительные τ_α направлены вверх, так как при принятых нами условиях значениям α от 0 до 90° соответствуют положительные величины τ_α; это же видно и из формулы

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha,$$

в которой за σ_1 выбрано *наибольшее* из главных напряжений.

Определив построением круга напряжения σ_α и τ_α, изобразим их на чертеже выделенного элемента, учитывая *знаки* этих напряжений (рис. 62). Напомним, что мы условились отсчитывать угол α, определяющий положение внешней нормали к рассматриваемой площадке, всегда от линии действия *наибольшего* (алгебраически) главного напряжения. Совместим поэтому линию действия наибольшего главного напряжения σ_1 с осью σ на круге; тогда линия BD, наклоненная к оси σ под углом α, будет параллельна нормали к рассматриваемой площадке, а значит, параллельна σ_α; линия BM будет параллельна τ_α.

Как видно из рис. 62, наибольшее значение касательных напряжений равно отрезку CD_0, т. е. радиусу круга напряжений

$$\max \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2};$$

соответствующий угол 2α равен 90° и угол $\alpha=45°$. В круге напряжений величина max τ_α изображается ординатой CD_0, абсциссой для которой служит $OC=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$, т. е. на той площадке, где $\tau_\alpha=\tau_{max}$, нормальное напряжение является средним.

Точно так же из рис. 62 видно, что *наибольшее* нормальное напряжение изображается отрезком OA и равно σ_1, а *наименьшее*— отрезком OB и равно σ_2. Отсюда следует, что величины нормальных напряжений по любой из рассматриваемых площадок с углом α заключаются между значениями главных напряжений σ_1 и σ_2.

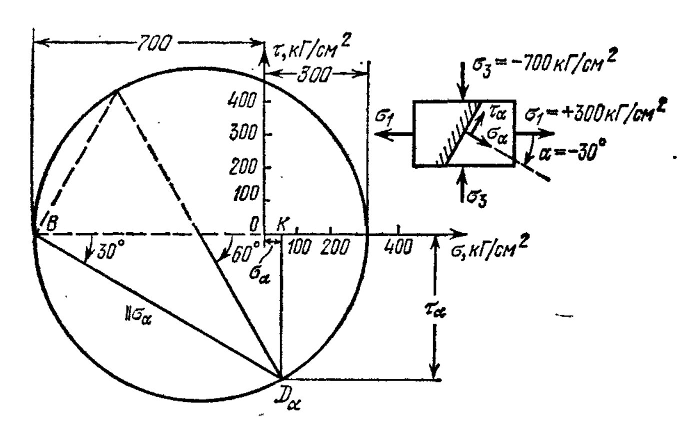


Рис. 63.

Таким образом, если при плоском напряженном состоянии известны главные напряжения в рассматриваемой точке, можно с помощью круга Мора найти величину и направление напряжений в материале по любой площадке, проведенной через эту точку.

Пусть, например, главные напряжения в некоторой точке материала равны: $\sigma_1=300$ *кГ/см²* и $\sigma_3=-700$ *кГ/см²*. Найдем нормальные и касательные напряжения по площадке, наклоненной на угол $\alpha=-30°$ к направлению σ_1. Построение выполнено на рис. 63. В принятом масштабе напряжения оказались равными: $\sigma_\alpha=50$ *кГ/см²*; $\tau_\alpha=-430$ *кГ/см²*. Их направления показаны на рис. 63 справа.

Пользуясь кругом напряжений, можно найти по известным главным напряжениям σ_1 и σ_2 напряжения *по двум взаимно перпендикулярным площадкам а—а* и *b—b*, нормали к которым (рис. 64) составляют углы α и β с направлением наибольшего главного напряжения σ_1.

В круге напряжений (рис. 64) при точке C построим угол 2α. Точка D_α будет соответствовать площадке $a—a$, а отрезки $D_\alpha K_\alpha$ и OK_α представят собой напряжения τ_α и σ_α по этой площадке.

Для нахождения напряжений по площадке $b—b$ надо построить угол 2β, т. е. прибавить 180° к углу 2α. Для этого надо лишь продолжить радиус CD_α; точка D_β соответствует площадке $b—b$.

Напряжения τ_β и σ_β представляются отрезками $D_\beta K_\beta$ и OK_β. Из чертежа ясно, что $\tau_\beta = -\tau_\alpha$, а

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const}.$$

Напряжения, действующие по граням элемента, вырезанного плоскостями a и плоскостями b, показаны на рис. 64 справа.

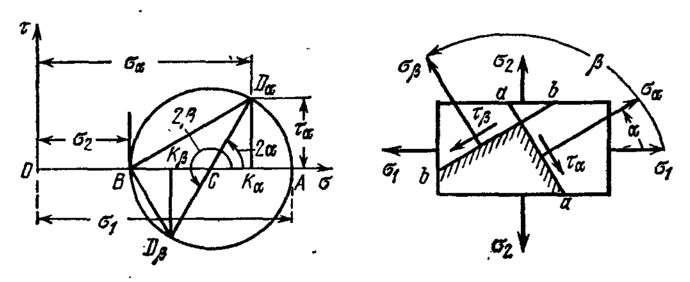


Рис. 64.

Совмещая на круге напряжений линию действия наибольшего (алгебраически) главного напряжения σ_1 с осью σ (рис. 64), получаем, что линия BD_α, соединяющая *левую крайнюю точку* круга с точкой D_α, параллельна напряжению σ_α; линия BD_β — напряжению σ_β; стрелки поставлены в соответствии с полученными знаками напряжений.

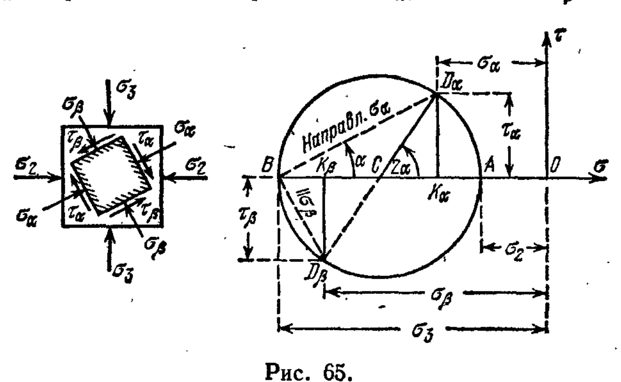


Рис. 65.

На рис. 65 изображено построение для случая, когда оба главных напряжения сжимающие.

§ 32. Нахождение главных напряжений при помощи круга

Иногда приходится решать задачу, *обратную* рассмотренной в предыдущем параграфе, т. е. по напряжениям σ_α, τ_α и σ_β, τ_β находить главные напряжения. Проще всего это сделать, пользуясь кругом напряжений.

Пусть известны нормальные и касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам с нормалями n_x и n_y

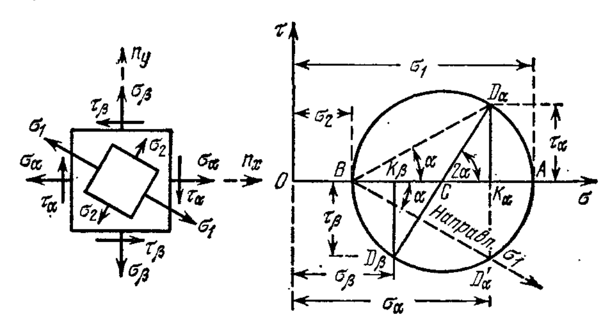


Рис. 66.

(рис. 66). Нормальное напряжение по вертикальной площадке (n_x) обозначим σ_α, а по горизонтальной — σ_β, так как они составляют с неизвестными пока главными напряжениями σ_i некоторые углы α и β ($\beta=\alpha+90^\circ$). Касательные напряжения соответственно обозначим τ_α и τ_β; по закону парности $\tau_\alpha=-\tau_\beta$. При построении круга примем для определенности, что $\sigma_\alpha>\sigma_\beta>0$ и что $\tau_\alpha>0$.

Нанесем напряжения σ_α, σ_β, τ_α и τ_β на систему координат искомого круга напряжений (рис. 66):

$$\sigma_\alpha=OK_\alpha;\quad \sigma_\beta=OK_\beta;\quad \tau_\alpha=K_\alpha D_\alpha;$$
$$\tau_\beta=K_\beta D_\beta;\quad \overline{K_\alpha D_\alpha}=-\overline{K_\beta D_\beta}.$$

Так как точки D_α и D_β, соответствующие взаимно перпендикулярным площадкам, должны лежать на противоположных концах диаметра круга, то точка пересечения линии $D_\alpha D_\beta$ с осью σ даст центр круга C. Описывая из точки C круг радиусом CD_α или CD_β, получим на оси σ отрезки OA и OB, изображающие главные напряжения: $OA=\sigma_1$ и $OB=\sigma_2$.

Направление σ_α на круге напряжений изображается прямой BD_α, наклоненной к оси σ на положительный угол α. Следовательно, чтобы перейти в круге напряжений от линии σ_1 к линии σ_α, надо отложить угол α *против часовой стрелки*, двигаясь от точки A к точке D_α. В нашем примере известным считается направление σ_α. Значит, чтобы на чертеже *рассматриваемого элемента* изобразить

искомое направление σ_1, надо от направления σ_α отложить угол α в обратную сторону, *по часовой стрелке*; относительное расположение напряжений σ_1 и σ_2, изображаемых на чертеже круга линиями OA и BD_α, должно быть сохранено и на чертеже элемента.

Можно дать и на круге напряжений истинное направление главного напряжения σ_1, совпадающее с получаемым, как сейчас описано, на чертеже элемента; для этого нужно от оси σ, параллельной направлению σ_α, отложить угол α из крайней левой точки B круга по часовой стрелке, иначе говоря, снести точку D_α в точку D'_α. Направление BD'_α теперь совпадет с направлением σ_1, а направление σ_2 будет к нему перпендикулярно. При изображении главных напряжений (в нашем примере σ_1 и σ_2) необходимо помнить об их *знаках*, полученных при построении круга, а также соблюдать правила нумерации главных напряжений.

Заметим, что в рассматриваемых задачах при плоском напряженном состоянии третье главное напряжение равно нулю. В соответствии с этим, если при построении круга оба главных напряжения получатся положительными (рис. 66), то большее будет σ_1, а меньшее σ_2; если одно положительное, а другое отрицательное, то первое будет σ_1, а второе σ_3; наконец, если оба отрицательны, то большее по абсолютной величине будет σ_3, а меньшее σ_2.

Величина угла α определяется формулами (рис. 66)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= -\frac{D'_\alpha K_\alpha}{CK_\alpha} = -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}, \\ \operatorname{tg}\alpha &= -\frac{D'_\alpha K_\alpha}{BK_\alpha} = -\frac{\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_2} = -\frac{\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.11)$$

Знак минус ставится потому, что при положительных значениях σ_α и τ_α угол α (угол поворота направления σ_α в главное направление) отсчитывается *по часовой стрелке*.

Пользуясь рис. 66, можно получить формулы для вычисления главных напряжений, изображаемых отрезками OA и OB, при плоском напряженном состоянии. Из чертежа имеем

$$\overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA} \quad \text{и} \quad \overline{OB} = \overline{OC} - \overline{CB}.$$

Далее,

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2}; \quad \overline{CK}_\alpha = \overline{CK}_\beta = \frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}.$$

Радиусы круга напряжений $CA = CB$, равные $CD_\alpha = CD_\beta$, равны

$$CA = CB = CD_\alpha = \sqrt{CK_\alpha^2 + K_\alpha D_\alpha^2} = \sqrt{\frac{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2}{4} + \tau_\alpha^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}.$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \overline{OA}\\ \sigma_2 &= \overline{OB}\end{aligned}\right\} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \pm \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}\right]. \qquad (6.12)$$

В практике часто приходится встречаться с такими случаями плоского напряженного состояния, когда $\sigma_\beta = 0$. Тогда формулы для главных напряжений примут вид

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \\ \sigma_3 &= \end{aligned}\right\} \frac{1}{2}\left[\sigma_\alpha \pm \sqrt{\sigma_\alpha^2 + 4\tau_\alpha^2}\right]. \qquad (6.13)$$

Здесь наименьшее главное напряжение обозначено через σ_3, так как оно отрицательно (поскольку подкоренное выражение больше σ_α).

Угол наклона первого главного напряжения к оси σ определяется формулами, вытекающими из (6.11):

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg} 2\alpha &= -\frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha},\\ &\text{или}\\ \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{\tau_\alpha}{\sigma_1}.\end{aligned}\right\} \qquad (6.14)$$

Ниже на примерах показано нахождение главных напряжений с помощью круга напряжений.

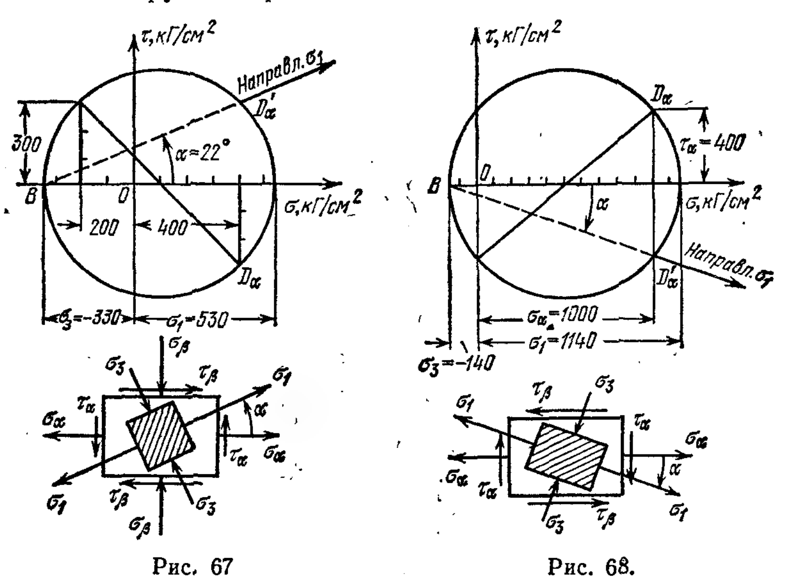


Рис. 67 Рис. 68.

Пусть известны напряжения в заданной точке материала, действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам: $\sigma_\alpha = 400$ *кГ/см²*; $\tau_\alpha = -300$ *кГ/см²*; $\sigma_\beta = -200$ *кГ/см²* и $\tau_\beta = 300$ *кГ/см²*. По этим данным построен круг Мора (рис. 67).

Главные напряжении оказались равными: $\sigma_1=530$ *кГ/см²*; $\sigma_3=-330$ *кГ/см²* ($\sigma_2=0$), а угол между направлениями σ_1 и $\sigma_\alpha-\alpha=22°$.

В другом примере: $\sigma_\alpha=1000$ *кГ/см²*; $\sigma_\beta=0$; $\tau_\alpha=400$ *кГ/см²* и $\tau_\beta=-400$ *кГ/см²*. Построение круга напряжений выполнено на рис. 68, из которого видио, что $\sigma_1=1140$ *кГ/см²*, а $\sigma_3=-140$ *кГ/см²*. На фасадной грани, лежащей в плоскости чертежа, $\sigma_2=0$.

Для обоих примеров учащимся рекомендуется вычислить главные напряжения аналитически по формуле (6.12) и сравнить с результатами графического решения.

§ 33. Напряжения при объемном напряженном состоянии

В общем случае объемного напряженного состояния по граням выделенного из материала элементарного кубика возникают и нормальные и касательные напряжения (рис. 69). По закону парности касательных напряжений $\tau_{xy}=\tau_{yx}$; $\tau_{xz}=\tau_{zx}$ и $\tau_{yz}=\tau_{zy}$ [1]). Совокупность шести напряжений σ_x, σ_y, σ_z и τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} полностью описывает напряженное состояние в точке и называется *тензором напряжений*.

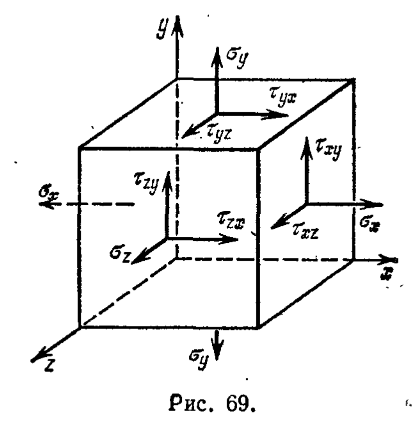


Рис. 69.

В теории упругости доказывается, что в окрестности любой точки напряженного материала всегда можно поворотом площадок выделить элементарный кубик, на гранях которого касательные напряжения равны нулю. В этом случае тензор напряжений определяется тремя главными напряжениями σ_1, σ_2 и σ_3. В частности, когда $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma$ (всестороннее равномерное растяжение или сжатие), тензор напряжений называют *шаровым*.

Пусть мы имеем выделенный из материала элементарный кубик, подвергающийся действию трех главных напряжений (рис. 70). Поставим задачу определения нормальных и касательных напряжений, возникающих по наклонным площадкам, приняв, что $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3>0$.

Сначала будем искать эти напряжения по площадкам, параллельным одному из главных напряжений, например σ_2. На рис. 70, *a* эта площадка заштрихована.

Как мы видели выше (§ 30), главное напряжение, параллельное проведенной площадке, не вызывает по ней ни нормальных, ни касательных напряжений. Поэтому напряжения по рассматривае-

[1]) Индексы при τ показывают: первый — по какой площадке они действуют (направления нормали к ней), а второй — направление касательиого напряжеиия (параллельно какой оси τ направлено).

мым площадкам будут зависеть лишь от σ_1 и σ_3 — для них мы будем иметь дело с плоским напряженным состоянием. Тогда этим площадкам будут соответствовать точки круга напряжений, построенного на главных напряжениях σ_1 и σ_3 (рис. 71).

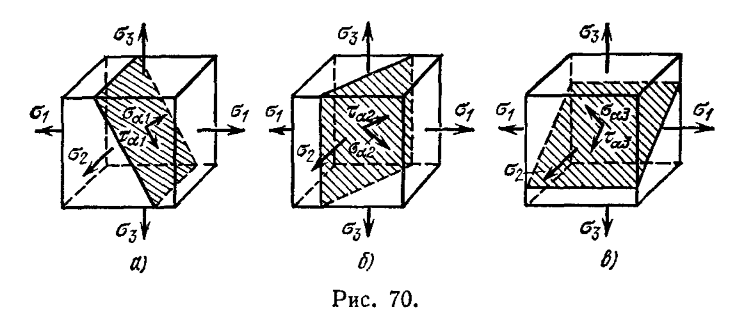


Рис. 70.

Точно так же напряжения по площадкам, направленным параллельно σ_3 (рис. 70, *б*), будут изображаться координатами точек круга, построенного на напряжениях σ_1 и σ_2; для площадок, параллельных σ_1 — на напряжениях σ_2 и σ_3 (рис. 70, *в*).

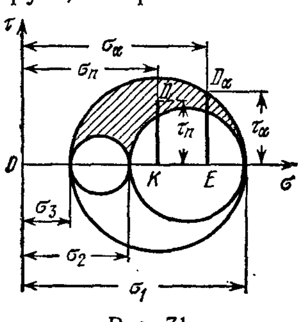


Рис. 71.

Таким образом, координаты точек трех кругов напряжений (рис. 71) изображают нормальные и касательные напряжения по сечениям кубика, параллельным одному из главных напряжений.

Что же касается площадок, пересекающих все три оси главных напряжений, то в теории упругости показано, что для них напряжения σ_n и τ_n изображаются координатами точек D заштрихованной на рис. 71 площади.

Значения этих напряжений могут быть вычислены по формулам

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3, \qquad (6.15)$$

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_n^2}. \qquad (6.16)$$

Здесь α_1, α_2 и α_3 — углы, составленные нормалью n к площадке, с направлениями соответствующих главных напряжений σ_1, σ_2 и σ_3.

Из рис. 71 ясно, что в случае объемного напряженного состояния наибольшее и наименьшее нормальные напряжения равны соответственно наибольшему и наименьшему *главным* напряжениям.

Наибольшее касательное напряжение равно радиусу наибольшего круга, следовательно, полуразности наибольшего и наимень-

шего главных напряжений. Оно действует по площадкам, наклоненным под углом 45° к направлению этих главных напряжений, причем нормальные напряжения на таких площадках равны полусумме наибольшего и наименьшего главных напряжений ($\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$).

Таким образом, в общем случае напряженного состояния материала, когда в рассматриваемой точке все три главных напряжения не равны нулю, получаем

$$\max\sigma_n=\sigma_1;\quad \min\sigma_n=\sigma_3;\quad \max\tau_n=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}. \tag{6.17}$$

По площадкам, параллельным одному из главных напряжений и наклонным к двум другим на угол 45°, касательные напряжения будут $\max\tau=\tau_{1,3}$ по формуле (6.17); далее:

$$\tau_{1,2}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2};\quad \tau_{2,3}=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}. \tag{6.17'}$$

Напряжения $\tau_{1,2}$, $\tau_{1,3}$ и $\tau_{2,3}$ иногда называют *главными касательными напряжениями*.

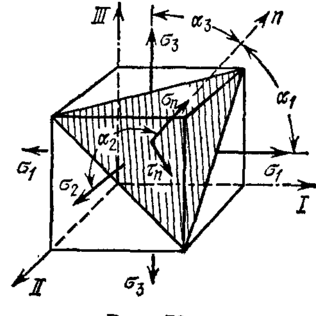


Рис. 72.

Для проверки прочности материала при сложном напряженном состоянии (см. ниже, глава VII) представляет интерес величина напряжений, возникающих по так называемой *октаэдрической площадке*, нормаль к которой составляет *равные углы* с направлениями всех трех главных напряжений (рис. 72). Имея в виду, что

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1,$$

а при равенстве углов ($\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha$) $3\cos^2\alpha=1$, или $\cos^2\alpha=1/3$, из формул (6.15) и (6.16) получим

$$\sigma_{\text{окт}}=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\sigma_{\text{ср}}, \tag{6.18}$$

$$\tau_{\text{окт}}=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2}. \tag{6.19}$$

Используя выражения (6.17) для главных касательных напряжений, получим

$$\tau_{\text{окт}}=\frac{2}{3}\sqrt{\tau_{1,2}^2+\tau_{2,3}^2+\tau_{1,3}^2}. \tag{6.19'}$$

Из выражений (6.18) и (6.19) видно, что *октаэдрическое нормальное напряжение равно среднему* из трех главных напряжений, а *октаэдрическое касательное* напряжение пропорционально *геометрической сумме* главных касательных напряжений.

В главе VII будет также использовано выражение типа (6.19), называемое *интенсивностью* напряжений и характеризующее степень развития их в напряженном материале

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2}. \qquad (6.20)$$

Легко видеть, что при $\sigma_2=\sigma_3=0$, т. е. при простом растяжении, интенсивность $\sigma_i=\sigma_1$.

§ 34. Деформации при сложном напряженном состоянии

При проверках прочности элемента (рис. 56), на грани которого действуют напряжения σ_1, σ_2, σ_3, нам придется столкнуться с вопросом о величинах соответствующих деформаций. Называя ребро, параллельное главному напряжению σ_1, первым, а ребра, параллельные главным напряжениям σ_2 и σ_3, вторым и третьим, определим относительные продольные деформации элемента в направлении этих ребер, отдельно рассматривая влияние каждого из напряжеиий и складывая результаты.

Под действием напряжений σ_1 элемент в направлении первого ребра получит относительное удлинение, равное

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}.$$

В то же время по отношению к напряжениям σ_2 и σ_3 первое ребро является *поперечным* размером, а потому под действием напряжений σ_2 и отдельно σ_3 элемент в направлении первого ребра испытывает относительные укорочения, равные (см. § 9)

$$\varepsilon_1'' = -\mu\frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_1''' = -\mu\frac{\sigma_3}{E}.$$

Полная относительная деформация элемента в направлении первого ребра выразится суммой

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''' = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_3}{E}.$$

Подобные же выражения получим и для деформаций в двух других направлениях; в результате имеем

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_3}{E}, & \qquad \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2+\sigma_3)],\\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_3}{E}, & \text{или} \qquad \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_1+\sigma_3)],\\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_1}{E}, & \qquad \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1+\sigma_2)]. \end{aligned}\right\} \qquad (6.21)$$

Если какие-либо из напряжений σ_1, σ_2, σ_3 будут сжимающими, то соответствующие числовые значения их необходимо ввести в формулы (6.21) со знаком минус.

Из формул (6.21) можно сейчас же получить выражения для случая растяжения или сжатия по двум направлениям — тогда одно из главных напряжений следует положить равным нулю. Например, для случая, показанного на рис. 60, имеем

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_3 = -\mu\frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E}. \quad (6.21а)$$

Вычислим изменение объема прямоугольного параллелепипеда со сторонами, равными a, b и c, в общем случае напряженного состояния. До деформации объем его равен $V_0 = abc$. После деформации, вследствие изменения длины ребер, объем его станет

$$V_1 = (a+\Delta a)(b+\Delta b)(c+\Delta c),$$

или, пренебрегая произведениями малых деформаций:

$$V_1 = abc + ab\cdot\Delta c + ac\cdot\Delta b + bc\cdot\Delta a = V_0(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3).$$

Относительное изменение объема равно

$$\varepsilon_0 = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (6.22)$$

Заменяя сумму относительных удлинений некоторым средним

$$\varepsilon_{ср} = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3},$$

можно выразить относительное изменение объема

$$\varepsilon_0 = 3\varepsilon_{ср}. \quad (6.22')$$

Подставляя в (6.22) значения ε_1, ε_2, ε_3 из (6.21), получим

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (6.23)$$

Из формулы (6.23) следует, что если коэффициент Пуассона $\mu = 0,5$, то относительное изменение объема *равно нулю*. Это было получено и ранее для случая одноосного напряженного состояния (§ 9). Из той же формулы видно также, что *если сумма трех главных напряжений равна нулю, то изменения объема при упругой деформации не произойдет.*

Заметим также, что формулы (6.21), (6.22) и (6.23) можно использовать и для произвольно ориентированного элемента материала, по граням которого действуют и нормальные и касательные напряжения (рис. 69), для чего достаточно подставить вместо σ_1, σ_2 и σ_3 нормальные напряжения σ_x, σ_y и σ_z, а ε_1, ε_2 и ε_3 заменить на ε_x, ε_y и

ε_z. Как показано ниже (§ 36), касательные напряжения не вызывают ни удлинений, ни изменеиия объема.

Возвратимся к формуле (6.23), из которой видно, что изменение объема зависит не от соотношения между главными напряжениями, а лишь от их суммы. Значит, кубик получит такое же изменение объема, если к его граням будут приложены одинаковые средние напряжения

$$\sigma_{ср}=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}.$$

Относительное изменение объема в этом случае выразится

$$\varepsilon_0=\frac{1-2\mu}{E}\cdot 3\sigma_{ср}. \tag{6.23'}$$

Величину $K=\frac{E}{3(1-2\mu)}$ называют *объемным модулем упругости*. Введя его в формулы (6.23), получим

$$\varepsilon_0=\frac{\sigma_{ср}}{K}=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3K}, \tag{6.24}$$

или

$$\sigma_{ср}=K\cdot\varepsilon_0=3K\cdot\varepsilon_{ср}. \tag{6.24'}$$

Формулы (6.24) выражают объемный закон Гука, подобный закону Гука при простом растяжении. Из этих формул видно, что если к граням кубика приложить равные средние напряжения $\sigma_{ср}=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}$, образующие шаровой тензор, то все ребра кубика получат одинаковую относительную деформацию

$$\varepsilon_{ср}=\frac{\sigma_{ср}}{3\cdot K}; \tag{6.25}$$

в этом случае изменение объема не будет сопровождаться изменением формы — кубик остается кубиком, изменившим лишь размеры. Поэтому, если нас интересуют вопросы об изменении объема и формы при сложном напряженном состоянии, удобно представить каждое из главных напряжений в виде суммы из двух напряжений

$$\sigma_1=\sigma_{ср}+\sigma_1'; \quad \sigma_2=\sigma_{ср}+\sigma_2'; \quad \sigma_3=\sigma_{ср}+\sigma_3'.$$

Тогда заданный тензор напряжений, образуемый главными напряжениями σ_1, σ_2 и σ_3, можно разбить на два: шаровой (из равных напряжений $\sigma_{ср}$) и дополняющий его до заданного — так называемый *девиатор напряжений* (рис. 73), представляющий собой систему нормальных напряжений, равных

$$\sigma_1'=\sigma_1-\sigma_{ср}; \quad \sigma_2'=\sigma_2-\sigma_{ср} \quad и \quad \sigma_3'=\sigma_3-\sigma_{ср}.$$

Нетрудно видеть, что сумма этих «дополняющих» напряжений равна нулю. Действительно, $\sigma'_1+\sigma'_2+\sigma'_3=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-3\sigma_{ср}=0$, и поэтому они не вызывают изменения объема (§ 34). Девиатор напряжений (рис. 73 справа) отвечает лишь за изменение формы.

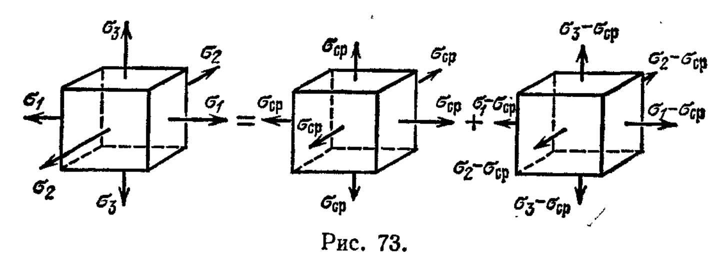


Рис. 73.

Вопросы об изменении объема и формы встретятся ниже при обсуждении проблемы прочности материала при сложном напряженном состоянии (глава VII).

§ 35. Потенциальная энергия упругой деформации при сложном напряженном состоянии

Потенциальной энергией деформации называется энергия, накапливаемая в материале в результате упругой деформации, вызванной действием внешних сил.

Для вычисления потенциальной энергии, накопленной упругой системой, можно воспользоваться законом сохранения энергии.

Рассмотрим сначала случай простого растяжения (рис. 74). Если мы будем нагружать стержень статически, путем постепенного подвешивания очень малых грузов ΔP, то при добавлении каждого такого груза подвешенная часть нагрузки опустится и потенциальная энергия ее уменьшится, а потенциальная энергия деформации растянутого стержня возрастет.

При медленном, постепенном возрастании нагрузки скорость перемещения свободного конца стержня будет весьма мала. Поэтому силами инерции перемещающихся масс можно пренебречь, и, значит, можно считать, что деформация стержня не будет сопровождаться изменением кинетической энергии системы.

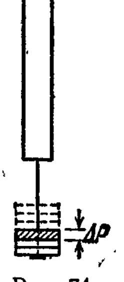


Рис. 74.

При этих условиях потенциальная энергия груза при его опускании преобразуется в потенциальную энергию упругой деформации стержня (рассеиванием энергии за счет тепловых и электромагнитных явлений, сопровождающих упругую деформацию, пренебрегаем). Таким образом, упругую систему при статическом действии сил можно рассматривать как своеобразную машину, преобразующую один вид потенциальной энергии в другой.

Так как количество потенциальной энергии, потерянной грузом, численно равно работе, произведенной им при опускании, то задача об определении потенциальной энергии деформации сводится к вычислению работы внешних сил. При простом растяжении (§ 10) для работы внешних сил было получено (3.1)

$$A=\frac{P\Delta l}{2},$$

значит, и потенциальная энергия растяжения (при $\Delta l=Pl/(EF)$)

$$U=A=\frac{P^2l}{2EF}=\frac{\sigma^2Fl}{2E}. \qquad (6.26)$$

Количество потенциальной энергии, накапливаемое в единице объема (3.2):

$$u=a=\frac{\sigma^2}{2E}=\frac{\sigma\varepsilon}{2}. \qquad (6.27)$$

Теперь перейдем к определению количества потенциальной энергии, накапливаемой в единице объема материала, находящегося в условиях сложного (объемного и плоского) напряженного состояния. Пользуясь принципом независимости и сложения действия сил и предполагая постепенное возрастание главных напряжений, подсчитаем потенциальную энергию как сумму энергий, накапливаемых в единице объема материала под действием каждого из главных напряжений σ_1, σ_2 и σ_3 по формуле (6.27)

$$u=a=\frac{\sigma_1\varepsilon_1}{2}+\frac{\sigma_2\varepsilon_2}{2}+\frac{\sigma_3\varepsilon_3}{2},$$

где ε_1, ε_2 и ε_3 — относительные удлинения, вычисляемые по формулам (6.21). Следовательно, удельная энергия деформации в этом случае будет

$$u=\frac{1}{2}\left[\sigma_1\left(\frac{\sigma_1}{E}-\mu\frac{\sigma_2}{E}-\mu\frac{\sigma_3}{E}\right)+\sigma_2\left(\frac{\sigma_2}{E}-\mu\frac{\sigma_1}{E}-\mu\frac{\sigma_3}{E}\right)+\right.$$
$$\left.+\sigma_3\left(\frac{\sigma_3}{E}-\mu\frac{\sigma_1}{E}-\mu\frac{\sigma_2}{E}\right)\right],$$

или, после раскрытия скобок,

$$u=\frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\mu\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3\right)\right]. \qquad (6.28)$$

Таким образом, *полная энергия* деформации, накапливаемая в единице объема материала (кубик со сторонами, равными единице длины), может быть определена по формуле (6.28). Эта энергия может рассматриваться как состоящая из двух частей: 1) энергии u_0, накапливаемой за счет изменения объема v рассматриваемого кубика (т. е. одинакового изменения всех его размеров без изменения кубической формы), и 2) энергии $u_ф$, связанной с изменением формы ку-

бика (т. е. энергии, расходуемой на превращение кубика в параллелепипед).

Такое разделение потенциальной энергии на две части оказывается удобным при дальнейшем рассмотрении вопроса о прочности материала при объемном напряженном состоянии (глава VII).

Подсчитаем величину обеих составляющих удельной потенциальной энергии. Выше было показано (§ 34), что при одинаковой деформации ребер кубика, т. е. при изменении *только объема*, относительное удлинение каждого ребра равно (формула (6.25))

$$\varepsilon_{ср} = \frac{\sigma_{ср}}{3K},$$

где $\sigma_{ср} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$, а объемный модуль упругости

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}.$$

Тогда энергия изменения объема будет

$$u_0 = 3 \cdot \frac{\sigma_{ср}\varepsilon_{ср}}{2} = \frac{\sigma_{ср}^2}{2K} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{18K},$$

или

$$u_0 = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \qquad (6.29)$$

Потенциальная энергия, соответствующая изменению формы выделенного элемента материала, теперь найдется как разность

$$u_ф = u - u_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] - \frac{1-2\mu}{6E} [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3]^2.$$

Произведя вычисления, получим

$$u_ф = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3). \qquad (6.30)$$

Формулу (6.30) можно выразить и через октаэдрические напряжения (6.19), представив выражение в скобках как разность квадратов:

$$u_ф = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] = \frac{3(1+\mu)}{2E} \tau_{окт}^2. \qquad (6.30')$$

При простом растяжении, когда $\sigma_1 = \sigma = P/F$, $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_3 = 0$, удельная потенциальная энергия, связанная с изменением объема элементарного кубика,

$$u_0 = \frac{(1-2\mu)\sigma^2}{6E}, \qquad (6.31)$$

а потенциальная энергия формоизменения

$$u_ф = \frac{(1+\mu)\,\sigma^2}{3E}. \tag{6.32}$$

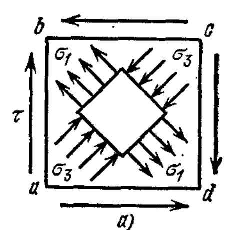
Разумеется, сумма их дает полную удельную энергию растяжения

$$u = u_0 + u_ф = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

§ 36. Чистый сдвиг. Напряжения и деформации. Закон Гука. Потенциальная энергия

А. При исследовании сложного напряженного состояния (§ 33) было обнаружено, что, как и при простом растяжении или сжатии (§ 27) по площадкам, наклоненным к направлению главных напряжений, возникают как нормальные напряжения, связанные с удлинением (или укорочением), так и касательные, соответствующие деформации сдвига.

Для изучения деформации сдвига желательно найти такие площадки, по которым действуют только касательные напряжения, т. е. площадки, свободные от нормальных напряжений. Анализ формул (6.5) и (6.6) показывает, что для случая плоского напряженного состояния при некоторых условиях (при $\alpha=45°$ и при $\sigma_1+\sigma_3=0$) нормальные напряжения по наклонной площадке



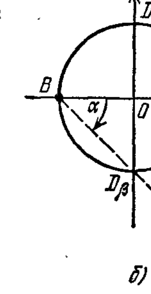


Рис. 75.

Рис. 76.

обращаются в нуль ($\sigma_\alpha=\sigma_\beta=0$); действуют лишь касательные напряжения $\tau_\alpha=\tau_{max}$.

Такой вид напряженного состояния, при котором по граням выделенного из материала элемента возникают только касательные напряжения, называется *чистым сдвигом*.

Рассмотрим элемент кубической формы (рис. 75), по взаимно перпендикулярным граням которого ab и bc приложены равные

и противоположно направленные касательные напряжения τ (напомним, что $\tau_\alpha = -\tau_\beta$). По фасадной грани *abcd* нет ни нормальных, ни касательных напряжений, следовательно, эта грань — главная площадка, на которой главное напряжение равно нулю. Два других главных напряжения можно найти путем решения обратной задачи — определения их по известным напряжениям, действующим по двум взаимно перпендикулярным площадкам (§ 32). Воспользуемся для этой цели построением круга Мора по следующим данным:

по вертикальной грани $\sigma_\alpha = 0$, $\tau_\alpha = \tau$,

по горизонтальной грани $\sigma_\beta = 0$, $\tau_\beta = -\tau$.

Поскольку нормальные напряжения, откладываемые на оси абсцисс, равны нулю, от точки O (рис. 76, *б*) отложим вверх отрезок $OD_\alpha = \tau_\alpha = \tau$, вниз — отрезок $OD_\beta = \tau_\beta = -\tau$. Так как точки D_α и D_β лежат на концах диаметра круга Мора, то радиус его равен $OD_\alpha = \tau$. Отрезки, отсекаемые окружностью на оси абсцисс, OA и OB также равны радиусам и определяют значения главных напряжений

$$OA = \sigma_1 = \tau; \quad OB = \sigma_3 = -\tau; \quad \sigma_2 = 0. \tag{6.33}$$

К таким же результатам можно прийти, воспользовавшись формулами (6.12), если положить в них $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$ и $\tau_\alpha = \tau$.

Направление главного напряжения σ_1 показано на круге линией BD_β и составляет угол 45° с нормалью к площадке *bc*. Это следует также из формулы (6.11). Элемент, выделенный в окрестности той же точки главными площадками (рис. 76, *а*), растягивается напряжениями σ_1 в направлении диагонали *bd* и сжимается напряжениями σ_3 вдоль диагонали *ac*. Это можно доказать и иначе из условия равновесия части кубика, отсеченной диагональной плоскостью (рис. 77).

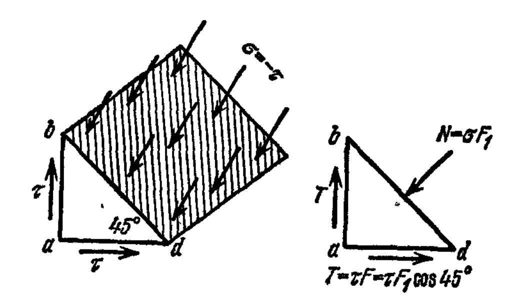


Рис. 77.

Следовательно, чистый сдвиг эквивалентен комбинации двух равных по величине главных напряжений — одного растягивающего и другого сжимающего (третье равно нулю). Иначе говоря, это *частный случай плоского напряженного состояния* при $\sigma_1 = -\sigma_3$. По площадкам, наклоненным на угол 45° к направлению главных напряжений, возникают только касательные напряжения, под действием которых элемент подвергается деформации сдвига. В то же время материал этого элемента в направлении главных напряжений работает на растяжение и сжатие. Заметим, что

деформация сдвига непременно сопровождается и деформацией растяжения — сжатия, как и деформация растяжения или сжатия — сдвигом.

Б. Обратимся к рассмотрению деформации при чистом сдвиге. Пусть элемент материала в виде кубика находится в условиях чистого сдвига (рис. 78).

Если мы закрепим грань AB этого элемента неподвижно, то под действием касательных напряжений грань CD сдвинется параллельно AB на некоторую величину $DD_1 = CC_1 = \Delta s$, называемую *абсолютным* сдвигом. Элемент $ABCD$ перекосится, прямые углы обратятся в острые или тупые, изменившись на величину γ. Этот угол называется *относительным* сдвигом, или углом сдвига, и служит мерой искажения (перекоса) углов прямоугольника. Поскольку в конструкциях мы имеем дело лишь с упругими деформациями, этот угол будет весьма малым.

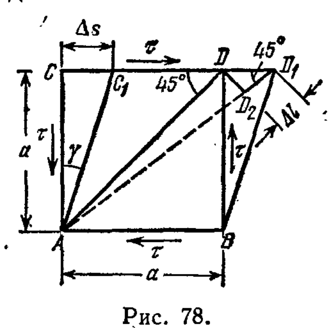


Рис. 78.

Относительный сдвиг связан по своей величине с абсолютным сдвигом и расстоянием a между плоскостями AB и CD:

$$\gamma = \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{a}, \tag{6.34}$$

т. е. относительный сдвиг равен абсолютному, деленному на расстояние между сдвигающимися плоскостями.

Можно показать, что величина относительного сдвига будет пропорциональна напряжениям τ; таким образом, именно относительный сдвиг, величина перекоса элемента, и является тем, что характеризует числовым образом деформацию сдвига.

Для установления зависимости между γ и τ рассмотрим рис. 78. При перекосе нашего элемента диагональ AD удлиняется. Это удлинение можно связать, с одной стороны, с действующими напряжениями, с другой — с относительным сдвигом; комбинируя обе зависимости, найдем связь между τ и γ.

На рис. 78 абсолютное удлинение диагонали мы получим, если из точки A радиусом, равным AD, сделаем засечку на новом положении этой диагонали — AD_1. Тогда получаем прямоугольный треугольник DD_1D_2, в котором сторона DD_1 — абсолютный сдвиг Δs, сторона D_2D_1 — удлинение диагонали Δl; угол при точке D_1 может быть по малости деформаций принят равным 45°. Тогда

$$\Delta l = \Delta s \cos 45°.$$

Относительное удлинение диагонали

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

где

$$l=\frac{a}{\sin 45^\circ}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon=\frac{\Delta s}{a}\cos 45^\circ \sin 45^\circ;$$

так как $\Delta s/a=\gamma$, а $\cos 45^\circ \sin 45^\circ=0{,}5$, то

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\gamma. \qquad (6.35)$$

С другой стороны, относительное удлинение диагонали, вызванное действием главных напряжений $\sigma_1=\tau$ и $\sigma_3=-\tau$ (рис. 76, *а*), может быть выражено формулой (6.21)

$$\varepsilon=\varepsilon_1=\frac{\sigma_1}{E}-\mu\frac{\sigma_3}{E}=\frac{\tau}{E}(1+\mu).$$

Подставив это значение ε в формулу (6.34), получим

$$\frac{\tau}{E}(1+\mu)=\frac{1}{2}\gamma,$$

откуда

$$\tau=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma. \qquad (6.36)$$

Таким образом, относительный сдвиг γ и касательное напряжение τ друг другу пропорциональны, т. е. при сдвиге напряжение и соответствующая ему относительная деформация связаны законом Гука.

Обозначив коэффициент пропорциональности $\frac{E}{2(1+\mu)}$, связывающий τ и γ, буквой G, получим

$$\tau=G\gamma, \qquad (6.37)$$

где

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}. \qquad (6.38)$$

Величину G называют *модулем упругости при сдвиге*, а выражение (6.37) — законом Гука при сдвиге. Как мы видим, оно вполне аналогично выражению закона Гука при растяжении ($\sigma=E\varepsilon$). G, как и E, имеет размерность напряжений.

Так как в формуле (6.38) из трех так называемых упругих постоянных E, μ и G независимыми являются лишь две, то третью G можно вычислить через две первые; но можно также найти ее и прямым путем из опытов на кручение круглых стержней (глава IX).

Величина *абсолютного* сдвига зависит не только от величины касательных напряжений, но и от размеров выделенного элемента. Назовем площадь граней, по которым действуют касательные напряжения, F; расстояние между параллельными гранями обозначено через a (рис. 78), а усилие, действующее вдоль этой грани и складывающееся из напряжений τ (в предположении равномерного их распределения по площади F), $Q=\tau F$. Подставляя τ и γ в равенство (6.37), получим

$$\frac{Q}{F}=\frac{\Delta s}{a}G, \quad \text{откуда} \quad \Delta s=\frac{QS}{GF}. \tag{6.39}$$

Абсолютный сдвиг прямо пропорционален сдвигающей силе, расстоянию между сдвигаемыми гранями и обратно пропорционален площади сечения этих граней и модулю упругости при сдвиге. То есть мы имеем формулу, выражающую закон Гука для деформации сдвига, вполне подобную формуле для вычисления абсолютного удлинения при растяжении:

$$\Delta l=\frac{Pl}{EF}.$$

Пользуясь выражением (6.39), можно определить и потенциальную энергию сдвига через работу сил Q. Считая, что усилие Q приложено статически, постепенно возрастая от нуля до конечного значения, выразим работу этого усилия на перемещении Δs. Эта работа выражается площадью треугольника и равна

$$A=\frac{1}{2}Q\cdot\Delta s.$$

Подставляя Δs из равенства (6.39), получим

$$U=\frac{Q^2a}{2GF}=\frac{\tau^2Fa}{2G}. \tag{6.40}$$

Поделив на объем $v=aF$, найдем значение удельной потенциальной энергии при чистом сдвиге:

$$u=\frac{U}{v}=\frac{\tau^2}{2G}. \tag{6.41}$$

К такому же результату можно было прийти на основании формулы (6.28) § 35, рассматривая чистый сдвиг как сложное напряженное состояние при главных напряжениях: $\sigma_1=\tau$; $\sigma_2=0$; $\sigma_3=-\tau$.

Заметим, что вся потенциальная энергия при чистом сдвиге расходуется *только на изменение формы*, так как изменение объема при деформации сдвига равно нулю. Это видно из формулы (6.23), если учесть, что при чистом сдвиге сумма главных напряжений равна нулю.

Глава VII

ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛА ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

§ 37. Сопротивление разрушению. Отрыв и срез

В §§ 16 и 17 вкратце уже были рассмотрены некоторые вопросы, связанные с проверкой прочности элементов конструкций при линейном напряженном состоянии. Известно, что при расчетах конструкций среди других условий должно быть выполнено условие прочности, требующее, чтобы наибольшее напряжение в каждой детали машины или сооружения не превышало величины допускаемого напряжения, составляющего некоторую долю опасного напряжения. Для назначения допускаемого напряжения необходимо изучить поведение материала при его деформировании от начала нагружения вплоть до момента разрушения. Последнее нужно также и для других целей — например, для управления процессами пластической обработки материалов (волочение, штамповка, прокатка, ковка, резание металлов, прессование слоистых пластиков и других материалов).

Экспериментальное изучение поведения материалов под нагрузкой при линейном растяжении или сжатии на машинах, имеющихся в лабораториях испытания материалов, не встречает затруднеиий. Полученные в результате экспериментов диаграммы растяжения или сжатия дают наглядное представление о сопротивлении материала упругому и пластическому деформированию и позволяют определить такие важные для оценки прочности и назначения допускаемого напряжения механические характеристики, как предел текучести и предел прочности или временное сопротивление материала.

Поведение материала под нагрузкой зависит от его свойств и вида напряженного состояния. В одних случаях вплоть до разрушения деформация оказывается более или менее точно пропорциональной напряжению; разрушение наступает при отсутствии пластических деформаций (рис. 25). В других — после упругой деформации развиваются значительные пластические деформации, заканчивающиеся разрушением (рис. 16 и 18); непрерывно растущая пластическая деформация может и не приводить к разрушению (рис. 24).

Первая диаграмма (рис. 25) описывает поведение хрупкого материала при линейном растяжении или сжатии. Опасным состоянием в этом случае, очевидно, следует считать разрушение, а опасным напряжением — предел прочности материала. При растяжении разрушение происходит по площадке, перпендикулярной направлению растягивающей силы, а при сжатии (с неоднократной смазкой торцов образца, соприкасающихся с плитами пресса) —

по площадкам, параллельным направлению сжимающей силы (рис. 28). В том и другом случае разрушение происходит путем отделения частиц материала друг от друга — *путем отрыва*, причиной которого при растяжении можно считать как наибольшее растягивающее нормальное напряжение, так и наибольшее удлинение в направлении действия растягивающей силы. При сжатии причиной разрушения, по-видимому, можно считать значительную деформацию растяжения в направлении, перпендикулярном действию сжимающей силы. Необходимо отметить, что разрушение хрупких материалов при сжатии нередко происходит по площадкам, наклоненным к направлению сжимающей нагрузки под некоторым углом; поэтому можно предположить, что разрушение носит более сложный характер, чем описано выше, и причиной его являются одновременно нормальные и касательные напряжения, развивающиеся на этих наклонных площадках (подробно см. в § 40, Б).

Вторая диаграмма изображает поведение пластичного материала при линейном растяжении (на рис. 18 приведена истинная диаграмма растяжения). За опасные состояния в этом случае могут быть приняты: начало текучести, начало образования шейки и разрушение материала. Опасными напряжениями соответственно будут: предел текучести, временное сопротивление и истинное напряжение в момент разрушения. Появление линий сдвигов (линий Чернова — Людерса) при возникновении остаточных деформаций (рис. 13) и разрушение образцов по поверхностям, наклоненным к направлению растягивающей силы под углом $\pi/4$ (§ 27), дают основание считать, что как образование и развитие пластических деформаций, так и разрушение происходит за счет скольжений и сдвигов под действием наибольших касательных напряжений; такой вид разрушения называется разрушением *путем среза*.

Третья диаграмма описывает поведение пластичного материала при сжатии (на рис. 24 показана диаграмма сжатия), когда пластическое деформирование не приводит к разрушению. Опасным состоянием следует считать начало текучести, а опасным напряжением — предел текучести, величина которого мало отличается от величины предела текучести пластичного материала при растяжении. Образование и развитие пластических деформаций и в этом случае происходит за счет сдвигов под действием касательных напряжений.

Упомянутые выше два различных представления о разрушении материала: 1) как о явлении отрыва, обусловленном деформациями удлинения или преимущественно действием нормальных растягивающих напряжений, и 2) как о явлении среза или скалывания, обусловленном преимущественно действием касательных напряжений, известны уже давно. Исходя из этих представлений, потребовалось различать и два вида сопротивления материалов разрушению: *сопротивление отрыву и сопротивление срезу*.

До последнего времени считалось, что каждый материал может обладать *только одним каким-либо видом* сопротивления разрушению — или сопротивлением отрыву, или сопротивлением срезу. Однако такое одностороннее представление о явлении разрушения не позволило найти общее решение вопроса о прочности материалов.

В противовес ему в самые последние годы у нас было выдвинуто иное, экспериментально обоснованное предположение, что каждый материал в зависимости от того, в какие условия он будет поставлен, может разрушаться как путем отрыва, так и путем среза и может поэтому обладать как тем, так и другим видом сопротивления разрушению. Этот новый взгляд на вопросы разрушения способствовал разрешению целого ряда противоречий и неясностей, возникавших при рассмотрении явления разрушения на основе прежних представлений. Поэтому именно этот взгляд на современном этапе развития учения о прочности материалов следует считать наиболее правильным.

Возможность разрушения материала путем отрыва, неоднократно подтвержденная опытами, до сих пор не подвергалась каким-либо сомнениям. Наоборот, в последнее время многие ученые были склонны приписывать отрыву вообще все случаи разрушения материала.

Характер разрушения при отрыве зависит как от рода материала, так равно и от вида напряженного состояния; принципиально в одних случаях возможен хрупкий отрыв — без остаточных деформаций, в других — вязкий отрыв, сопровождающийся более или менее значительными пластическими деформациями. Так, например, экспериментально установлено, что некоторые бронзы и алюминиевые сплавы способны разрушаться путем отрыва даже при остаточной деформации около 20%.

Наиболее отчетливо характеристики сопротивления отрыву выявляются при испытаниях хрупких неметаллических материалов (стекла, пластмасс, бетона, камня).

Получение характеристики сопротивления отрыву для пластичных материалов оказывается весьма затруднительным, так как при испытаниях, как правило, не удается миновать стадии пластических деформаций, а следовательно, и значительных касательных напряжений. В связи с тем, что у пластичных материалов сопротивление разрушению от касательных напряжений (срезу) значительно ниже сопротивления отрыву, при обычных испытаниях этих материалов не удается достигнуть сопротивления отрыву, так как раньше происходит разрушение путем среза. Поэтому для определения сопротивления отрыву необходимо такое изменение условий испытания (изменение вида напряженного состояния, температуры, скорости деформирования), которое, почти не изменяя характеристики сопротивления отрыву, повлекло бы за собой значительное увеличение сопротивления срезу.

Некоторые опытные данные позволяют считать, что сопротивление отрыву сравнительно мало зависит от изменения скорости деформирования и температуры испытания. Отсюда следует, что в результате динамических испытаний при низких температурах с известным приближением определяются и характеристики сопротивления отрыву в нормальных условиях.

Многие опыты указывают на постоянство характеристики сопротивления отрыву при различных видах нагружения у хрупких материалов. Для подобного же заключения в отношении пластичных материалов пока еще нет достаточных данных. По результатам некоторых опытов сопротивление отрыву зависит от наклепа материала — с увеличением степени наклепа оно растет.

Срез является более сложным видом разрушения, чем отрыв, так как ему обычно предшествуют значительные пластические деформации, вызывающие перераспределение напряжений и другие осложнения. На существование этого второго типа разрушения, обусловленного преимущественно касательными напряжениями, указывает целый ряд опытных данных.

Разрушение металлов при растяжении с наличием шейки, при срезе, кручении и изгибе обычно происходит по площадкам, очень близким к тем, на которых возникают наибольшие касательные напряжения. Хотя по углу излома не всегда можно сделать окончательное заключение о характере разрушения (отрыв или срез), однако в ряде случаев положение, а нередко и вид поверхности разрушения могут в этом отношении иметь решающее значение. Так, например, если разрушение при кручении происходит по площадкам, перпендикулярным к оси стержня, то несомненно, что оно обусловлено касательными напряжениями, так как по поверхности разрушения в этом случае нормальных напряжений вообще нет.

Значительно более трудным становится проведение различия между разрушением путем отрыва и среза при сложных напряженных состояниях. Все же и здесь в ряде случаев удалось установить, что в образовании некоторых из тех изломов, которые было принято считать наглядными примерами разрушения путем отрыва, на самом деле главную роль играют касательные напряжения.

Так как разрушение путем среза обусловлено касательными напряжениями, играющими главную роль и при пластической деформации материала, то у пластичных материалов без предшествующих, обычно довольно значительных, остаточных деформаций срез вряд ли возможен. По крайней мере практически такого разрушения у металлов до сих пор получить не удалось, хотя некоторые из них (например, прессованный магний и сплавы на его основе) разрушаются от среза при сравнительно небольших деформациях (5—15%) — имеет место так называемый «хрупкий срез».

Опытные данные показывают, что для чистых металлов (медь, алюминий, железо) и для некоторых сплавов сопротивление срезу

практически не зависит от вида напряженного состояния. Вместе с тем установлено, что оно в значительно большей степени, чем сопротивление отрыву, зависит от скорости деформирования и температуры опыта. При увеличении скорости и понижении температуры сопротивление срезу увеличивается.

Предположение об одновременном существовании у материалов двух видов сопротивления разрушению наглядно подтверждается опытами над разрушением хладноломких металлов и некоторых хрупких материалов. Сопротивление отрыву и сопротивление срезу у одного и того же материала различны по величине: у пластичных материалов обычно $\bar{\tau}_{ср} < \bar{\sigma}_{отр}$, у хрупких, наоборот, $\bar{\tau}_{ср} > \bar{\sigma}_{отр}$. В зависимости от изменения состава, а также термической и механической обработки $\bar{\tau}_{ср}$ и $\bar{\sigma}_{отр}$ могут меняться по различным законам.

Описанные характеристики сопротивления материала разрушению могут служить основой для расчетов на прочность при простом и сложном напряженном состоянии: вопрос об использовании этих характеристик рассматривается в следующих параграфах. Значительный рост исследований по проблеме разрушения в последние годы с большой полнотой отражен в книге: Качанов Л. М., Основы механики разрушения, «Наука», 1974.

§ 38. Понятие о теориях прочности

Как уже было сказано выше, нахождение значений опасных напряжений, представляющих основу для назначения допускаемых напряжений, в случае линейного напряженного состояния не представляет затруднений.

При сложном напряженном состоянии, характеризующемся в общем случае тремя различными главными напряжениями, нахождение опасных значений этих напряжений сильно усложняется. Как показывают опыты, опасное напряженное состояние элемента конструкции (текучесть, разрушение) зависит от вида напряженного состояния, т. е. от соотношения между тремя главными напряжениями. Так как число различных возможных соотношений между последними неограниченно велико, то и соответствующих опасных состояний элемента конструкции тоже может быть неограниченно много. Таким образом, для каждого нового соотношения между главными напряжениями необходимо заново экспериментально устанавливать величину предельных напряжений. Следует иметь в виду, что опыты при сложном напряженном состоянии осуществить гораздо труднее, чем при простом растяжении или сжатии; они, как правило, требуют изготовления специальных дополнительных приспособлений и установок к имеющимся в лабораториях машинам, более трудоемки и дорого стоят.

Поэтому необходимо найти способ составления условия прочности при *сложном* напряженном состоянии, пользуясь величинами $\sigma_т$ и $\sigma_в$, полученными при опытах для *линейного* напряженного состояния.

Таким образом, задача проверки прочности материала в общем случае, когда все три главных напряжения не равны нулю, ставится так:

1) определены расчетом три главных напряжения: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$;

2) выбран материал;

3) для этого материала при помощи опытов в лаборатории найдена при простом растяжении или сжатии величина опасных напряжений $\sigma^0 = \sigma_т$ или $\sigma^0 = \sigma_в$ и установлено допускаемое напряжение.

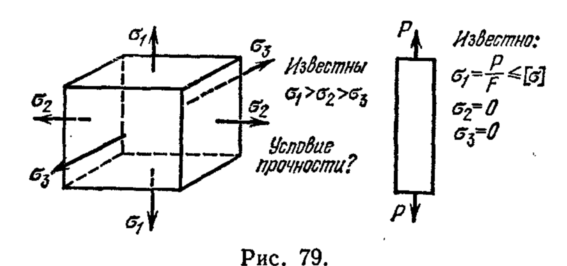


Рис. 79.

Требуется составить условие прочности для общего случая напряженного состояния, зная σ_1, σ_2 и σ_3 и сохраняя тот же коэффициент запаса k (рис. 79).

Поставленная задача может быть решена лишь на основании предположения (гипотезы) о том, каков вид функции, связывающей прочность материала с величиной и знаком главных напряжений, каким фактором вызывается наступление опасного состояния материала.

Таких факторов можно наметить несколько. В самом деле, даже при простом растяжении стержня из пластичного материала можно поставить вопрос: что является причиной текучести?

Можно предположить, что текучесть появится тогда, когда наибольшие *нормальные напряжения* в стержне дойдут до предела текучести $\sigma_т$. Однако можно было бы стать и на другую точку зрения и высказать предположение, что явление текучести наступит тогда, когда *наибольшее удлинение* материала достигнет определенного значения. Можно сделать и третье предположение, а именно: что появление больших остаточных деформаций связано с тем, что *касательные напряжения* достигнут определенной величины.

Таким образом, мы можем высказать ряд гипотез, построить ряд так называемых теорий прочности. Как мы увидим дальше, при простом растяжении или сжатии, при линейном напряженном состоянии, результаты проверки прочности оказываются одинако-

выми, какую бы из гипотез мы ни приняли. Это объясняется тем, что в этом случае проверка прочности основывается непосредственно на опыте.

Совсем иначе будет обстоять дело при сложном напряженном состоянии. В следующих параграфах будет показано, как меняется условие прочности в зависимости от принятой теории. Выбор для практического применения той или иной теории окончательно определяется проверкой ее на опыте для случая сложного напряженного состояния.

Какую бы из гипотез прочности мы ни выбрали, она может быть оформлена аналитически в виде некоторой функции главных напряжений

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)=\text{const}=C. \tag{7.1}$$

В такой форме теория прочности выражает условие постоянства (независимости от вида напряженного состояния) некоторой совокупности главных напряжений, имеющей тот или иной физический смысл. Вместе с тем уравнение (7.1), очевидно, описывает некоторую предельную поверхность в трехмерном пространстве главных напряжений. Так, например, если $C=\sigma_т$ или $C=\sigma_в$, то соответствующая предельная поверхность будет поверхностью, определяющей условия, при которых происходит текучесть или разрушение материала.

Прежде чем перейти к изложению теорий прочности, заметим, что опасное состояние как для пластичных материалов (момент появления больших остаточных деформаций), так и для хрупких (момент появления трещин) лежит на границе применения закона Гука (с известным, достаточным для практики приближением). Это позволяет при всех дальнейших вычислениях, относящихся к проверкам прочности, пользоваться формулами, выведенными в предыдущих параграфах при условии применимости закона Гука.

Из сказанного ранее о сопротивлении отрыву и срезу вытекает необходимость в проведении четкого разграничения между теориями прочности для материалов, разрушающихся путем отрыва, и теориями, в которых за опасное состояние принимается разрушение путем среза. Ниже эти теории рассматриваются раздельно в §§ 39 и 40.

§ 39. Теории хрупкого разрушения (теории отрыва)

Как уже было сказано, причиной разрушения путем отрыва можно считать либо наибольшее растягивающее нормальное напряжение, либо наибольшую упругую деформацию растяжения.

А. Предположение о связи разрушения с величиной наибольших растягивающих напряжений было высказано еще в XVII столетии и поддерживалось впоследствии Ламе (1833 г.) и Рэнкиным (1856 г.).

В настоящее время теория, в которой в качестве критерия прочности принимается наибольшее растягивающее напряжение, называется *теорией наибольших нормальных напряжений* или *первой теорией прочности*.

Если принять, что $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$, то наибольшим нормальным напряжением σ_{max} будет σ_1. По первой теории прочности разрушение материала независимо от вида напряженного состояния произойдет при условии

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \sigma_{отр},$$

где $\sigma_{отр}$ — постоянное для данного материала сопротивление отрыву; для многих хрупких материалов $\sigma_{отр}$ равно напряжению в момент разрушения при растяжении $\sigma_{вр}$. Безопасное состояние, очевидно, будет в том случае, если

$$\sigma_{max} = \sigma_1 \leqslant \frac{\sigma_{отр}}{k} = [\sigma]_р, \qquad (7.2)$$

где $[\sigma]_р$ — допускаемое напряжение на растяжение. Уравнение (7.2) представляет условие прочности по первой теории прочности. Оно применимо лишь при условии, что $\sigma_1 > 0$.

Эта теория подтверждается опытами на растяжение таких хрупких материалов, как камень, кирпич, бетон, стекло, фарфор и др. Так как первая теория прочности не принимает во внимание два других главных напряжения, от которых в ряде случаев тоже зависит прочность материала, то при сложном напряженном состоянии она нередко приводит к расхождению с опытами.

Б. Предположение о том, что хрупкое разрушение связано не с наибольшим растягивающим напряжением, а с наибольшим относительным удлинением, впервые было высказано, по-видимому, французскими учеными: Мариоттом в (1686 г.) и Навье (1826 г.), а затем поддерживалось другими французскими учеными: Понселе (1839 г.) и Сен-Венаном (1837 г.). Основанная на этом предположении теория прочности называется *теорией наибольших удлинений* или *второй теорией прочности*. По этой теории разрушение материала независимо от вида напряженного состояния наступит, если наибольшее упругое относительное удлинение ε_{max} станет равно некоторой постоянной для этого материала величине $\varepsilon_{разр}$. В общем случае

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right],$$

а при простом растяжении $\varepsilon = \sigma/E$; можно, очевидно, считать, что $\varepsilon_{разр} = \varepsilon_{отр}/E$. Тогда при сложном напряженном состоянии разрушение произойдет при условии, что

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{отр}.$$

Безопасное состояние будет иметь место, если в этом уравнении $\sigma_{отр}$ заменить допускаемым напряжением при растяжении $[\sigma]_р$. Условие прочности по второй теории прочности примет вид

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leqslant \frac{\sigma_{отр}}{k} = [\sigma]_р. \tag{7.3}$$

Таким образом, принимая теорию наибольших относительных удлинений, необходимо сравнивать с допускаемым напряжением, установленным для простого растяжения, не то или другое главное напряжение, а их совокупность, так называемое приведенное (расчетное) напряжение, определяемое формулой

$$\sigma_{расч} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3).$$

Эта гипотеза также стоит в противоречии с некоторыми опытами по исследованию прочности пластичных материалов. Если бы она была для таких материалов верна, то образец, растягиваемый в двух или трех направлениях, был бы прочнее образца, растягиваемого линейно; опыт этого не подтверждает. Не подтверждается эта гипотеза и при всестороннем равномерном сжатии.

Для хрупкого состояния материала теория наибольших относительных деформаций дает обычно согласующиеся с опытом результаты. Условие (7.3) можно применить, если $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) > 0$. Использование второй теории в случае сжатия, когда $\varepsilon_1 > 0$, позволяет удовлетворительно объяснить причины разрушения хрупких материалов по площадкам, параллельным направлению сжимающей силы, а также более или менее правильно объяснить, почему сопротивление хрупких материалов сжатию значительно выше их сопротивления растяжению (при растяжении $\varepsilon_{max} = \frac{\sigma_р^0}{E} = \varepsilon_{разр}$ и $\sigma_р^0 = E\varepsilon_{разр}$, а при сжатии $\varepsilon_{max} = -\frac{\mu}{E}\sigma_с^0 = \varepsilon_{разр}$ и $|\sigma_с^0| = \frac{E}{\mu}\varepsilon_{разр}$ (т. е. в $\frac{1}{\mu}$ раз больше). Однако и вторая теория прочности подтверждается главным образом опытами над хрупкими материалами.

Обе описанные теории, первая и вторая, представляют теории отрыва; ни одна из них не является универсальной, т. е. пригодной во всех случаях разрушения путем отрыва. Иногда лучшее совпадение с опытом дает первая, иногда — вторая теория. Для сплошного однородного тела вторая теория представляется более обоснованной и логичной, чем первая.

§ 40. Теории вязкого разрушения (теории среза)

А. Появление на поверхности образца линий скольжения при возникновении пластических деформаций и разрушение пластичных материалов при растяжении путем среза по площадкам, где действуют наибольшие касательные напряжения, дают основание принять эти напряжения в качестве критерия прочности. Впервые

такое предположение было высказано французским физиком Кулоном в 1773 г. и подтверждено опытами Треска (1868 г.), Геста (1900 г.) и других ученых. Основанная на этом предположении теория прочности получила название теории *наибольших касательных напряжений* или *третьей теории прочности*. По этой теории опасное состояние материала (текучесть или разрушение) независимо от вида напряженного состояния наступит при условии, что наибольшее касательное напряжение τ_{max} станет равным некоторой постоянной для этого материала величине τ^0, т. е.

$$\tau_{max} = \tau_I^0 = \tau_т$$

или

$$\tau_{max} = \tau_{II}^0 = \tau_{ср},$$

где $\tau_т$ — предел текучести при сдвиге, а $\tau_{ср}$ — наибольшее касательное напряжение при разрушении путем среза. Безопасное состояние будет, очевидно, определяться условием прочности, например,

$$\tau_{max} \leqslant \frac{\tau_т}{k} = [\tau]. \tag{7.4}$$

При сложном напряженном состоянии $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$. Полагая согласно этой теории, что значение допускаемого напряжения $[\tau]$ не должно зависеть от вида напряженного состояния, установим его, исходя из опытов при простом растяжении, в которых будет иметь место разрушение путем среза. В этом случае $\sigma_3 = 0$ и $\tau_{max} = \sigma_1/2$. Если величина σ_1 в правой части последнего выражения, увеличиваясь, достигнет допускаемого значения $[\sigma]$, то левая часть того же выражения представит допускаемое значение напряжения τ; таким образом, $[\tau] = [\sigma]/2$. Подставляя теперь значения τ_{max} и $[\tau]$ в условие прочности (7.4), получаем

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \leqslant \frac{1}{2}[\sigma],$$

или

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leqslant [\sigma]. \tag{7.5}$$

Таким образом, принимая указанную теорию, приходится при проверке прочности сравнивать с допускаемым напряжением на растяжение или сжатие не наибольшее нормальное напряжение, а разность между наибольшим и наименьшим нормальными (главными) напряжениями. Величина расчетного (приведенного) напряжения в этом случае равна

$$\sigma_{расч} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

Достоинство теории наибольших касательных напряжений заключается в простоте и линейности условия прочности, как в первой и второй теориях прочности. Она достаточно хорошо подтверждается опытами над пластичными материалами, одинаково сопротивляющимися растяжению и сжатию, а также опытами на все-

стороннее сжатие. Обычно эта теория обеспечивает прочные размеры рассчитываемых элементов конструкций; иногда эти размеры оказываются даже несколько завышенными.

Недостатком теории наибольших касательных напряжений, бросающимся сразу в глаза, является то обстоятельство, что она совершенно не учитывает влияния на работу материала *среднего по величине* главного напряжения. Выходит, что при постоянных наибольшем σ_1 и наименьшем σ_3 главных напряжениях мы можем, *не изменяя условий работы материала*, как угодно менять величину среднего напряжения σ_2, лишь бы оно было меньше σ_1 и больше σ_3. Это обстоятельство представляется сомнительным, и опыты подтверждают, что величина напряжения σ_2 все же оказывает влияние на прочность материала. Не дооценивается этой теорией и опасность нарушения прочности элементов, испытывающих примерно равные растягивающие напряжения в трех главных направлениях. К этому нужно добавить, что в соответствии с этой теорией напряженные состояния в элементарных объемах, выделенных у наклонных площадок (см. рис. 54, *а* и *б*), должны быть равноопасны, если касательные напряжения на этих площадках τ_α равны друг другу. С увеличением τ_α текучесть и разрушение материала в этих элементах объема должны начинаться одновременно. Опыты показывают, что для материалов, у которых сопротивление сжатию выше сопротивления растяжению, напряженное состояние в случае *а*, когда на площадке, где возникает касательное напряжение, имеется растягивающее нормальное напряжение, будет более опасным, чем в случае *б*, когда на площадке с τ_α нормальное напряжение оказывается сжимающим. Элемент материала при росте напряжения τ_α начнет течь или разрушаться в случае *а* раньше, чем в случае *б*. Таким образом, на прочность материала влияет не только касательное напряжение, но и действующее по той же площадке нормальное напряжение. Это обстоятельство учитывается рассматриваемой ниже теорией Мора (1900 г.).

Б. Приведенные выше условия, при которых наступает опасное состояние $(\sigma_1-\sigma_3)/2=\tau_т$ или $(\sigma_1-\sigma_3)/2=\tau_{ср}$, следует рассматривать шире, чем только интерпретацию теории наибольших касательных напряжений. Согласно этим формулам можно считать, что достижение опасного состояния определяется только наибольшим и наименьшим из главных напряжений. Опытами данное предположение не вполне подтверждается, однако наибольшая ошибка, которая может произойти, если пренебречь средним главным напряжением σ_2, не превысит 15%, а в большинстве случаев будет значительно меньше. Поэтому при составлении условия прочности допустимо ограничиться изучением влияния на прочность только наибольшего и наименьшего из главных напряжений.

Различные случаи напряженного состояния могут быть, как известно, наглядно представлены кругами напряжений, предло-

женными О. Мором. На рис. 80 приведено несколько таких кругов: круг *1* изображает простое растяжение: $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$; круг *2* — простое сжатие: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 \neq 0$, а круг *3* — чистый сдвиг: $\sigma_3 = -\sigma_1$, $\sigma_2 = 0$. Круги напряжений, построенные на значениях главных напряжений, отвечающих опасному состоянию материала, будем называть *предельными кругами* напряжений. На рис. 81 показаны

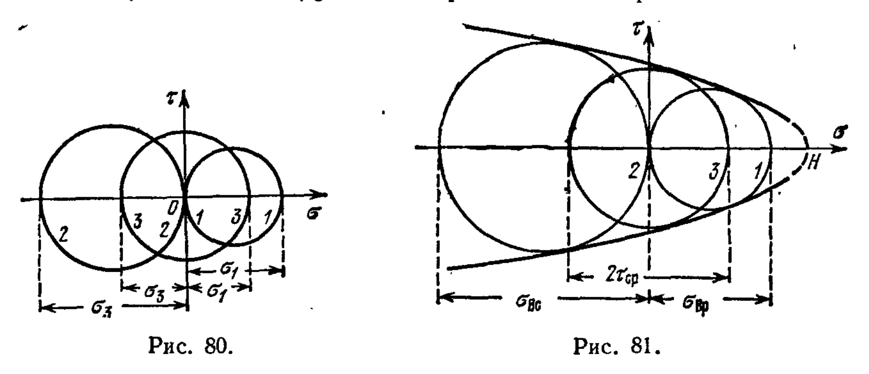


Рис. 80. Рис. 81.

три предельных круга напряжений для тех же трех напряженных состояний, что и на рис. 80. Диаметр предельного круга, изображающего опасное напряженное состояние при простом растяжении, равен $\sigma_{вр}$ — пределу прочности при растяжении; при простом сжатии диаметр предельного круга равен $\sigma_{вс}$ — пределу прочности при сжатии, а при чистом сдвиге он равен $2\tau_{ср}$.

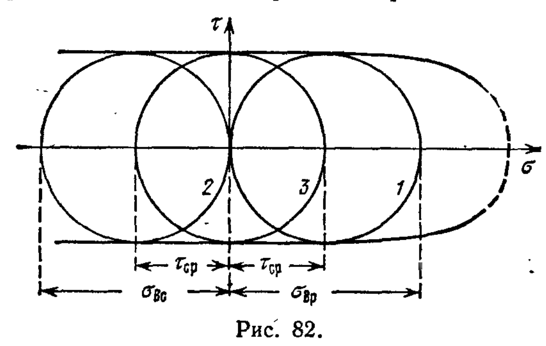


Рис. 82.

Мор предположил, что все предельные круги напряжений, проводимые из любых центров, вписываются в некоторую плавную кривую — так называемую *огибающую* семейства предельных кругов, касательную к каждому из них (рис. 81). Огибающая пересекает ось абсцисс в некоторой точке H, соответствующей всестороннему равномерному растяжению (при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ круг напряжений превращается в точку). С противоположной стороны огибающая не

будет замкнута, так как разрушение материала при всестороннем равномерном сжатии невозможно. Построение огибающей можно упростить, приняв ее в первом приближении за прямую линию, касательную к предельным кругам растяжения и сжатия. Если пределы прочности при растяжении и сжатии окажутся одинаковыми, то ветви огибающей на большом протяжении будут параллельны оси абсцисс (рис. 82). В этом случае теория Мора совпадает с теорией наибольших касательных напряжений.

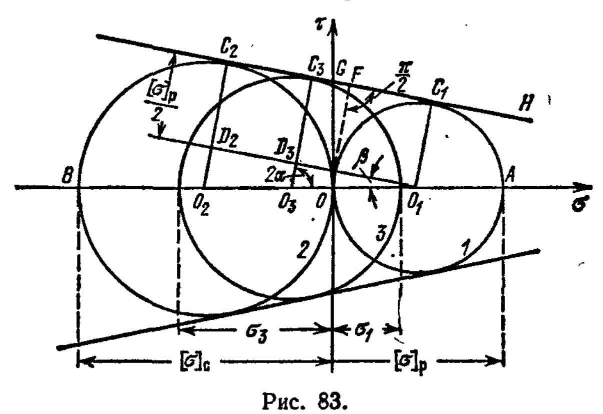


Рис. 83.

Уменьшая диаметры всех предельных кругов в k раз, где k — коэффициент запаса прочности, получаем семейство кругов, изображающих уже не предельные, а допускаемые напряженные состояния (рис. 83). На этом рисунке отрезок OA — диаметр круга 1, представляет допускаемое напряжение при простом растяжении $[\sigma]_р$, а отрезок OB — диаметр круга 2, представляет допускаемое напряжение при простом сжатии $[\sigma]_с$. Промежуточный круг 3 с центром в точке O_3 касается огибающей C_2C_1H в точке C_3 и характеризует некоторое напряженное состояние с главными напряжениями σ_1 и σ_3.

Из подобия треугольников $O_1O_2D_2$ и $O_1O_3D_3$ следует, что

$$\frac{O_3D_3}{O_2D_2}=\frac{O_1O_3}{O_1O_2}, \quad \text{или} \quad \frac{O_3C_3-O_1C_1}{O_2C_2-O_1C_1}=\frac{OO_1+OO_3}{OO_1+OO_2}.$$

Заменяя отрезки линий соответствующими значениями напряжений, находим

$$\frac{\sigma_1-\sigma_3-[\sigma]_р}{[\sigma]_с-[\sigma]_р}=\frac{[\sigma]_р-(\sigma_1+\sigma_3)}{[\sigma]_р+[\sigma]_с}.$$

Вводя знак неравенства, после некоторых преобразований получаем условие прочности по теории Мора

$$\sigma_1-\frac{[\sigma]_р}{[\sigma]_с}\sigma_3=\sigma_1-p\sigma_3\leqslant[\sigma]_р; \quad p=\frac{[\sigma]_р}{[\sigma]_с}. \tag{7.6}$$

Это же условие можно вывести, не пользуясь кругами напряжений [1]), если иметь в виду, что (по Мору) сдвиги, приводящие к нарушению прочности, возникают на той (опасной) площадке, где получается наиболее неблагоприятное сочетание нормальных и касательных напряжений. Условие, ограничивающее величину некоторого приведенного касательного напряжения на упомянутой опасной площадке $\tau_{прив}$, можно записать так:

$$\tau_{прив} = |\tau| + f\sigma \leqslant [\tau]_{прив}. \tag{7.7}$$

Здесь $|\tau|$ и σ — напряжения на опасной площадке (знак нормального напряжения учитывается); f — коэффициент трения. Положение площадки, на которой $\tau_{прив}$ достигает наибольшего значения (на рис. 83 эта площадка соответствует точке C_3), определяется углом α по отношению к площадке с главным напряжением σ_1: при этом $\operatorname{tg} 2\alpha = 1/f = 1/\operatorname{tg}\beta$. Можно показать (рис. 83), что

$$f = \frac{[\sigma]_c - [\sigma]_p}{2\sqrt{[\sigma]_p[\sigma]_c}} \quad \text{и} \quad [\tau]_{прив} = \frac{1}{2}\sqrt{[\sigma]_p[\sigma]_c} = OG.$$

При $f=0$ условие прочности (7.7) обращается в условие по третьей теории прочности; если $\sigma>0$ (растяжение), условие (7.7) удовлетворяется лишь с уменьшением значения $|\tau|$ по сравнению со случаем, когда $\sigma=0$, а если $\sigma<0$ (сжатие), это же условие удовлетворяется и при увеличении значения $|\tau|$ по сравнению со случаем, когда $\sigma=0$. Эти выводы подтверждаются опытами, упомянутыми в конце п. **А** данного параграфа.

Нетрудно заметить, что условие прочности по теории Мора (7.6) совпадает с условием прочности по теории наибольших касательных напряжений, если $p=1$, т. е. $[\sigma]_p=[\sigma]_c$. Если допускаемое напряжение на растяжение очень мало (хрупкие материалы), т. е. можно считать, что $[\sigma]_p=0$ и $p=0$, теория Мора превращается в теорию наибольших нормальных напряжений. При плоском напряженном состоянии, когда $\sigma_2=0$ и $p\approx\mu$, теория Мора совпадает с теорией наибольших удлинений. Таким образом, теория Мора в известной мере обобщает первые три теории прочности, она хорошо описывает явление пластического деформирования и разрушения путем среза материалов, имеющих различное сопротивление растяжению и сжатию. Все те опыты, которые подтверждают первую и третью теории и некоторые опыты, подтверждающие вторую теорию, подтверждают и теорию Мора. Она, безусловно, представляет шаг вперед по сравнению с первыми тремя теориями, но все же не является универсальной — в ряде случаев она неправильно освещает явление разрушения путем отрыва, в ней, так же как и в третьей теории, не учитывается промежуточное главное напряжение.

---

[1]) См. Дружинин С. И. и Ягн Ю. И., Сопротивление материалов, «Кубуч», 1933.

В. Рядом авторов было высказано предположение, что опасное состояние материала зависит не от величины деформаций или напряжений в отдельности, а от совокупности тех и других — от величины *потенциальной энергии* или от численно ей равной удельной работы деформации. Величина этой работы выражается через все три главных напряжения.

В конце прошлого столетия (1885 г.) итальянский ученый Бельтрами предложил критерием пластичности и прочности материала считать полное количество потенциальной энергии деформации в единице объема. На основании этого предложения условие наступления опасного состояния следовало бы записать так:

$$u = u^0,$$

где u^0 — количество потенциальной энергии в единице объема к началу текучести или к моменту разрушения.

Это предложение опытами не подтвердилось и имеет сейчас только историческое значение. Но зато оно явилось базой для создания новой *энергетической теории прочности*, обычно хорошо согласующейся с опытами.

Учитывая, что пластическая деформация происходит без изменения объема, в 1904 г. Губер, в 1913 г. Мизес и в 1924 г. Генки предложили в качестве критерия прочности принять не всю потенциальную энергию деформации, а только ту ее часть, которая идет на *изменение формы тела*. Таким образом, начало текучести или разрушение материала независимо от вида напряженного состояния будет иметь место, если потенциальная энергия формоизменения $u_ф$ в единице объема достигнет некоторого предельного (опасного) для данного материала значения $u_ф^0$, т. е.

$$u_ф = u_ф^0; \tag{7.8}$$

при этом $u_ф^0 = u_{ф_{тек}}$ или $u_ф^0 = u_{ф_{разр}}$.

Известно, что при сложном напряженном состоянии (см. формулу (6.30′) § 35)

$$u_ф = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right] = \frac{3(1+\mu)}{2E}\tau_{окт}^2,$$

а при линейном растяжении

$$u_ф = \frac{1+\mu}{6E}2\tau_1^2.$$

Полагая, как сказано выше, что опасное количество энергии формоизменения (например, соответствующее началу текучести материала) не зависит от вида напряженного состояния, будем считать, что при линейном и при любом другом напряженном состоянии

$$u_ф^0 = \frac{1+\mu}{6E}2\tau_т^2.$$

Подставляя выражения для $u_ф$ и $u_ф^0$ в уравнение (7.8), деля обе части этого уравнения на $2\frac{1+\mu}{6E}$ и извлекая из каждой квадратный корень, получаем условие наступления опасного состояния в таком виде:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\frac{3}{\sqrt{2}}\tau_{окт}=\sigma_т.$$

Нетрудно заметить, что это уравнение представляет условие постоянства интенсивности напряжений (или постоянства октаэдрического касательного напряжения). Условие прочности по этой теории, получившей название *теории потенциальной энергии формоизменения* или *четвертой теории прочности*, запишем так:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\sigma_i=\frac{3}{\sqrt{2}}\tau_{окт}\leqslant\frac{\sigma_т}{k}=[\sigma]. \quad (7.9)$$

Теория потенциальной энергии формоизменения хорошо подтверждается опытами над пластичными материалами, но не оправдывается в применении к хрупким материалам. Этого и следовало ожидать, так как она является теорией касательных напряжений, но не наибольших, как третья, а октаэдрических или средних. Четвертой теорией учитываются все три главных напряжения, и поэтому она полнее теории наибольших касательных напряжений. В отличие от трех первых теорий и теории Мора, четвертая теория нелинейная, что несколько усложняет ее применение на практике.

Принимая во внимание, что на сопротивление пластическому деформированию в какой-то степени влияет величина среднего нормального напряжения $\sigma_{ср}$, условие наступления текучести по теории потенциальной энергии формоизменения можно уточнить, записав его так:

$$\sigma_i+A\sigma_{ср}=B\sigma_т, \quad (7.10)$$

где A и B — постоянные, зависящие от свойств материала. Тогда условие прочности примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}+\frac{A_1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\leqslant B_1[\sigma]. \quad (7.11)$$

Оно, по-видимому, может быть использовано для проверки прочности деталей машин и сооружений, изготовленных не только из пластичных, но и некоторых хрупких материалов. К сожалению, возможность применения этого условия к хрупким материалам еще не достаточно изучена.

§ 41. Расчетные напряжения по разным теориям прочности

Подводя итог рассмотрению теорий прочности, мы можем написать условие прочности при объемном напряженном состоянии в таком виде:

$$\sigma_{расч} \leqslant [\sigma], \tag{7.12}$$

где $\sigma_{расч}$— расчетное (приведенное) напряжение; $[\sigma]$ — допускаемое напряжение при простом растяжении или сжатии. Расчетное напряжение $\sigma_{расч}$ может быть истолковано как растягивающее напряжение при линейном напряженном состоянии, эквивалентном рассматриваемому объемному в отношении опасности для прочности материала.

Для $\sigma_{расч}$ по разным теориям прочности имеем такие выражения:

$$\sigma^{I}_{расч} = \sigma_{max} = \sigma_1,$$
$$\sigma^{II}_{расч} = E\varepsilon_{max} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3),$$
$$\sigma^{III}_{расч} = 2\tau_{max} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad \sigma^{M}_{расч} = \sigma_1 - p\sigma_3,$$
$$\sigma^{IV}_{расч} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2}.$$

Имея в своем распоряжении несколько теорий для оценки прочности деталей из хрупких и пластичных материалов, инженер, исходя из реальных свойств материала, в каждом отдельном случае должен установить, какая из теорий прочности здесь более пригодна. Решение этого вопроса затрудняется тем, что при сложном напряженном состоянии деление материалов на хрупкие и пластичные в значительной мере условно. Материал, обладающий пластическими свойствами при простом растяжении или сжатии, в случае сложного напряженного состояния может себя вести как хрупкий и разрушаться без значительных остаточных деформаций. Наоборот, материал, хрупкий при линейном напряженном состоянии, при других напряженных состояниях может оказаться пластичным. Таким образом, пластичность и хрупкость материала зависит от условий, в которых он работает в сооружении. Поэтому правильнее говорить не о хрупком и пластичном материале, а о хрупком и пластичном состоянии материала.

К основным факторам, влияющим на хрупкость и пластичность материала, относятся: температура (низкая температура способствует повышению хрупкости, высокая,— как правило, повышению пластичности), скорость деформирования (при быстром, динамическом нагружении хрупкость увеличивается, при медленном, статическом сохраняется пластичность) — вид напряженного состояния (напряженные состояния, близкие к всестороннему равномерному растяжению, называются «жесткими» напряженными состояниями, они вызывают повышение хрупкости; наоборот,

напряженные состояния, близкие к всестороннему равномерному сжатию, называются «мягкими» напряженными состояниями, они способствуют повышению пластичности).

В настоящее время многие материалы тем или иным путем можно привести как в хрупкое, так и в пластичное состояние. Если материал может деформироваться и разрушаться и хрупко и пластично, то, как уже было сказано, он имеет и две характеристики сопротивления разрушению, устанавливаемые опытным путем: сопротивление отрыву и сопротивление срезу. Первое $\sigma_{отр}$ определяется величиной наибольшего нормального растягивающего напряжения при разрушении путем отрыва $\sigma_{max}=\sigma_1$ (первая теория прочности) или величиной приведенного нормального напряжения, представляющего произведение наибольшего относительного удлинения $\varepsilon_{max}=\varepsilon_1$ на модуль нормальной упругости E, т. е. $\sigma_{прив}=\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)$ (вторая теория прочности). Сопротивление срезу определяется величиной наибольшего касательного напряжения при разрушении путем среза $\tau_{ср}=\tau^0_{max}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)^0$ (третья теория прочности), предельной величиной интенсивности напряжений σ_i^0 к моменту разрушения (четвертая теория прочности) или предельной величиной приведенного напряжения $\left(\sigma_1-\frac{\sigma_{вр}}{\sigma_{вс}}\right)^0$ при разрушении путем среза (теория Мора).

В связи со сказанным нельзя, например, при расчете элемента конструкции из углеродистой стали — материала, пластичного в определенных условиях (статическое нагружение, комнатная температура, линейное напряженное состояние), всегда применять третью или четвертую теории прочности, не считаясь с действительным режимом его работы, или при расчете детали из бетона — материала, хрупкого в указанных выше условиях, всегда пользоваться первой теорией прочности.

Вопрос о применении той или иной теории прочности в первом приближении может быть разрешен с помощью так называемой диаграммы механического состояния материала, предложенной проф. Я. Б. Фридманом в результате исследований прочности материалов, выполненных проф. Н. Н. Давиденковым и его школой [1]).

В качестве примера рассмотрим случай передачи давления от колеса локомотива на рельс (см. рис. 59). На кубик с ребрами длиной 1*мм*, вырезанный в центре той площадки, через которую передается давление колеса на рельс, действуют сжимающие главные напряжения: $\sigma_1=-80$ *кГ/мм*²; $\sigma_2=-90$ *кГ/см*²; $\sigma_3=-110$ *кГ/мм*². Подсчитаем по третьей и четвертой теории прочности величину расчетного напряжения, которое следует сравнивать с допускаемым напряжением. По теории наибольших касательных напряжений расчетное напряжение равно

$$\sigma^{III}_{расч}=\sigma_1-\sigma_3=-80+110=30\ кГ/мм^2,$$

---

[1]) См., например, Беляев Н. М., Сопротивление материалов, издания X÷XIV, § 252.

а по энергетической теории

$$\sigma_{\text{расч}}^{\text{IV}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-80+90)^2+(-90+110)^2+(-110+80)^2} = 26{,}4 \ кГ/мм^2.$$

Так как для обычной рельсовой стали предел текучести близок к 40 *кГ/мм²*, а предел упругости около 30 *кГ/мм²*, то указанные главные напряжения находятся в допускаемых пределах; это подтверждается опытом эксплуатации рельсового пути.

В заключение следует заметить, что все изложенные выше соображения по теориям прочности относятся к материалам, которые с достаточной степенью точности могут считаться *изотропными*. Для *анизотропных* материалов приведенные выше формулы неприменимы; например, для дерева приходится учитывать направление усилий по отношению к волокнам.

§ 42. Допускаемые напряжения при чистом сдвиге

Допускаемую величину касательного напряжения при чистом сдвиге можно было бы определить таким же путем, как и при линейном растяжении и сжатии, т. е. экспериментально установить величину опасного напряжения (при текучести или при разрушении материала) и, разделив последнее на тот или иной коэффициент запаса прочности, найти допускаемое значение касательного напряжения. Однако этому на практике мешают некоторые обстоятельства. Деформацию чистого сдвига в лабораторных условиях создать очень трудно — работа болтов и заклепочных соединений осложняется наличием нормальных напряжений; при кручении[1]) сплошных стержней круглого или иных сечений напряженное состояние неоднородно в объеме всего стержня, к тому же при пластической деформации, предшествующей разрушению, происходит перераспределение напряжений, что затрудняет определение величины опасного напряжения; при испытаниях на кручение тонкостенных стержней легко может произойти потеря устойчивости стенки стержня. В связи с этим допускаемые напряжения при чистом сдвиге и кручении назначаются на основании той или иной теории прочности в зависимости от величины устанавливаемых более надежно допускаемых напряжений на растяжение.

Имея в виду, что при чистом сдвиге $\sigma_1=\tau$, $\sigma_2=0$ и $\sigma_3=-\tau$ (см. формулы (6.33) § 36), установим зависимости между $[\tau]$ и $[\sigma]$ по разным теориям прочности.

По первой теории прочности условие $\sigma_1 \leqslant [\sigma]_р$, после подстановки в него $\sigma_1=\tau$, может быть записано как $\tau \leqslant [\sigma]_р$, откуда

$$[\tau]^{\text{I}} = [\sigma]_р. \qquad (7.13)$$

Подставив по второй теории в условие прочности

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2+\sigma_3) \leqslant [\sigma]_р$$

[1]) Материал скручиваемого стержня находится в условиях чистого сдвига (см. гл. IX).

значения главных напряжений при чистом сдвиге, получим

$$\tau-\mu(-\tau)=(1+\mu)\tau\leqslant[\sigma]_p,$$

или

$$\tau\leqslant\frac{[\sigma]_p}{1+\mu},$$

откуда

$$[\tau]^{II}=\frac{[\sigma]_p}{1+\mu}. \qquad (7.14)$$

Условие прочности по третьей теории

$$\sigma_1-\sigma_3\leqslant[\sigma],$$

после подстановки в него значений σ_1 и σ_3, примет вид

$$\tau-(-\tau)=2\tau\leqslant[\sigma],$$

или

$$\tau\leqslant\frac{1}{2}[\sigma],$$

т. е.

$$[\tau]^{III}=\frac{1}{2}[\sigma]. \qquad (7.15)$$

По теории Мора $\sigma_1-p\sigma_3\leqslant[\sigma]_p$; в случае чистого сдвига получаем $\tau-p(-\tau)=(1+p)\tau\leqslant[\sigma]_p$, откуда $\tau\leqslant\frac{1}{1+p}[\sigma]_p$, или

$$[\tau]^{M}=\frac{1}{1+p}[\sigma]_p=\frac{[\sigma]_p\cdot[\sigma]_c}{[\sigma]_p+[\sigma]_c}. \qquad (7.16)$$

На диаграмме рис. 83 допускаемое напряжение $[\tau]^M$ определяется величиной отрезка OF.

Применяя четвертую теорию прочности, находим

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\tau-0)^2+(0+\tau)^2+(\tau+\tau)^2}=\sqrt{3}\tau\leqslant[\sigma],$$

т. е.

$$\tau\leqslant\frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \text{ и } [\tau]^{IV}=\frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}. \qquad (7.17)$$

Соотношениями (7.15) и (7.17) следует пользоваться при расчетах элементов конструкций из пластичных материалов, имеющих одинаковое сопротивление растяжению и сжатию. Разница между $[\tau]^{III}$ и $[\tau]^{IV}$ составляет около 15%. Соотношение (7.16) должно применяться в случае материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Соотношение (7.13) употребляется редко. Соотношение (7.14) следовало бы применять лишь для хрупких материалов, однако им пользуются при расчетах деталей, работающих на срез (болты, заклепки). Так как для стали $\mu\approx0{,}3$, то

$$[\tau]^{II}=\frac{1}{1{,}3}[\sigma]_p=(0{,}75\div0{,}8)[\sigma]_p.$$

Отдел III

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

Глава VIII

ПРАКТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА НА СДВИГ

§ 43. Расчет заклепочных и болтовых соединений

При изучении напряжений, возникающих по наклонным площадкам (§ 27), мы убедились, что и при простом растяжении или сжатии две части стержня, разделенные наклонным сечением, могут не только отрываться друг от друга, но и сдвигаться вдоль линии разреза; это определяется наличием в сечении как нормальных, так и касательных напряжений. С этими же видами деформаций — растяжения или сжатия и сдвига мы встречались и при рассмотрении сложного напряженного состояния и, в частности, при чистом сдвиге (§ 36).

На практике целый ряд деталей конструкций работает главным образом на сдвиг, вследствие чего основное значение приобретает проверка прочности их по касательным напряжениям. Простейшими примерами подобных деталей являются болтовые и заклепочные соединения. Заклепки во многих случаях уже вытеснены сваркой; однако они имеют еще очень большое применение для соединения частей всякого рода металлических конструкций: стропил, ферм мостов, кранов, для соединения листов в котлах, судах, резервуарах и т. п.

Для образования заклепочного соединения в обоих листах просверливают или продавливают отверстия. В них закладывается нагретый до красного каления стержень заклепки с одной головкой; другой конец заклепки расклепывается ударами специального молотка или давлением гидравлического пресса (клепальной машины) для образования второй головки. Мелкие заклепки (малого диаметра — меньше 8 *мм*) ставятся в холодном состоянии (авиационные конструкции).

А. Для изучения работы заклепок рассмотрим простейший пример заклепочного соединения (рис. 84). Шесть заклепок, расположенных в два ряда, соединяют два листа *внахлестку*. Под действием сил P эти листы стремятся сдвинуться один по другому, чему препятствуют заклепки, на которые и будет передаваться действие сил P [1]).

[1]) Сопротивление трения не учитывается.

Для проверки прочности заклепок применим общий порядок решения задач сопротивления материалов.

На каждую заклепку передаются по две равные и прямо противоположные силы: одна — от первого листа, другая — от второго. Опытные исследования показывают, что одни из заклепок ряда нагружаются больше, другие — меньше. Однако к моменту разрушения усилия, передающиеся на различные заклепки, более или менее выравниваются за счет пластических деформаций. Поэтому принято считать, что все заклепки работают одинаково. Таким образом, при n заклепках в соединении, изображенном на рис. 84, на каждую из них действуют по две равные и противоположные силы $P_1=P/n$ (рис. 85); эти силы передаются на

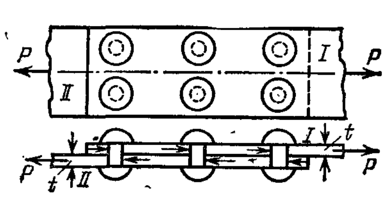


Рис. 84.

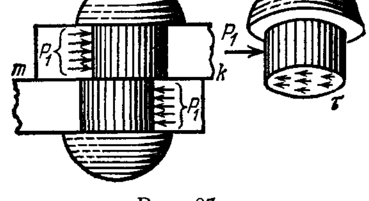


Рис. 85.

заклепку путем нажима соответствующего листа на боковую полуцилиндрическую поверхность стержня. Силы P_1 стремятся *перерезать* заклепку по плоскости mk раздела обоих листов.

Для вычисления напряжений, действующих по этой плоскости, разделим мысленно заклепочный стержень сечением mk и отбросим нижнюю часть (рис. 85). Внутренние усилия, передающиеся по этому сечению от нижней части на верхнюю, будут уравновешивать силу P_1, т. е. будут действовать параллельно ей в *плоскости* сечения, и в сумме дадут равнодействующую, равную P_1. Следовательно, напряжения, возникающие в этом сечении и действующие касательно к плоскости сечения, это — *касательные* напряжения τ. Обычно принимают равномерное распределение этих напряжений по сечению. Тогда при диаметре заклепки d на единицу площади сечения будет приходиться напряжение

$$\tau=\frac{P_1}{\frac{\pi d^2}{4}}=\frac{P}{n\frac{\pi d^2}{4}}.$$

Обозначив допускаемое напряжение на срез $[\tau]$, напишем условие прочности заклепки на срез в виде

$$\tau=\frac{P}{F}=\frac{P}{n\frac{\pi d^2}{4}}\leqslant[\tau], \tag{8.1}$$

т. е. действительное касательное напряжение τ в материале заклепки не должно превышать допускаемого (см. § 42).

Из этого условия можно определить необходимый диаметр заклепок, если задаться их числом, и наоборот. Обычно задаются диаметром заклепочных стержней d в соответствии с толщиной t склепываемых частей (примерно $d \approx 2t$) и определяют необходимое число заклепок n:

$$n \geqslant \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}[\tau]}. \qquad (8.1')$$

Знаменатель этой формулы представляет собой ту силу, которую безопасно может взять на себя каждая заклепка.

При выводе формулы (8.1), помимо оговоренных, допущена еще одна неточность. Дело в том, что силы P_1, действующие на заклепку, не направлены по одной прямой, а образуют пару. Эта пара уравновешивается другой парой, образующейся из реакций соединенных листов на головку заклепки (рис. 86), и ведет к появлению нормальных напряжений, действующих по сечению mk.

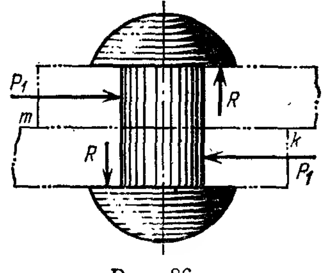


Рис. 86.

Кроме этих нормальных напряжений, по сечению mk действуют еще нормальные напряжения, вызванные тем, что при охлаждении заклепочный стержень стремится сократить свою длину, чему мешает упор головок заклепки в листы. Это обстоятельство, с одной стороны, обеспечивает стягивание заклепками листов и возникновение между ними сил трения, с другой — вызывает значительные *нормальные* напряжения по сечениям стержня заклепки. Особых неприятностей эти напряжения принести не могут. На заклепки идет сталь, обладающая значительной пластичностью; поэтому даже если бы *нормальные* напряжения достигли предела текучести, можно ожидать некоторого пластического удлинения стержня заклепки, что вызовет лишь уменьшение сил трения между листами и осуществление в действительности той схемы работы заклепки на перерезывание, на которую она и рассчитывается. Поэтому эти нормальные напряжения расчетом не учитываются.

Условие прочности (8.1) получено для соединения с односрезными заклепками. В случае стыка, перекрытого двумя накладками (рис. 87), каждая заклепка подвергается срезу по двум сечениям mk и gf (рис. 88). Такие заклепки называются *двусрезными*. При n заклепках, необходимых для передачи сил P от листа на накладки, усилие, приходящееся на одну заклепку, $P_1 = P/n$; площадь среза $F_s = 2\pi d^2/4$ и касательные напряжения в сечениях mk

и gf будут (рис. 88)

$$\tau=\frac{P}{n\frac{2\pi d^2}{4}}.$$

Условие прочности для двусрезной заклепки принимает вид

$$\tau\leqslant[\tau],\quad \text{откуда}\quad n\geqslant\frac{P}{2\frac{\pi d^2}{4}[\tau]}. \tag{8.2}$$

Таким образом, при двойном перерезывании число заклепок по срезыванию оказывается в два раза меньше, чем при одиночном перерезывании (формула (8.1)).

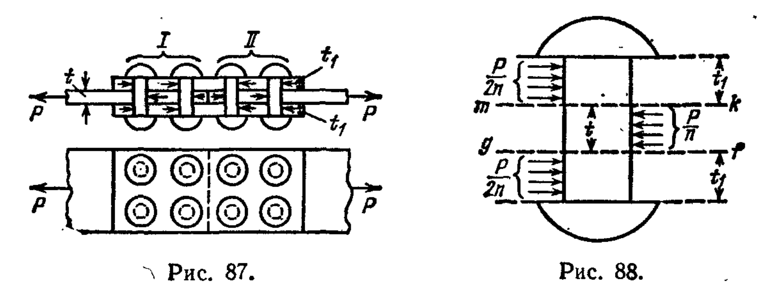


Рис. 87. Рис. 88.

В случае многосрезных заклепок, применяющихся иногда в металлических конструкциях, площадь среза каждой заклепки $F_s=k\pi d^2/4$ и условие прочности примет вид

$$n\geqslant\frac{P}{k\frac{\pi d^2}{4}}; \tag{8.3}$$

здесь k — число срезов.

Однако соблюдение условия прочности на срез еще не всегда обеспечивает прочность заклепочного соединения. Если при передаче давления от листов на заклепку произойдет обмятие стенок отверстия или стержня заклепки по полуцилиндрической поверхности контакта, то это приведет к расстройству соединения. Поэтому для обеспечения его надежности необходима также проверка заклепок (или листа) на *смятие*.

На рис. 89 указана примерная схема передачи давлений на стержень заклепки. Закон распределения этих давлений по цилиндрической поверхности нам неизвестен; он во многом зависит от условий изготовления конструкции. Принято считать, что неравномерное давление, передающееся на полуцилиндрическую поверхность заклепки, *равномерно* распределяется по диаметральной плоскости сечения заклепки BC. При этом напряжение по этой диаметральной

плоскости оказывается примерно равным наибольшему сминающему напряжению σ_c в точке A поверхности заклепки (рис. 89).

Чтобы вычислить это условное напряжение смятия, необходимо разделить силу, приходящуюся на заклепку, на площадь диаметрального сечения $BCC'B'$ (рис. 89). Эта площадь представляет собой прямоугольник, одной стороной которого служит диаметр заклепки, другая же равна толщине листа, передающего давление на стержень заклепки.

Так как давление на одну заклепку равно P/n, то

$$\sigma_c = \frac{P}{ntd};$$

условие прочности на смятие будет иметь вид

$$\sigma_c = \frac{P}{ntd} \leqslant [\sigma_c], \qquad (8.4)$$

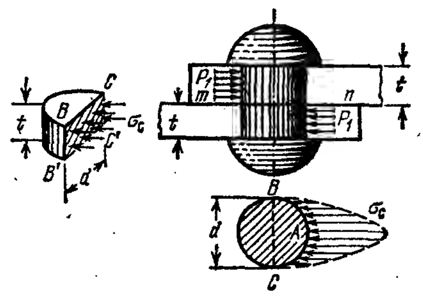


Рис. 89.

где $[\sigma_c]$ — допускаемое напряжение на смятие. Отсюда необходимое число заклепок

$$n \geqslant \frac{P}{td\,[\sigma_c]}. \qquad (8.5)$$

Допускаемое напряжение на смятие принимают обычно в 2—2,5 раза больше основного допускаемого напряжения на растяжение и сжатие $[\sigma]$, так как расчет на смятие по существу является упрощенной проверкой прочности по контактным напряжениям. Условия (8.4) и (8.5) одинаково справедливы как для односрезных, так и для двусрезных заклепок.

Ход вычислений по определению необходимого количества заклепок покажем на примере. Сравним два варианта заклепочного соединения — один внахлестку с односрезными заклепками (рис. 84) и другой — с двусрезными (рис. 87). Пусть $P=48\,000$ *кГ*; $t=1$ *см*; $[\tau]=1000$ *кГ/см²* и $[\sigma_c]=2400$ *кГ/см²*. Толщина накладок t_1 всегда больше $0{,}5\,t$.

а) Для соединения внахлестку получим по условию прочности на срез (8.1)

$$n \geqslant \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}[\tau]} = \frac{48\,000}{\frac{3{,}14 \cdot 2^2}{4} \cdot 1000} \approx 15,$$

по условию прочности на смятие (8.5)

$$n > \frac{P}{td\,[\sigma_c]} = \frac{48\,000}{1 \cdot 2 \cdot 2400} = 10.$$

Необходимо принять 15 заклепок.

б) Для соединения встык с двумя накладками по срезу (8.2)

$$n \geqslant \frac{P}{2\frac{\pi d^2}{4}[\tau]} \approx 8,$$

по смятию (8.5)

$$n \geqslant \frac{P}{td\,[\sigma_c]} = 10.$$

Следует принять 10 заклепок (с каждой стороны стыка).

При односрезных заклепках, как мы видим, количество их определялось из условия прочности на срез, а при двусрезных — на смятие.

Б. Наличие заклепок вносит некоторые изменения и в проверку прочности на растяжение или сжатие самих склепанных листов. Опасным сечением каждого листа (рис. 90) будет теперь сечение, проходящее через заклепочные отверстия; здесь рабочая ширина листа будет наименьшей; принято говорить, что это сечение

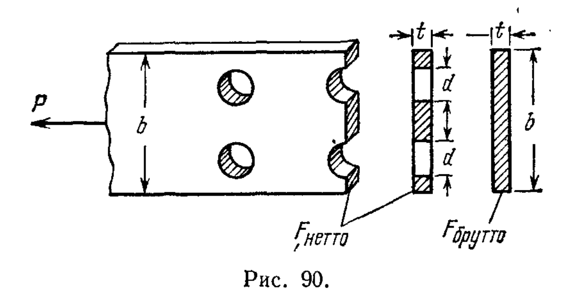


Рис. 90.

ослаблено заклепочным отверстием. Называя полную ширину листа b, получаем для него такое условие прочности:

$$\frac{P}{t(b-md)} \leqslant [\sigma], \qquad (8.6)$$

где m — число отверстий, попадающих в сечение (в нашем случае — два).

Отсюда можно найти величину b, задавшись толщиной листа t. Площадь $(b-md)t$ ослабленного сечения называется площадью нетто, площадь же полного сечения листа bt называется площадью брутто.

Этот учет влияния заклепочных отверстий на прочность склепываемых листов общепринят, но является весьма условным. На самом деле влияние отверстия в листе вызывает у его краев, на концах диаметра, перпендикулярного к направлению растяжения, значительные *местные напряжения*, которые могут достичь предела теку-

чести материала и вызвать остаточные деформации, захватывающие, однако, весьма небольшой объем материала листа.

Некоторую опасность в отношении образования трещин эти местные напряжения могут представить лишь при действии переменных нагрузок в материале, имеющем низкий предел усталости (§ 16). Однако в обычных условиях работы заклепочных соединений эта опасность может считаться исключенной. Во избежание возможности разрушения листов заклепками заклепки размещаются на определенных расстояниях друг от друга и от края листа. Расположение заклепок в плане производится как по условиям обеспечения прочности и плотности соединения, так и по чисто производственным соображениям.

В. Подобно заклепкам, на срез и на смятие работают также шарнирные болты в проушинах и болтовые соединения обычного типа, расчет которых не отличается от расчета заклепочных соединений.

Несколько иначе ведется расчет соединений на высокопрочных болтах, получивших в последние годы широкое распространение, в частности, в мостостроении. Такие болты ставятся взамен заклепок и затягиваются с помощью динамометрических ключей до очень высоких растягивающих усилий, обеспечивающих столь плотное обжатие соединяемых элементов, что создающиеся между ними силы трения в состоянии полностью воспринять усилия, передающиеся через соединение. *Высокопрочные болты ни на срез, ни на смятие не работают.*

Расчет таких соединений сводится к тому, чтобы обеспечить равновесие между внешними силами P, передающимися через соединение, и силами трения, развивающимися между соединяемыми элементами. Обозначив силу натяжения каждого болта через N, а коэффициент трения через f, получим условие прочности для соединения

$$P=\alpha Nfn. \tag{8.7}$$

Здесь n — количество болтов, а α — коэффициент, учитывающий возможные отклонения величин N и f от расчетных их значений ($\alpha<1$). Из равенства (8.7) определяется необходимое количество высокопрочных болтов

$$n\geqslant\frac{P}{\alpha Nf}. \tag{8.8}$$

По утвержденным нормам на проектирование металлических мостов принимают

$$N=0{,}6\cdot\sigma_в F,$$

где F — площадь сечения болта, ослабленного резьбой, а $\sigma_в$ — предел прочности материала болта, равный не менее $\sigma_в = 12\,000$ *кГ/см*^{2}. Коэффициенты принимаются: $\alpha=0{,}78$, а $f=0{,}40\div0{,}45$ в зависимости от марки стали.

§ 44. Расчет сварных соединений

При изготовлении металлических конструкций часто применяется сварка с помощью электрической дуги.

Электрическая дуговая сварка была изобретена в конце XIX века русскими инженерами Н. Н. Бенардосом (1882 г.) и Н. Г. Славяновым (1888 г.) и получила впоследствии широкое распространение во всем мире.

Сущность электросварки по методу Славянова заключается в том, что, расплавляя электрической дугой материал электрода (сталь), заполняют им стык соединяемых элементов, также прогреваемых дугой до температуры плавления. В результате, после остывания расплавленного металла, образуется шов, прочно соединяющий стыкуемые элементы (рис. 91).

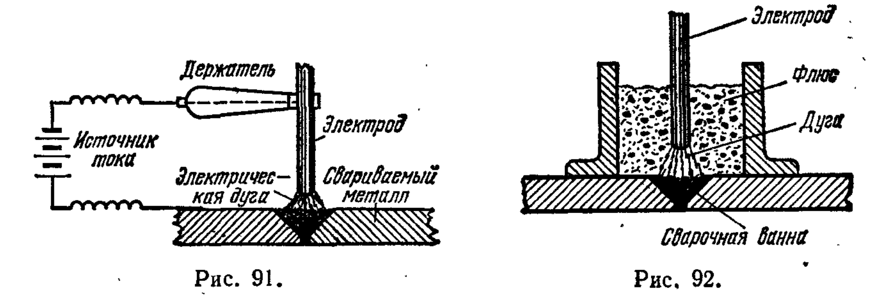


Рис. 91. Рис. 92.

Для защиты плавящегося металла от попадания вредных включений из окружающего воздуха на поверхность электрода наносится толстая защитная обмазка, выделяющая при плавлении электрода большое количество шлака и газов, благодаря чему плавящийся металл изолируется от окружающего воздуха. Этим обеспечивается высокое качество металла сварного шва, механические свойства которого могут резко ухудшиться под влиянием кислорода и азота воздуха (при отсутствии обмазки или при тонкой обмазке).

В настоящее время ручная сварка применяется главным образом в соединениях, осуществляемых относительно короткими швами, например, при сварке элементов металлических ферм, приварке уголков и т. п. В конструкциях же, где применяются длинные швы (например, при заводском серийном изготовлении сварных балок, сварке корпусов кораблей, газгольдеров и др.), применяют автоматическую сварку под слоем флюса (рис. 92). При автоматической сварке электродная проволока, свернутая в бухту, подается к свариваемому стыку на заданное расстояние до шва, чем обеспечивается постоянство длины дуги. Каретка с электродом движется по направляющим вдоль стыка с нужной для принятого режима сварки скоростью; защита дуги и шва от попадания кислорода и азота воздуха

осуществляется слоем флюса (гранулированного шлака специального состава), который также плавится в пламени электрической дуги, образуя хрупкую, легко снимающуюся корку.

Для сварки получивших в последние годы широкое распространение конструкций из алюминиевых сплавов применяют аргонодуговую сварку с помощью неплавящегося вольфрамого электрода и присадочной алюминиевой проволоки. Аргонодуговая сварка отличается тем, что дуга и расплавляемый металл защищаются от попадания вредных примесей из воздуха струей аргона.

Кроме электродуговой сварки в некоторых случаях для соединения тонких листов (например, приварки тонкой обшивки, сварки тонкостенных профилей и т. п.) применяется точечная контактная сварка; для этой цели соединяемые детали помещаются между плотно прижатыми к ним медными электродами, по которым пропускается ток; при этом в точках контакта происходит прогрев металла до температуры, обеспечивающей сварку соединяемых элементов.

При правильном выборе конструкций соединений, материалов и технологии сварки сварные соединения по надежности не уступают заклепочным при действии как статических, так и динамических нагрузок (в том числе ударных и знакопеременных). В то же время электросварка имеет ряд преимуществ перед клепкой, из которых важнейшими являются меньшая трудоемкость сварочных работ и отсутствие ослабления сечений соединяемых элементов отверстиями. Это дает значительную экономию средств и металла, помимо экономии, получаемой за счет большей компактности соединений. Большие экономические выгоды, приносимые электросваркой, и даваемое ею упрощение конструкций привели в последнее время к постепенному вытеснению заклепочных соединений сварными.

Расчет сварных соединений, как и заклепочных, условно ведется в предположении равномерного распределения напряжений по сечению швов. При этом он тесно связан с технологией сварки; в частности, это находит отражение в величине допускаемых напряжений для материалов швов, назначаемых в зависимости от способа сварки (ручная или автоматическая), а также от состава и толщины защитной обмазки электродов.

По существующим нормам для швов, выполненных автоматической сваркой под слоем флюса, а также вручную электродами высшего качества, допускаемые напряжения для материала швов принимаются такими же, как и для основного свариваемого металла. При сварке же обычными электродами допускаемые напряжения для швов снижаются на 10%.

Вследствие возможного непровара в начале шва и образования кратера в конце его, а также вследствие некоторого различия в структуре основного и наплавленного металла расчетную длину шва нередко принимают меньше действительной на 10 *мм*.

Рассмотрим методы расчета некоторых видов сварных соединений.

Наиболее простым и надежным видом соединения является *соединение встык*, образуемое путем заполнения зазора между торцами соединяемых элементов наплавленным металлом. Соединение встык осуществляется, в зависимости от толщины соединяемых элементов, по одному из типов, показанных на рис. 93. Проверка прочности производится на растяжение или сжатие по формуле

$$\sigma_э = \frac{P}{lt} \leqslant [\sigma_э]. \qquad (8.9)$$

Здесь $lt = F_э$ — условная рабочая площадь сечения шва, где расчетная длина шва $l = b$, а высота шва h принимается равной толщине свариваемых элементов t.

Рис. 93.

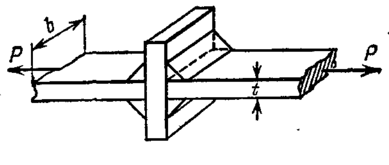


Рис. 94.

При учете возможного непровара на концах шва длина его принимается $l = b - 10$ *мм* и шов оказывается неравнопрочным с основным металлом. Заметим, что при надлежащем качестве сварки прочность стыкового соединения не ниже прочности основного металла даже при ударном нагружении [1]).

С целью повышения прочности стыка его иногда осуществляют в виде крестообразного соединения с помощью прокладки, привариваемой так называемыми валиковыми (или угловыми) швами (рис. 94). Такие же швы применяются в соединениях, перекрываемых накладками, при сварке листов внахлестку, или втавр.

Валиковые швы, привариваемые перпендикулярно к направлению действия силы, называются торцевыми (или лобовыми), а располагаемые параллельно приложенному к стыку усилия — боковыми (или фланговыми).

Валиковый шов в сечении имеет довольно неопределенную форму (рис. 95, *а*). В теоретических расчетах на прочность сечение

---

[1]) Кипнис Я. И., Навроцкий Д. И., Исследование прочности сварных соединений при ударе, Трансжелдориздат, 1956.

шва принимается в виде равнобедренного треугольника (очерченного пунктиром) с расчетной высотой h [1]) (рис. 95, *б*).

Соединения торцевыми (лобовыми) швами показаны на рис. 94 и 96. Разрушение таких швов происходит по наиболее слабому сечению *AB*, как это установлено опытами.

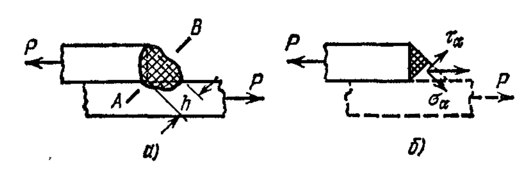
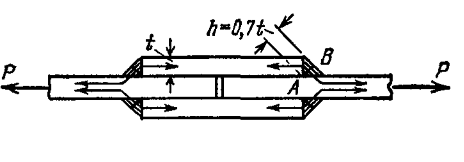
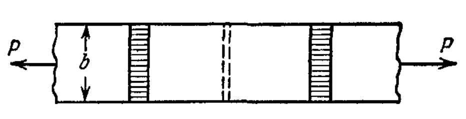


Рис. 95.

Как это видно из рис. 95, *б*, полное напряжение, возникающее в сечении *AB*, может быть разложено на нормальную и касательную составляющие. Поскольку сопротивление стали сдвигу ниже, чем растяжению, расчет лобовых швов производится условно на срез в предположении равномерного распределения касательных напряжений по площади сечения *AB*. Имея в виду, что на восприятие силы *P* в этих соединениях (рис. 96) работают два лобовых шва, верхний и нижний, получим

$$\tau_э = \frac{P}{2F_э}.$$





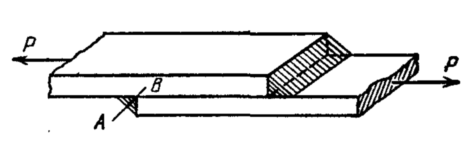


Рис. 96.

Так как площадь сечения шва $F_э = hl = t\cos 45° \cdot l \approx 0{,}7\,tl$, а расчетная длина $l = b$, то условие прочности примет вид

$$\tau_э = \frac{P}{1{,}4\,tl} \leqslant [\tau_э]. \qquad (8.10)$$

Так же рассчитывается и крестообразное соединение встык, показанное на рис. 94.

В действительности материал шва испытывает сложное напряженное состояние, причем напряжения по сечению *AB* распределяются неравномерно. Исследования, произведенные методами теории упругости и подтвержденные экспериментально, показали, что в углах шва имеет место высокая концентрация напряжений.

Кроме того, вследствие укорочения швов при остывании в зоне сварки возникают дополнительные (сварочные) напряжения не только в материале швов, но и в основном металле, вызывающие переход его в сложное напряженное состояние.

---

[1]) Иногда лобовые швы делают вогнутыми с высотой $h < 0{,}7t$. Катет шва может быть и меньше толщины листа.

Это обстоятельство может повести к снижению пластичности металла в стыке, что делает такое соединение (с лобовыми швами) менее надежным, особенно при ударных и переменных нагрузках, чем соединение встык без накладок.

Соединение *фланговыми* (или боковыми) швами показано на рис. 97, *а*. Разрушение шва, показанное на рис. 97, б, происходит на значительном его протяжении путем срезывания наплавленного

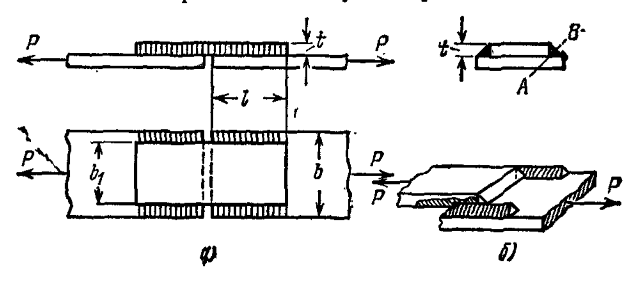


Рис. 97.

металла в направлении, параллельном шву по наиболее слабой плоскости AB. Условие прочности для двух симметрично расположенных швов таково:

$$\tau_э = \frac{P}{2 \cdot 0{,}7 \cdot t \cdot l} \leqslant [\tau_э]. \qquad (8.11)$$

Если стык перекрыт двусторонними накладками, число швов удвоится и условие прочности примет вид

$$\tau_э = \frac{P}{4 \cdot 0{,}7 \cdot t \cdot l} \leqslant [\tau_э]. \qquad (8.12)$$

Из формул (8.11) и (8.12) обычно определяют необходимую расчетную длину l фланговых швов. Проектная же длина каждого шва принимается равной $l_0 = l + 10$ *мм*.

Как показали опыты, разрушение фланговых швов происходит по типу разрушений пластичных материалов со значительными остаточными деформациями. Это делает работу фланговых швов более благоприятной, чем работу лобовых швов. Однако следует иметь в виду, что у концов фланговых швов также имеет место высокая концентрация напряжений.

При проектировании часто стремятся обеспечить бо́льшую надежность соединения, применяя вместо сварки встык, или в дополнение к ней, перекрытие стыка накладками, которые привариваются фланговыми или торцевыми швами, а иногда и теми и другими вместе. Как уже указывалось, при переменных и ударных нагрузках такое «усиление» стыка может принести больше вреда, чем пользы.

Что касается расчета такого комбинированного стыка, то при одновременном применении лобовых и фланговых швов считают, что сопротивление соединения равно сумме сопротивлений всех швов, т. е. $P=P_т+P_ф$, где сопротивление торцевого шва при расчетной длине $l_т$ равно

$$P_т=0{,}7t\cdot l_т[\tau_э],$$

а сопротивление двух фланговых швов

$$P_ф=2\cdot 0{,}7t\cdot l_ф\ [\tau_э],$$

причем $l_т=b$, где b — ширина накладки. В результате подстановки получаем

$$P=(0{,}7tl_т+1{,}4tl_ф)[\tau_э]. \qquad (8.13)$$

Зная длину торцевого шва, определяют длину фланговых швов $l_ф$. При двусторонних накладках число швов удваивается, т. е. правую часть формулы (8.13) следует удвоить.

Широкое применение электросварки в металлических конструкциях привело к созданию разнообразных видов сварных соединений, конструкция и расчет которых приводятся в специальной литературе [1]).

Приведенные выше методы расчета заклепочных и сварных соединений по допускаемым напряжениям приняты в машиностроении, судостроении, авиастроении и т. п. При проектировании же инженерных сооружений (гражданские и промышленные здания, мосты, тоннели и т. п.) в настоящее время у нас принят *принципиально новый* метод расчета по предельному состоянию (глава XXV), по существу, однако, мало отличающийся от расчета по допускаемым напряжениям.

По предельному состоянию ведется также и расчет соединений в деревянных конструкциях (врубок, шпонок и др.), работающих тоже на сдвиг и смятие. Существенной особенностью дерева является анизотропность древесины, вследствие чего она оказывает различное сопротивление сдвигу и смятию в зависимости от направления приложенного к рабочему элементу усилия по отношению к направлению волокон. Дерево лучше сопротивляется срезу и смятию вдоль волокон, чем поперек или под углом к ним, что учитывается соответствующими коэффициентами условий работы и др. Методы расчета подобных соединений приводятся в специальных курсах [2]).

---

[1]) См., например, Николаев Г. А., Куркин С. А., Винокуров В. А., Расчет, проектирование и изготовление сварных конструкций, «Высшая школа», 1971.

[2]) См., например, Павлов А. П., Деревянные конструкции, Гослесиздат, 1959. См. также «Строительные конструкции» под ред. Г. Овечкина, Госстройиздат, 1975.

Глава IX

КРУЧЕНИЕ. ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ СКРУЧИВАЕМОГО СТЕРЖНЯ

§ 45. Понятие о крутящем моменте

Результаты, которые получены при изучении деформации сдвига, позволяют перейти к решению задачи о проверке прочности при кручении. С кручением на практике приходится встречаться очень часто: оси подвижного состава, трансмиссионные валы, элементы пространственных конструкций, пружины и обыкновенный замочный ключ — все это примеры стержней, работающих на кручение.

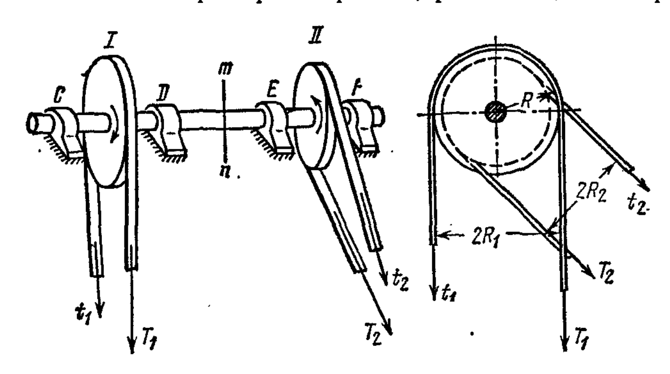


Рис. 98.

Рассмотрим сначала задачу о скручивании валов круглого поперечного сечения.

Представим себе (рис. 98) вал CF, на который насажены два шкива I и II. Вал поддерживается подшипниками C, D, E и F [1]). Шкив I передает валу вращение при помощи ременной передачи от электромотора. Шкив II передает это вращение станку, с которым он соединен тоже при помощи ремня.

К шкиву I приложены силы натяжения ведущей и набегающей ветвей ремня, T_1 и t_1, лежащие в плоскости, перпендикулярной к оси вала. Аналогично к шкиву II приложены силы натяжения ремня T_2 и t_2, передающие шкиву сопротивление со стороны станка. Эти силы, с одной стороны, создают давление на подшипники (как и собственный вес шкивов), а с другой — образуют пары сил, лежащие в плоскости, перпендикулярной к оси вала.

Обозначая радиус любого шкива через R и учтя, что натяжение ведущей ветви (T) больше натяжения ведомой (t), составим

[1]) Подшипники считаем расположенными так, что изгиб вала практически не имеет места.

уравнение моментов относительно центра круга (рис. 98)

$$M_1 = TR - tR = (T - t)R. \qquad (9.1)$$

Таким образом, силы T_1 и t_1 образуют пару, скручивающую вал в одну сторону (показанную стрелкой) и равную $(T_1 - t_1)R_1$, а сопротивление станка дает пару $(T_2 - t_2)R_2$, направленную в противоположную сторону.

При равномерном ходе машины все силы, действующие на вал, находятся в равновесии; вращающий момент $(T_1 - t_1)R_1$ все время уравновешивается сопротивляющимся: $(T_2 - t_2)R_2$, т. е.

$$(T_1 - t_1)R_1 = (T_2 - t_2)R_2 = M. \qquad (9.1')$$

Равновесие между моментом, передающимся через вал от двигателя к станку, и реактивным моментом от станка на вал имеет место при любом конструктивном выполнении передачи (клино-ременная, зубчатая, фрикционная и др.).

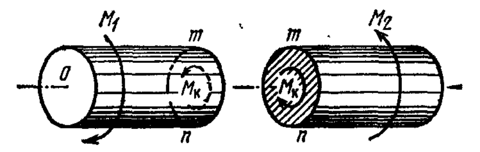


Рис. 99.

Участок вала между центрами шкивов подвергается действию двух равных и противоположно направленных пар сил, действующих в параллельных сечениях, поворачивающихся под действием моментов пар одно относительно другого: вал скручивается. Деформация кручения, таким образом, вызывается парами сил, лежащими в плоскостях, *перпендикулярных* к оси стержня.

Для выяснения характера внутренних усилий, возникающих в поперечных сечениях вала под действием этих пар, воспользуемся методом сечения. Рассмотрим, например, часть вала, расположенную слева от сечения mn (рис. 99). Из условия равновесия рассматриваемой части вала следует, что внутренние усилия должны привестись к паре с моментом $M_к = M_1$, уравновешивающим внешнюю пару, т. е. направленным в противоположную сторону. Точно так же при рассмотрении правой части найдем, что момент внутренних усилий в том же сечении приводится к паре $M_к = M_2$.

Момент внутренних усилий, возникающих в любом сечении вала при кручении и поворачивающий это сечение вокруг продольной оси, называется *крутящим моментом*. Величина и направление крутящего момента зависит от значения внешних моментов, приложенных к рассматриваемой части вала.

Знаки крутящих моментов проще определять по направлению внешних моментов. Условимся считать $M_к$ *положительным*, если при взгляде со стороны сечения *внешний момент* направлен *против* хода часовой стрелки. На рис. 99 $M_к > 0$.

Принятые для $M_к$ знаки соответствуют направлению внутренних усилий, передающихся от рассматриваемой части вала на другую, например, от левой — на правую.

Мы рассмотрели тот случай, когда на валу имеется лишь два шкива, передающих ему равные и противоположно направленные моменты M (9.1'); тогда часть вала между шкивами скручивалась моментом $M_к=M$.

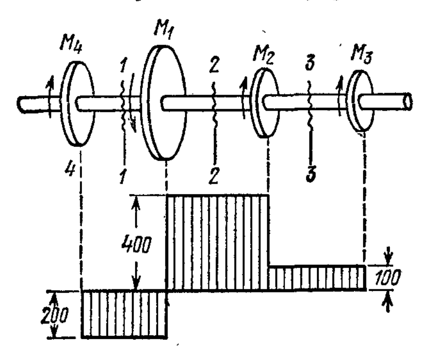


Рис. 100.

Бывают более сложные случаи, когда на валу насажено несколько шкивов: один — ведущий, остальные — ведомые; каждый шкив передает валу свой момент, и при равномерном ходе машины сумма всех моментов, действующих на вал, равна нулю.

На рис. 100 показан вал, на который действуют моменты M_1, M_2, M_3, M_4; M_1 — в одну сторону (от ведущего шкива), M_2, M_3 и M_4 — в другую сторону (от ведомых шкивов). При равномерном ходе вала

$$-M_1+M_2+M_3+M_4=0. \qquad (a)$$

Здесь крутящий момент на разных участках вала будет иметь различную величину. Часть вала слева от сечения *1—1* будет находиться в равновесии под действием момента M_4 и крутящего момента в сечении *1—1*; таким образом, для этого сечения $M_к$ будет равен M_4 со знаком минус, так как при взгляде со стороны сечения M_4 направлен по часовой стрелке. Следовательно,

$$M_{к_1}=-M_4.$$

Точно так же, рассматривая часть вала, расположенную левее сечения *2—2* (рис. 100), найдем, что момент внутренних усилий в этом сечении $M_{к_2}=-M_4+M_1$. К той же величине крутящего момента в сечении *2—2* мы пришли бы, рассматривая равновесие правой отсеченной части вала. В этом случае выражение для $M_к$ приняло бы вид $M_{к_2}=M_2+M_3$, причем по условию равновесия (а)

$$M_2+M_3=M_1-M_4.$$

Наконец, для сечения *3—3*, рассматривая правую часть вала, получим $M_{к_3}=M_3$ или $M_{к_3}=M_1-M_2-M_4$. Как видно из полученных равенств для $M_к$, крутящий момент в любом сечении вала *численно равен алгебраической сумме внешних моментов, расположенных по одну сторону от этого сечения.*

Величину крутящего момента на различных участках вала между шкивами можно изобразить графически, построив так называемую эпюру крутящих моментов. Для этого от оси абсцисс, располагаемой под схемой вала, откладываем ординаты, изображающие в выбранном масштабе величину крутящего момента на каждом участке с учетом его знака (положительные — вверх). Так как величина $M_к$ в пределах участка не зависит от положения сечения между шкивами, эпюра $M_к$ строится в виде прямоугольников.

Пусть величины показанных на рис. 100 моментов будут $M_1 = 600$ *кГм*; $M_2 = 300$ *кГм*; $M_3 = 100$ *кГм* и $M_4 = 200$ *кГм*.

Распределение крутящих моментов по длине вала показано на эпюре $M_к$ (рис. 100).

§ 46. Вычисление моментов, передаваемых на вал

Для вычисления крутящих моментов необходимо знать моменты, передаваемые на вал каждым шкивом.

Эти моменты можно определить, если нам известны число оборотов вала и передаваемая шкивом мощность. Пусть (рис. 101) на шкив действует пара сил с моментом M. Эту пару можно себе представить состоящей из двух сил P, приложенных к окружности шкива. При вращении шкива она производит работу, величина которой в единицу времени равна мощности, передаваемой шкивом.

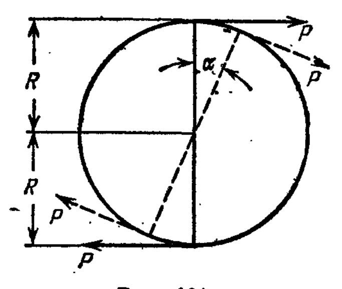


Рис. 101.

Вычислим работу пары M при вращении шкива. При повороте его на угол α каждая сила пары пройдет путь $R\alpha$, где R — радиус шкива; вся пара произведет работу

$$A = 2PR\alpha = M\alpha.$$

Таким образом, *работа пары сил при повороте на угол α равна моменту пары, умноженному на угол поворота (в радианах).*

Если вал совершает m оборотов в единицу времени, то работа момента будет равна $A = M \cdot 2\pi m$. С другой стороны, работа в единицу времени — это мощность W. Следовательно, момент M может быть выражен через известные мощности и число оборотов вала

$$M = \frac{W}{2\pi m}. \qquad (9.2)$$

Если мощность задана в лошадиных силах $W = N$ *л. с.*, или $W = 75\ N$ *кГм/сек*, а число оборотов в минуту $m = n$ *об/мин* или в секунду $n/60$, то

$$M = \frac{75 \cdot N \cdot 60}{2\pi \cdot n} = \frac{2250 \cdot N}{\pi \cdot n} = 716{,}2 \cdot \frac{N}{n}\ кГм. \qquad (9.3)$$

Мощность может быть задана также в киловаттах: $W=K$ *квт*. Так как 1 *квт* равен приближенно 102 *кГм/сек*, то

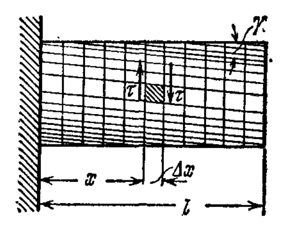
$$M=\frac{106\cdot 60}{2\pi}\cdot\frac{K}{n}\,кГм=973{,}6\,\frac{K}{n}\,кГм. \qquad (9.4)$$

По формулам (9.3) или (9.4) при данных N или K вычисляем моменты, передаваемые каждым шкивом, строим эпюру крутящих моментов и находим опасное сечение, где $M_к=M_{к,\,max}$.

§ 47. Определение напряжений при кручении вала круглого сечения

Построив эпюру $M_к$, мы можем найти в любом сечении вала величину крутящего момента, складывающегося из моментов внутренних усилий, действующих в сечении. Поставим задачу отыскания этих усилий и соответствующих напряжений в сечении. Для решения этой задачи воспользуемся результатами экспериментальных исследований, приведенными ниже.

А. Опыты показывают, что при скручивании вала круглого сечения парами M (рис. 102) происходит следующее.



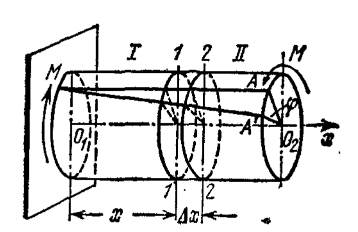


Рис. 102.

Все образующие поворачиваются на один и тот же угол γ, а квадраты, нанесенные на поверхность вала, перекашиваются, обращаясь в ромбы, т. е. подвергаются деформации сдвига.

Каждое поперечное сечение поворачивается относительно другого вокруг оси вала на некоторый угол, называемый *углом закручивания*. Величина этого угла пропорциональна величине крутящего момента и расстоянию между сечениями.

Торцевое сечение остается плоским, а контуры всех проведенных сечений не искажаются (круги остаются кругами).

Радиусы, нанесенные на торцевом сечении, после деформации не искривляются.

Расстояния между смежными сечениями практически не меняются, т. е. сечения *1—1* и *2—2*, поворачиваясь друг относительно друга на угол $\Delta\varphi$, сохраняют между собой расстояние Δx.

Таким образом, результаты опытов показывают, что при кручении стержень представляет как бы систему жестких кружков, насаженных центрами на общую ось O_1O_2. При деформации все эти кружки, не меняя своего вида, размеров и взаимных расстояний, поворачиваются один относительно другого.

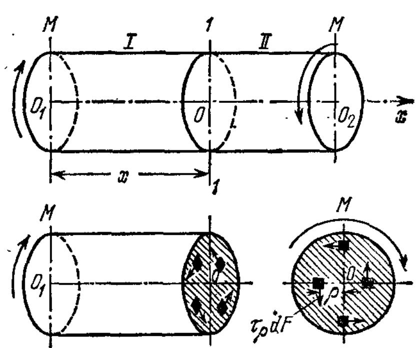


Рис. 103.

Перечисленные опытные наблюдения дают основание для принятия следующих *гипотез*:

1. Все поперечные сечения остаются плоскими.

2. Радиусы, проведенные в них, остаются прямыми.

3. Расстояния между сечениями не изменяются.

Приемлемость этих гипотез подтверждается тем, что формулы, полученные на их основе, хорошо согласуются с результатами опытов.

Б. Перейдем к отысканию напряжений, действующих по сечениям, перпендикулярным к оси вала. Разрежем мысленно (рис. 103) скручиваемый стержень O_1O_2 на две части *I* и *II* сечением *1—1*, перпендикулярным к оси вала и находящимся на расстоянии x от сечения O_1. Отбросим часть *II* стержня и оставим часть *I*. Рассматриваемая часть стержня должна оставаться в равновесии под действием внешнего момента M, приложенного в сечении O_1, и крутящего момента $M_к$, лежащего в плоскости проведенного сечения *1—1*. Условие равновесия отсеченной части имеет вид

$$M_к = M.$$

По определению, крутящий момент $M_к$ — это момент внутренних усилий, заменяющих действие отброшенной части вала. Чтобы сложиться в пары с моментом $M_к$, внутренние усилия в сечении и соответствующие напряжения должны быть касательны к плоскости сечения и перпендикулярны к радиусам [1]). Для вычисления моментов этих элементарных усилий и их суммы $\sum M_\tau = M_к$ возьмем любую точку сечения на расстоянии ρ от центра круга и выделим вокруг нее элементарную площадку dF (рис. 103). Тогда усилие, приложенное к ней, будет $dP = \tau_\rho dF$, где τ_ρ — касательное напряжение в рассматриваемой точке. Момент же этого усилия

[1]) *Если предположить, что τ не перпендикулярно к радиусу, то появится его составляющая вдоль радиуса, которая по закону парности потребует возникновения касательных напряжений вдоль образующих цилиндра, в том числе на свободной от всяких напряжений наружной поверхности вала (см. рис. 122).*

относительно точки O равен

$$dM_\tau = \tau_\rho \, dF \rho.$$

Считая площадку dF бесконечно малой, можно найти сумму моментов всех сил как определенный интеграл, распространенный по площади сечения:

$$\sum M_\tau = \int_F \tau_\rho \, dF \rho,$$

или, так как $\sum M_\tau = M_\kappa$,

$$\int_F \tau_\rho \cdot \rho \cdot dF = M_\kappa. \tag{9.5}$$

Однако найти из полученного уравнения величину τ мы пока не можем, так как еще не знаем, как распределяются касательные напряжения по сечению.

В. Уравнения статики не дают возможности довести до конца решение задачи определения напряжений по сечению $1—1$. Задача оказывается статически неопределимой, и для окончания ее решения нам придется обратиться к рассмотрению деформаций стержня, показанных на рис. 102 и 104.

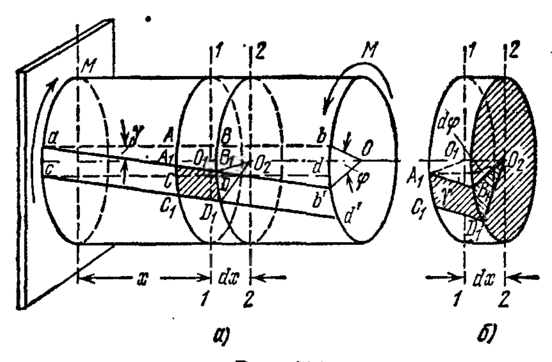


Рис. 104.

Выделим (рис. 104) на поверхности скручиваемого стержня до его деформации двумя смежными образующими ab и cd и двумя контурами смежных сечений $1—1$ и $2—2$ прямоугольник $ABDC$.

После деформации оба сечения, $1—1$ и $2—2$, повернутся относительно защемленного конца на углы φ_x (сечение $1—1$) и $\varphi_x + d\varphi$ (сечение $2—2$). На основании принятых гипотез оба сечения останутся плоскими, радиусы O_2B и O_1A, O_1C и O_2D останутся прямыми, а расстояние dx между сечениями $1—1$ и $2—2$ останется без изменения. При таких условиях весь элемент $ABDCO_1O_2$ сместится и *перекосится*, так как его правая грань, совпадающая с сечением

2—2, повернется на угол $d\varphi$ относительно левой, совпадающей с сечением *1—1*. Прямоугольник $ABDC$ займет положение, показанное на рис. 104 штриховкой. Перекошенный элемент $A_1B_1D_1C_1O_1O_2$ показан на рис. 105; там же пунктиром изображен вид этого элемента, если бы он не испытал перекоса, т. е. если бы его левая и правая грани обе повернулись на один и тот же угол.

Перекос, вызванный неодинаковым поворотом сечений *1—1* и *2—2*, обращает прямые углы прямоугольника $ABDC$ в тупые и острые; материал нашего элемента испытывает деформацию сдвига (рис. 102 и 104). Величина этой деформации будет характеризоваться *углом перекоса* — относительным сдвигом; на поверхности стержня в прямоугольнике $A_1B_1D_1C_1$ этот угол будет равен BA_1B_1; он обозначен на рис. 105 буквой γ.

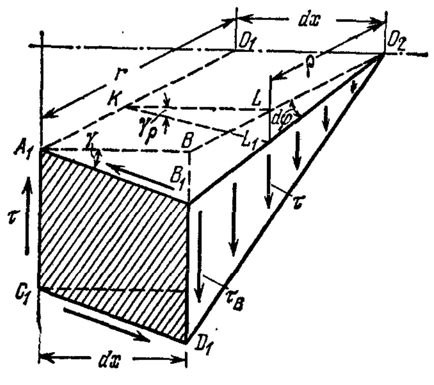


Рис. 105.

Как известно, деформация сдвига сопровождается возникновением касательных напряжений по граням перекашиваемого элемента (§ 36).

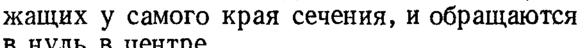
На рис. 105 изображены эти напряжения, приложенные к площадке $B_1D_1O_2$ выделенной на правой грани (поперечное сечение *2—2*) и горизонтальной поверхности элемента $A_1B_1O_2O_1$. Величину этих напряжений мы можем выразить через относительный сдвиг γ, характеризующий перекос прямоугольника $A_1B_1D_1C_1$, по формуле (6.37): $\tau=\gamma G$.

Так как абсолютный сдвиг элемента на поверхности вала равен $BB'=r\,d\varphi$, а относительный сдвиг $\gamma=\frac{BB'}{A_1B}=r\frac{d\varphi}{dx}$, то напряжение у точки B_1 будет $\tau_B=G\gamma=rG\frac{d\varphi}{dx}$.

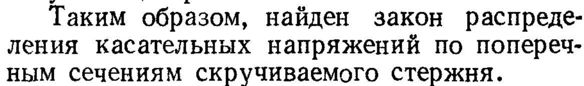
Найдем теперь напряжение τ_ρ в какой-нибудь другой точке сечения L_1, отстоящей от центра на расстоянии ρ (рис. 105). Для этого нужно найти величину относительного сдвига, который испытывает материал у точки L_1. На рис. 105 показан относительный сдвиг — угол перекоса LKL_1, обозначенный γ_ρ. Он будет *меньше*, чем относительный сдвиг γ на поверхности стержня. Повторяя те же рассуждения, что и при вычислении γ, мы найдем, что $\gamma_\rho=\rho\frac{d\varphi}{dx}$ и получим

$$\tau_\rho=\rho G\frac{d\varphi}{dx}. \qquad (9.6)$$

Относительный сдвиг и касательное напряжение в каждой точке поперечного сечения скручиваемого стержня *прямо пропорциональны* расстоянию ρ этой точки от центра сечения. Графически этот закон изменения касательных напряжений выражается прямой линией (рис. 106). Наибольшего значения τ достигают в точках, лежащих у самого края сечения, и обращаются в нуль в центре.

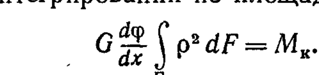


Таким образом, найден закон распределения касательных напряжений по поперечным сечениям скручиваемого стержня.



Г. Величину касательных напряжений теперь можно найти из уравнения (9.5). Подставляя вместо τ_ρ его значение (9.6) и вынося за знак интеграла величину $G\frac{d\varphi}{dx}$, постоянную при интегрировании по площади, получим

Рис. 106.



$$G\frac{d\varphi}{dx}\int\limits_F \rho^2\,dF = M_к.$$

$\int\limits_F \rho^2\,dF$, т. е. сумма произведений из элементарных площадок на квадраты расстояния их до точки O, называется *полярным моментом инерции* и обозначается J_p. Тогда

$$G\frac{d\varphi}{dx}\cdot J_p = M_к,$$

откуда угол закручивания на единицу длины вала (относительный угол закручивания) равен

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_к}{GJ_p}. \qquad (9.7)$$

Подставляя это в уравнение (9.6), получим

$$\tau_\rho = \frac{M_к}{J_p}\rho. \qquad (9.8)$$

Наибольшего значения напряжения достигнут в точках сечения у поверхности вала при $\rho = \rho_{max} = r$:

$$\tau_{max} = \frac{M_к\rho_{max}}{J_p} = \frac{M_к r}{J_p}. \qquad (9.9)$$

Формулу для τ_{max} можно представить в ином виде:

$$\tau_{max} = \frac{M_к\rho_{max}}{J_p} = \frac{M_к}{\left(\frac{J_p}{\rho_{max}}\right)} = \frac{M_к}{W_p}. \qquad (9.10)$$

Отношение $J_p/\rho_{max} = W_p$ называется *моментом сопротивления* при кручении; так как момент инерции J_p выражается в единицах

длины в четвертой степени, то момент сопротивления W_p измеряется в единицах длины в третьей степени.

J_p и W_p— это геометрические характеристики сечения при кручении, т. е. величины, характеризующие влияние формы и размеров сечения на сопротивляемость стержня скручиванию. Как показано ниже (§ 48), величины их определяются через диаметр вала.

§ 48. Вычисление полярных моментов инерции и моментов сопротивления сечения вала

Для вычисления $J_p = \int\limits_F \rho^2 \, dF$ выделим в сечении кольцевую площадку радиусами ρ и $\rho + d\rho$ (рис. 107). В пределах этого кольца выделим маленькую площадку dF. Просуммируем произведения $\rho^2 dF$ сначала для кольцевой площадки, а потом сложим полученные величины для всех кольцевых площадок, на которые можно разделить сечение. Так как все площадки внутри кольца находятся на одном и том же расстоянии ρ от центра, то для них

$$\sum \rho^2 \, dF = \rho^2 \sum dF.$$

Рис. 107.

Но $\sum dF$ для кольца, как площадь узкой полоски, равна $\sum dF = 2\pi\rho \, d\rho$ и, следовательно, $\rho^2 \sum dF = 2\pi\rho^3 \, d\rho$. Тогда, суммируя эти величины для всего сечения, получаем

$$J_p = \int\limits_0^r 2\pi\rho^3 \, d\rho = 2\pi \int\limits_0^r \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi r^4}{2},$$

или, выражая через диаметр,

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0{,}1 d^4. \qquad (9.11)$$

Это и будет полярный момент инерции для круга. Момент сопротивления при кручении для круга равен

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}} = \frac{\pi r^4}{2r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2 d^3. \qquad (9.12)$$

Из формулы (9.8) видно, что в точках сечения, близких к оси вала (при малых значениях ρ), напряжения τ невелики. Кручению вала сопротивляется главным образом материал, расположенный близ его поверхности, а малонапряженный материал, лежащий близко к оси вала, принимает лишь небольшое участие в сопротивлении скручиванию. Поэтому с целью экономии материала валы

больших диаметров нередко делают трубчатыми (рис. 108). При этом удаляется и наиболее загрязненная посторонними примесями центральная часть поковки, из которой изготовляют вал.

Вычислим момент инерции и момент сопротивления такого трубчатого сечения. Радиус наружного очертания назовем R, внутреннего r. Тогда заменяя $dF=2\pi\rho d\rho$, получим:

$$\left.\begin{aligned} J_p &= \int_F \rho^2 dF = 2\pi \int_r^R \rho^3\, d\rho = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4), \\ &\text{или} \\ J_p &= \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) \approx 0,1\,(D^4 - d^4). \end{aligned}\right\} \qquad (9.13)$$

Момент сопротивления

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}} = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2R} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}. \qquad (9.14)$$

Если задаться отношением диаметров $d/D=\alpha$, или $d=\alpha D$, то получим

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4), \qquad (9.13')$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4). \qquad (9.14')$$

При малой толщине t стенок трубчатого сечения ($t<0,1\,R$), обозначив средний радиус трубы $r_0 = \frac{R+r}{2}$ и имея в виду, что $R-r=t$, получим

$$J_p = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = \frac{\pi}{2}(R^2 + r^2)(R + r)(R - r) = \frac{\pi}{2}(R^2 + r^2)\,2r_0 t.$$

Заменяя $R=r_0+t/2$ и $r=r_0-t/2$ и пренебрегая квадратом малой толщины, после возведения в квадрат, получим для полярного момента инерции

$$J_p \approx 2\pi r_0^3 t. \qquad (9.15)$$

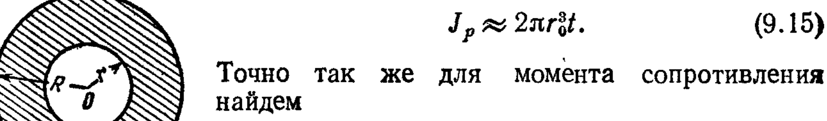


Рис. 108.

Точно так же для момента сопротивления найдем

$$W_p \approx 2\pi r_0^2 t. \qquad (9.16)$$

Эти приближенные формулы удобны для практических расчетов.

Как видно, для каждого поперечного сечения полярные момент инерции и момент сопротивления J_p и W_p имеют только одно вполне определенное значение, зависящее от поперечных размеров вала.

§ 49. Условие прочности при кручении

Зная величину полярного момента сопротивления сечения, можем найти max τ по формуле (9.10).

По условию прочности наибольшее касательное напряжение не должно превышать допускаемого, т. е.

$$\max \tau = \frac{M_к}{W_p} \leqslant [\tau]. \qquad (9.17)$$

Отсюда при известном крутящем моменте и выбранном допускаемом напряжении можно определить необходимый момент сопротивления сечения, а затем и необходимый радиус или диаметр вала.

Что касается величины допускаемого напряжения $[\tau]$, то, как выяснено выше (§ 42), его следует принимать от 0,5 до 0,6 основного допускаемого напряжения на растяжение, как и при чистом сдвиге. На практике величина $[\tau]$ колеблется для мягкой стали от 200 до 1000 *кГ/см*², для твердой — от 300 до 1200 *кГ/см*² в зависимости от характера нагрузки (постоянная, переменная, ударная) и величины местных напряжений, возникающих в тех местах вала, где в нем имеются гнезда для шпонок, выкружки и другие изменения формы сечения.

§ 50. Деформация при кручении. Условие жесткости

Как мы видели (§ 47), деформация стержня круглого сечения при кручении характеризуется взаимным поворотом смежных сечений. *Угол поворота одного сечения относительно другого мы назвали углом закручивания* φ. Для сечений, отстоящих друг от друга на расстояние dx, было получено (9.7)

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_к}{GJ_p}, \quad \text{или} \quad d\varphi = \frac{M_к\,dx}{GJ_p}.$$

При расстоянии между сечениями, равном l, угол закручивания будет

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_к\,dx}{GJ_p}. \qquad (9.18')$$

Обычно крутящий момент на длине участка остается постоянным; интегрируя по x, получим

$$\varphi = \frac{M_к l}{GJ_p}. \qquad (9.18)$$

Формула (9.18) имеет вид, вполне аналогичный соответствующей формуле при растяжении или сжатии, и выражает закон Гука при кручении. Как видно из формулы (9.18), величина угла

закручивания φ тем меньше (при данном $M_к$), чем больше произведение GJ_p — так называемая *жесткость* при кручении. Таким образом, J_p отражает влияние размеров поперечного сечения на деформируемость стержня при кручении, а G — влияние упругих свойств материала.

Если мы будем иметь вал с несколькими шкивами, делящими его на участки, скручиваемые различными моментами $M_к$, то по формуле (9.18) можно вычислить для каждого участка угол закручивания одного его конца по отношению к другому. Суммируя алгебраически эти углы закручивания для всех участков, получим полный угол закручивания между концевыми сечениями.

Вычисление углов закручивания имеет двоякое практическое значение: во-первых, оно необходимо для определения опорных реакций скручиваемых стержней в статически неопределимых системах — это редкий случай; во-вторых, умение вычислить угол закручивания необходимо для проверки жесткости вала.

Практикой выработаны высшие допустимые пределы для угла φ, которых нельзя переходить, чтобы не получить нарушения работы машины. Эти пределы таковы: в обычных условиях $[\varphi]=0{,}3^\circ$ на каждый метр длины вала; при переменных нагрузках $[\varphi]=0{,}25^\circ$; для внезапно (с ударом) меняющихся нагрузок $[\varphi]=0{,}15^\circ$. Иногда для обычных условий принимают $[\varphi]=1^\circ$ на длину, равную 20 диаметрам вала[1]).

Таким образом, размеры вала следует определять не только из условия прочности (9.17), но и из условия жесткости

$$\varphi=\frac{M_к l}{GJ_p}\leqslant[\varphi]. \tag{9.19}$$

Это условие часто выдвигается на первое место при длинных валах. Проверку жесткости вала покажем на примере.

Пусть вал передает мощность $N=150$ *л. с.* при $n=60$ *об/мин*. Надо подобрать диаметр вала из условия прочности и проверить его на жесткость при допускаемом напряжении $[\tau]=600$ *кГ/см*^{2} и допускаемом угле закручивания $|\varphi|=0{,}3^\circ$на погонный метр. Модуль упругости при сдвиге принят $G=8\cdot 10^5$ *кГ/см*^{2}.

Величину момента, передаваемого валом, найдем из (9.3)

$$M=716{,}2\frac{N}{n}=716{,}2\,\frac{150}{60}\approx 1800\ кГм=18\cdot 10^4\ кГсм.$$

По условию прочности (9.17) необходимый полярный момент сопротивления должен быть

$$W_p\geqslant\frac{M_к}{[\tau]}=\frac{M}{[\tau]}=\frac{18\cdot 10^4}{600}=300\ см^3.$$

---

[1]) В последнее время, в зависимости от назначения вала, допускаемый угол закручивания $|\varphi|$ принимается до 2° и более на погонный метр длины. Так, например, для карданных валов автомобилей допускают до $2{,}5^\circ$ на погонный метр.

Так как $W_p \approx 0{,}2d^3$ (9.12), то диаметр вала следует принять

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{300}{0{,}2}} = 11{,}45 \text{ см}.$$

Примем $d = 11{,}5$ *см* и проверим сечение на жесткость. По формуле (9.11) полярный момент инерции сечения можно принять

$$J_p \cong 0{,}1d^4 = 0{,}1 \cdot 11{,}5^4 = 1745 \text{ см}^4.$$

Угол закручивания на длине 1 *м* или 100 *см* по формуле (9.18)

$$\varphi = \frac{M_к l}{GJ_p} = \frac{18 \cdot 10^4 \cdot 100}{8 \cdot 10^5 \cdot 1745} = 0{,}129 \text{ рад} = 0{,}78^\circ > [\varphi].$$

Хотя условие прочности выполнено, однако для соблюдения условия жесткости диаметр вала следует увеличить, определив его из неравенства (9.19)

$$J_p \geqslant \frac{M_к l}{G \cdot [\varphi]},$$

откуда, подставив угол в радианах $[\varphi] = 0{,}3 \frac{\pi}{180}$, получим

$$d \geqslant \sqrt[4]{\frac{18 \cdot 10^4 \cdot 180}{0{,}1 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 0{,}3}} = 14{,}56 \text{ см}.$$

Таким образом, для обеспечения требуемой жесткости вала диаметр его следует принять $d \doteq 14{,}6$ *см*.

§ 51. Напряжения при кручении по сечениям, наклоненным к оси стержня

Изучая напряжения при скручивании стержня круглого сечения (§ 47), мы видели, что по сечениям, перпендикулярным к оси, в каждой точке действуют касательные напряжения τ. По закону парности касательных напряжений такие же напряжения (рис. 105) будут действовать и по продольным граням вырезанного нами из стержня элемента. Эти напряжения будут также наибольшими в точках у поверхности стержня и дойдут до нуля в точках оси.

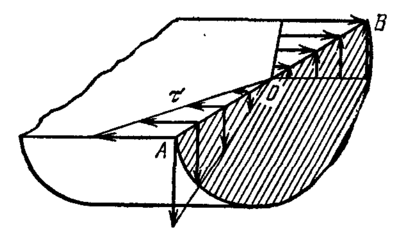


Рис. 109.

Таким образом, если мы проведем сечение через ось скручиваемого стержня диаметральной плоскостью (рис. 109), то в точках, расположенных по прямой AB, перпендикулярной к оси стержня, касательные напряжения будут изменяться по закону прямой линии. Нормальных напряжений по этим плоскостям не будет. Они действуют по наклонным сечениям и достигают наибольшего значения по сечениям, наклоненным к оси стержня под углом 45°.

В самом деле, элемент *ABCD*, вырезанный у поверхности вала (рис. 110), подвергается по своим боковым граням действию лишь касательных напряжений; он находится в тех же условиях, что и элемент *abcd* на рис. 75, т. е. в условиях чистого сдвига. Поэтому по площадкам, наклоненным на угол 45° к оси стержня,

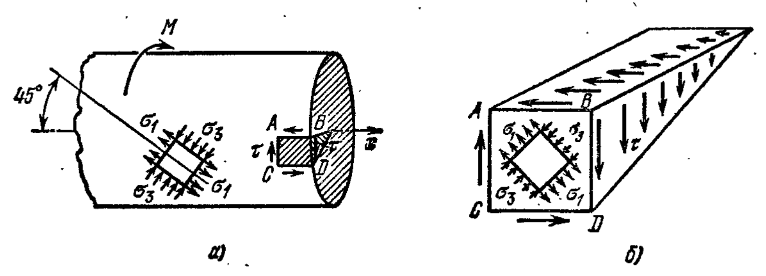


Рис. 110.

касательных напряжений не будет; это — главные площадки, по которым действуют растягивающие и сжимающие главные напряжения σ_1 и σ_3, равные в каждой точке напряжению τ (см. рис. 105).

Величина их для всех точек сечения меняется пропорционально расстоянию до центра и равна τ. Хрупкие материалы, например

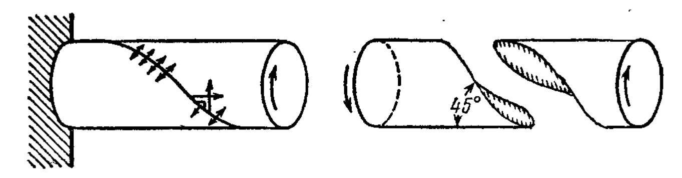


Рис. 111.

чугун, разрушаются при кручении от разрыва по наклонным сечениям *BC* (рис. 110 и 111), т. е. по тем, где действуют наибольшие растягивающие напряжения.

Зная величину и направление главных напряжений в любой точке, мы можем найти нормальные и касательные напряжения по какой угодно наклонной площадке из круга напряжений или по формулам (6.5) и (6.6). Что касается проверки прочности, то, так как при кручении наибольшие нормальные и касательные напряжения равны по абсолютной величине, допускаемые же величины для касательных напряжений меньше, чем для нормальных, понятно, что при кручении, как и вообще при чистом сдвиге, можно ограничиться проверкой лишь по отношению к касательным напряжениям.

§ 52. Потенциальная энергия при кручении

Выше, при изучении растяжения, было показано (§ 35), что при деформации упругой системы в ней накапливается энергия, которую мы назвали потенциальной энергией деформации.

Это явление имеет место и при кручении. Если упругий стержень в пределах упругости закрутить на некоторый угол, то после удаления внешних сил он будет раскручиваться и может произвести работу за счет накопившейся в стержне потенциальной энергии кручения. Пренебрегая необратимыми потерями (нагревание, внутреннее трение и т. п.), мы должны считать, что обнаруживаемая таким образом работа внутренних сил, определяемая количеством потенциальной энергии упругой деформации U, равна работе внешних сил A.

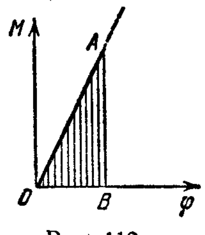


Рис. 112.

Пусть имеется вал, закрепленный одним концом, к свободному концу которого будем прикладывать пару сил с моментом, постепенно возрастающим от нуля до конечного значения M. По мере возрастания величины момента пары сил будет расти и угол закручивания φ, связанный с $M_к$ уравнением (9.18)

$$\varphi = \frac{M_к l}{GJ_p}.$$

Если откладывать по оси абсцисс углы закручивания (деформацию), а по оси ординат соответствующие значения крутящего момента, то их взаимная зависимость изобразится наклонной прямой OA (рис. 112). Повторяя рассуждения, проведенные для вычисления работы силы P при растяжении, найдем, что работа пары M выразится площадью треугольника OAB:

$$A = \frac{M_к \varphi}{2}. \qquad (9.20)$$

Наличие множителя 1/2 в формуле (9.20) объясняется тем, что момент M был приложен не сразу всей своей величиной, а прикладывался в порядке постепенного, статического роста от нуля до конечного его значения.

Подставляя вместо φ его значение из уравнения (9.18) и имея в виду, что $U=A$, получим выражение для потенциальной энергии при кручении

$$U = \frac{M_к^2 l}{2GJ_p}. \qquad (9.21)$$

Потенциальная энергия может быть выражена и через деформацию; если в формуле (9.20) заменить значение крутящего момента

выражением из формулы (9.18)

$$M_к = \frac{GJ_p}{l} \cdot \varphi,$$

то формула для потенциальной энергии примет вид

$$U = \frac{GJ_p}{2l} \cdot \varphi^2. \qquad (9.22)$$

Из формул (9.21) и (9.22) видно, что потенциальная энергия при кручении, как и при растяжении, является функцией второй степени от силы или от деформации.

§ 53. Напряжения и деформации в винтовых пружинах с малым шагом витков

В рессорах вагонов, в клапанах и в других деталях механизмов применяются винтовые пружины, подвергающиеся действию сил, сжимающих или растягивающих пружину. При проектировании таких пружин необходимо уметь вычислять наибольшее напряжение (для проверки прочности) и определять деформацию пружины — ее удлинение или осадку. Последнее необходимо, так как на практике регулируют нагрузки, приходящиеся на пружину, давая ей бо́льшие или меньшие деформации сжатия или растяжения.

Таким образом, необходимо по размерам пружины уметь вычислить зависимость между ее деформацией и силой. Оказывается, что материал пружины испытывает напряжения кручения, как это будет показано ниже.

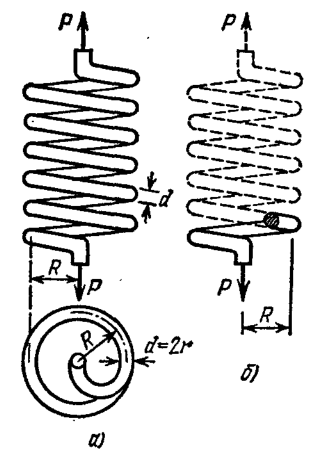


Рис. 113.

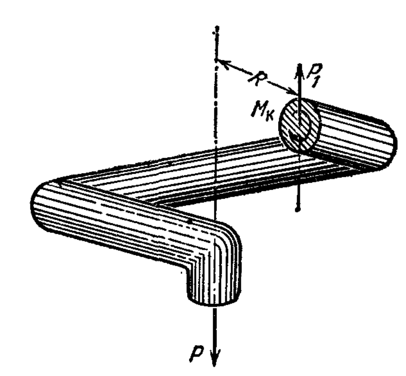


Рис. 114.

Мы ограничимся рассмотрением винтовой пружины с малым шагом витков, т. е. с малым по сравнению с ее диаметром расстоянием между смежными витками. При этом условии наклоном витков

можно пренебречь и считать, что любое поперечное сечение параллельно силам P, приложенным вдоль оси пружины и растягивающим или сжимающим ее (рис. 113).

Обозначим: радиус винтовой оси пружины R; диаметр проволоки, из которой она свита, $d=2r$; число витков пружины n и модуль сдвига материала G.

Для определения внутренних усилий и напряжений, возникающих в сечении при растяжении (или сжатии) пружины, разрежем один из витков плоскостью, проходящей через ось пружины, и рассмотрим равновесие одной из отсеченных частей, например нижней (рис. 113, *б* и 114). Приложенная к этой части внешняя сила P, направленная вниз, уравновешивается направленным вверх внутренним усилием $P_1=P$, лежащим в плоскости сечения и передающимся через это сечение от верхней отброшенной части на нижнюю.

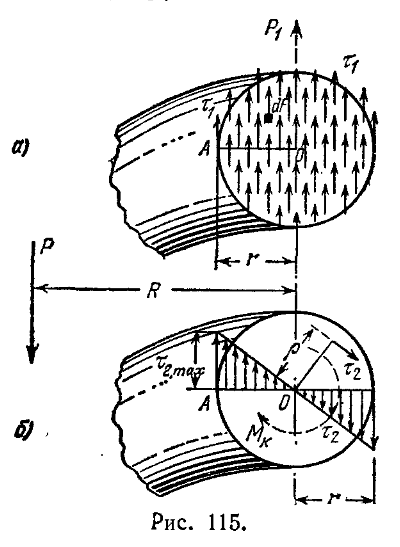


Рис. 115.

Так как силы P и P_1 образуют пару с моментом $M=PR$, вращающим рассматриваемую часть пружины против хода часовой стрелки, то уравновесить её может только лежащий в плоскости сечения момент внутренних сил $M_к=PR$, направленный по ходу часовой стрелки. Поскольку внутренние усилия P_1 и $M_к$, заменяющие действие верхней части пружины на нижнюю, лежат в плоскости сечения, они складываются из *касательных* напряжений. Сдвигающая сила $P_1=P$ образуется из элементарных касательных усилий $dP_1=\tau_1 dF$, удерживающих сечение от сдвига вниз (рис. 115, *а*). Предполагая равномерное распределение напряжений τ_1 по площади сечения, выразим силу $P_1=\tau_1 F$, откуда напряжение среза

$$\tau_1=\frac{P_1}{F}=\frac{P}{\pi r^2}. \qquad (9.23)$$

Крутящий момент $M_к$, удерживающий сечение от вращения (рис. 114), как известно, связан с касательными напряжениями τ_2 при кручении формулой

$$\tau_2=\frac{M_к}{J_p}\rho=\frac{PR}{J_p}\rho. \qquad (9.24)$$

Обе системы напряжений τ_1 и τ_2, возникающие в сечении при растяжении пружины силами P, показаны на рис. 115, *а* и *б*. В каж-

дой точке сечения τ_1 и τ_2 складываются геометрически и лишь вдоль радиуса AO направления их совпадают.

Так как наибольшие напряжения кручения возникают в точках контура сечения (9.10), т. е.

$$\tau_{2,\,\max}=\frac{M_к}{W_p}=\frac{2PR}{\pi r^3},$$

то наиболее опасной точкой сечения будет точка A у внутреннего края контура, где τ_1 и τ_2 складываются арифметически. Следовательно, наибольшее суммарное касательное напряжение в сечении пружины равно

$$\tau_{\max}=\frac{P}{\pi r^2}+\frac{2PR}{\pi r^3}=\frac{P}{\pi r^2}\left(1+\frac{2R}{r}\right). \tag{9.25}$$

По условию прочности $\tau_{\max}\leqslant[\tau]$, или

$$\tau_{\max}=\frac{P}{\pi r^2}\left(1+\frac{2R}{r}\right)\leqslant[\tau]. \tag{9.25'}$$

Так как в большинстве случаев второе слагаемое в скобках значительно больше единицы, то обычно пренебрегают первым слагаемым — напряжением от простого перерезывания — и учитывают лишь кручение стержня парами PR. Тогда

$$\tau_{\max}=\frac{2PR}{\pi r^3}. \tag{9.26}$$

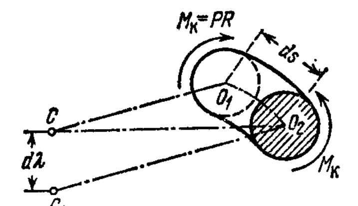


Рис. 116.

При таком упрощении очень легко вычислить удлинение оси пружины, которую мы обозначим λ.

Вырежем из пружины отрезок длиной ds двумя смежными сечениями — CO_1 и CO_2, проходящими через ось пружины (рис. 116). Так как эти сечения мы выбираем весьма близко, то можно принять, что до деформации радиусы R, идущие от оси пружины к центрам проведенных сечений, лежат в одной плоскости и образуют треугольник O_1CO_2.

После деформации второе сечение, вследствие скручивания участка стержня длиной ds, повернется относительно первого на угол $d\varphi=M_к ds/(GJ_p)$. Тогда радиус O_2C повернется относительно радиуса O_1C тоже на угол $d\varphi$, и точка C переместится в положение C_1, что повлечет опускание конца пружины на величину

$$d\lambda=R\,d\varphi=R\frac{M_к\,ds}{GJ_p}.$$

Если мы учтем, что все элементы ds стержня пружины деформируются таким же образом, то полное опускание нижнего конца

пружины, т. е. ее удлинение, выразится суммой величин $d\lambda$:

$$\lambda = \sum d\lambda = \int_0^l R \frac{M_к \, ds}{GJ_p} = R \frac{M_к l}{GJ_p}. \qquad (9.27)$$

Здесь $l = \int_0^l ds$ — полная длина стержня пружины, а $\frac{M_к l}{GI_p}$ — взаимный угол закручивания концов стержня пружины, определенный в предположении, что стержень распрямлен.

Пренебрегая наклоном витков к горизонтали и принимая число их n, получаем, что полная длина винтового стержня равна

$$l = 2\pi R n;$$

тогда

$$\lambda = \frac{M_к R}{GJ_p} 2\pi n R = \frac{4PR^3 n}{Gr^4}. \qquad (9.28)$$

Ту же формулу можно получить путем сравнения работы внешних сил $A = \frac{1}{2} P$ с потенциальной энергией кручения $U = \frac{M_к^2 l}{2GJ_p}$, что рекомендуется сделать учащимся самостоятельно.

Обозначая допускаемую величину удлинения (или осадки) пружины через $[\lambda]$, напишем условие жесткости для нее:

$$\lambda = \frac{4PR^3 n}{Gr^4} \leqslant [\lambda]. \qquad (9.28')$$

Формулы (9.25′) и (9.28′) дают возможность проверить прочность и определить деформацию пружины.

Чем выше допускаемое напряжение на срез $[\tau]$, тем более гибкой будет пружина, тем бóльшую осадку она даст при том же грузе P, так как ее можно сделать из стержня меньшего поперечного сечения. Так как рессоры должны быть достаточно гибкими, то для них берется закаленная сталь с очень высоким пределом упругости; допускаемое напряжение на срез достигает здесь 40 *кГ/мм*² и даже 80 *кГ/мм*². Для хромованадиевой стали допускаются напряжения в растянутых пружинах до 70 *кГ/мм*² при r от 6 *мм* до 8 *мм*. Для фосфористой бронзы при $G=4400$ *кГ/мм*² и r до 8 *мм* допускают $[\tau]=13$ *кГ/мм*².

Эти напряжения могут быть допущены при спокойной нагрузке. Для изменяющейся нагрузки они понижаются примерно на 1/3, а при непрерывно работающих пружинах (пружины клапанов) примерно на 2/3. В этих случаях большую роль играет возможность развития трещин усталости (см. § 16). Кроме того, клапанные пружины часто работают при высоких температурах, что также требует снижения основных допускаемых напряжений.

На практике при расчете пружин в формулу (9.25) вводят поправочный коэффициент k, учитывающий как влияние перерезывания, так и ряд других, не учтенных выше факторов (изгиб стержня пружины, продольные деформации и т. д.); величина этого коэффициента тем больше, чем больше отношение r/R, т. е. чем более жестка в геометрическом отношении пружина.

Вместо формулы (9.25), учитывающей помимо кручения только дополнительное влияние перерезывания сечения пружины силой P, ведут расчет по формуле

$$\max \tau = k\frac{M_к}{W_p} = k\frac{PR}{\frac{\pi r^3}{2}}; \tag{9.29}$$

поправочный коэффициент k может быть взят по таблице 8.

Таблица 8

Поправочные коэффициенты для расчета пружины

R/r	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15
k	1,42	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14	1,12	1,11	1,09

При расчете пружин иногда заданной является не сила, сжимающая или растягивающая пружину, а энергия T, которая должна быть ею поглощена. Подобно тому, как это было при растяжении или сжатии стержня, потенциальная энергия деформации пружины U измеряется работой внешних сил.

Так как для пружины зависимость между λ и P прямолинейна (формула (9.28)), потенциальная энергия деформации пружины равна

$$U = \frac{1}{2}P\lambda = \frac{2P^2R^3n}{Gr^4}. \tag{9.30}$$

Из формулы (9.26) имеем

$$PR = \frac{\tau\pi r^3}{2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (9.30), получим

$$U = \frac{2\pi Rn}{4G}\pi r^2\tau^2.$$

Так как $2\pi Rn$ — длина стержня пружины, а πr^2 — площадь сечения, то

$$U = \frac{\tau^2}{4G}V, \tag{9.31}$$

где V — объем пружины; из (9.31), учитывая, что $U=T$, находим

$$V = \frac{4GT}{[\tau]^2}. \tag{9.32}$$

Таким образом, задавшись предельной величиной напряжения $\tau=[\tau]$, мы можем вычислить объем пружины, необходимый для поглощения заданной величины энергии $T=U$, с тем, чтобы не были превышены допускаемые напряже-

ния [τ]. При этом необходимо проверить осадку пружины при напряжениях [τ]; она должна быть такой, чтобы не произошло закрытия зазоров между витками.

Для примера определим величину наибольшего напряжения и удлинение винтовой цилиндрической пружины, показанной на рис. 113, если радиус оси пружины $R=100$ *мм*, диаметр проволоки $d=20$ *мм*, число витков $n=10$ и растягивающая сила $P=220$ *кГ*. Модуль упругости при сдвиге принят $G=8{,}5\cdot 10^5$ *кГ/см*².

Для вычисления напряжений воспользуемся формулой (9.29). Так как отношение $R/r=10$, то поправочный коэффициент (по таблице 8) $k=1{,}14$ и

$$\tau_{max}=k\frac{2PR}{\pi r^3}=1{,}14\frac{2\cdot 220\cdot 10}{3{,}14\cdot 1^3}=1592\ кГ/см^2.$$

Удлинение (осадка) пружины по формуле (9.28) будет

$$\lambda=\frac{4PR^3}{Gr^4}=\frac{4\cdot 220\cdot 10^3\cdot 10}{8{,}5\cdot 10^5\cdot 1^4}=10{,}4\ мм.$$

Кроме цилиндрических винтовых пружин на практике приходится встречаться с *коническими* пружинами (рис. 117). Радиусы верхнего и нижнего витков обозначены соответственно R_1 и R_2; величина промежуточного радиуса R определяется формулой

$$R=R_1+\frac{R_2-R_1}{2\pi n}\alpha,$$

где n — число витков, а α — угол, образованный рассматриваемым радиусом с верхним радиусом R_1 и отсчитываемый по виткам пружины.

Проверка прочности для конической пружины производится по формулам (9.25) или (9.26) с заменой в них величины R ее наибольшим значением R_2. Что касается осадки λ, то при ее вычислении, как и раньше, надо суммировать элементарные деформации

$$d\lambda=\frac{M_к R\,ds}{GJ_p},$$

где $M_к$— теперь переменная величина PR.

Таким образом,

$$\lambda=\int\frac{M_к\,ds}{GJ_p}R=\frac{P}{GJ_p}\int\limits_0^{2\pi n}\left[R_1+\frac{(R_2-R_1)\alpha}{2\pi n}\right]^3 d\alpha=$$

$$=\frac{Pn}{r^4G}[R_1^2+R_2^2][R_1+R_2]. \qquad (9.33)$$

Рис. 117.

Иногда пружины делают из стержня не круглого, а прямоугольного сечения; тогда приходится для вычисления напряжений и деформаций пользоваться данными, приведенными в § 54 (таблица 9).

§ 54. Кручение стержней некруглого сечения

В инженерной практике часто встречаются случаи работы на кручение стержней некруглого сечения, в том числе прокатных и тонкостенных. При кручении таких стержней поперечные сечения их не остаются плоскими, а коробятся; как показано на примере

прямоугольного сечения, отдельные точки его выходят из плоскости (одни внутрь, другие наружу) — сечения, как говорят, подвергаются *депланации* (рис. 118).

А. При скручивании стержня постоянного сечения парами, приложенными к свободным его концам, депланация всех поперечных сечений оказывается одной и той же; поэтому расстояния между одинаково расположенными точками смежных сечений, т. е. длины продольных волокон, не изменяются. Значит, при такой равномерной депланации нормальные напряжения в поперечных сечениях не возникают.

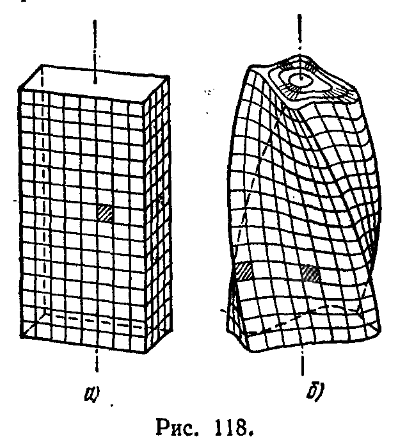


Рис. 118.

Такой вид кручения, при котором в поперечных сечениях скручиваемого стержня не возникает нормальных напряжений, называется *чистым* или *свободным кручением*. Заметим, что чистое кручение возможно лишь при беспрепятственной (свободной) депланации всех сечений. Величина и характер распределения касательных напряжений при чистом кручении во всех поперечных сечениях *одинаковы*.

Если депланация хотя бы одного из сечений скручиваемого некруглого стержня по каким-либо причинам стеснена (например, по условиям его закрепления или нагружения), то кручение уже не будет свободным: оно будет сопровождаться изменением длины продольных волокон и возникновением в поперечных сечениях *нормальных* напряжений. Касательные напряжения в этом случае в разных сечениях различны: они складываются из касательных напряжений чистого кручения и добавочных, связанных с неравномерностью депланации по длине стержня. Такой вид кручения при стесненной (несвободной) депланации называется *стесненным* кручением.

Примеры свободного (чистого) и стесненного кручения одного и того же стержня двутаврового профиля приведены на рис. 119 и 120. На рис. 119 показан характер деформации двутавра со свободными концами, к которым приложены крутящие пары с моментами M_0, т. е. случай чистого кручения. На рис. 120 изображен вид деформации двутавра под действием тех же крутящих пар M_0, приложенных к его концам; но один из концов стержня защемлен, поэтому сечение в заделке остается плоским, депланация его полностью стеснена и препятствует свободной депланации смежных сечений. Лишь на правом свободном конце стержня ее можно считать нестесненной. Следовательно, мы здесь имеем дело со случаем стесненного кручения, или, как его еще называют,— изгибного кручения (полки двутавра при его скручивании изгибаются, как и вообще элементы тонкостенных стержней).

Задача о стесненном кручении двутавра впервые была поставлена и решена проф. С. П. Тимошенко в 1905 г.[1]). Однако подобные задачи привлекли внимание инженеров и исследователей лишь с конца 20-х годов, в связи с развитием авиастроения и внедрением в строительство тонкостенных конструкций. Большой вклад в теорию расчета тонкостенных стержней и оболочек внесли и советские ученые, в частности проф. В. З. Власов, предложивший общую теорию расчета тонкостенных стержней открытого профиля (1939 г.) [2]). В последующие годы эта теория получила дальнейшее развитие и вместе с теорией расчета оболочек выросла в самостоятельную отрасль строительной механики, которой посвящена обширная литература.

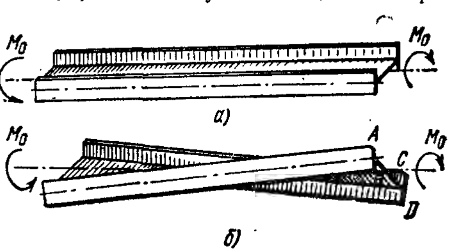


Рис. 119

Теория стесненного кручения в известной части опирается на теорию чистого кручения стержней некруглого сечения, некоторые результаты которой изложены ниже.

Б. Поскольку кручение стержней некруглого сечения сопровождается депланацией сечений, основная гипотеза сопротивления материалов — гипотеза плоских сечений — становится неприменимой. Решение задач о кручении таких стержней требует более сложного математического анализа и может быть выполнено лишь методами теории упругости.

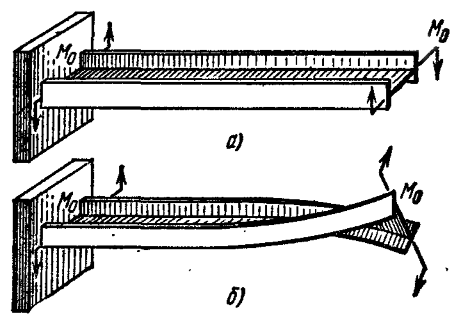


Рис. 120.

Первое теоретическое исследование чистого кручения стержней некруглого сечения было выполнено Сен-Венаном в 1864 г., им же был разобран и ряд частных случаев решения этой задачи (кручение стержней прямоугольного и эллиптического сечения). На основе разработанного Сен-Венаном общего метода расчета таких стержней в настоящее время выполнено решение многих задач о свободном кручении стержней, в том числе — весьма сложных очертаний. Однако при всей сложности решения подобных задач теории упругости результаты их можно привести к простому и удобному для пользования виду. Формулы для наибольших касательных напряжений и для деформаций приводятся к выражениям, вполне аналогичным формулам, полученным для наибольших напряжений и угла закручивания при кручении круглых стержней:

$$\tau_{max}=\frac{M_к}{W_к}, \qquad (9.34)$$

$$\varphi=\frac{M_к l}{GJ_к}. \qquad (9.35)$$

В этих формулах $J_к$ и $W_к$ — геометрические характеристики сечения (подобные J_p и W_p для круглых сечений и имеющие ту же размерность), условно названные

[1]) Известия СПб. Политехнического института, т. 4, 1905.

[2]) Власов В. З., Тонкостенные упругие стержни, Стройиздат, 1940. См. также Беляев Н. М., Сопротивление материалов, «Наука», 1965.

моменты инерции при кручении ($J_к$) и моментом сопротивления при кручении ($W_к$). Для круглого или кольцевого сечения $J_к = J_p$ и $W_к = W_p$.

Для некоторых типов сечений решения для этих геометрических характеристик получены в замкнутом виде: для эллипса, например,

$$J_к = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}; \quad W_к = \frac{\pi a b^2}{2}. \tag{9.36}$$

Здесь a и b — большая и малая полуоси эллипса. Вид эпюры касательных напряжений в сечении эллипса показан на рис. 121. Напряжения вдоль контура сечения

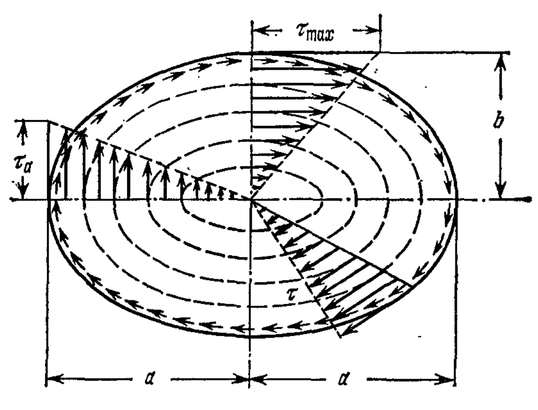


Рис. 121.

образуют сплошной поток, касательный к контуру, и достигают максимума у конца малой полуоси $\left(\tau_{max} = \frac{M_к}{W_к}\right)$; у конца большой полуоси $\tau_a = \frac{b}{a}\tau_{max}$.

Аналогичные потоки τ в сечении направлены по замкнутым кривым, показанным пунктиром (траектории касательных напряжений). Величины τ возрастают от центра к контуру эллипса по закону прямой линии (рис. 121).

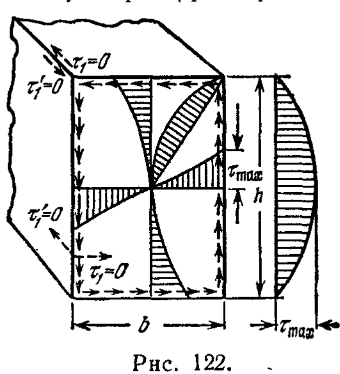


Рис. 122.

Заметим, что при кручении стержня *любого* профиля касательные напряжения у контура сечения должны быть направлены по касательной к нему, что вытекает из закона парности их. Если допустить возможность возникновения составляющих τ_1, перпендикулярных к контуру, то на свободной от всяких напряжений боковой поверхности стержня должны будут появиться касательные напряжения, парные этим составляющим (рис. 122). По той же причине в выступающих углах контура $\tau = 0$. Это мы видим на примере прямоугольного сечения (рис. 122 — верхний левый угол).

Для прямоугольника со сторонами b и h геометрические характеристики зависят от отношения сторон и выражаются формулами

$$J_к = \alpha b^4 \text{ и } W_к = \beta b^3, \tag{9.37}$$

либо

$$J_к=\alpha_1 hb^3;\quad W_к=\beta_1 hb^2, \qquad (9.37')$$

где

$$\alpha_1=\frac{b}{h}\alpha \text{ и } \beta_1=\frac{b}{h}\beta.$$

Распределение касательных напряжений по сечению прямоугольника показано на рис. 122. Вдоль каждой из сторон τ меняются по параболическому закону, причем наибольшей величины они достигают посредине длинных сторон ($\tau_{max}=M_к/W_к$); посредине коротких сторон $\tau=\gamma\tau_{max}$, а в углах $\tau=0$.

Значения коэффициентов α, β и γ приводятся в таблице 9.

Таблица 9

Коэффициенты для расчета прямоугольных стержней на кручение

h/b	α	β	γ	h/b	α	β	γ
1,0	0,141	0,208	1,000	3,0	0,790	0,801	0,753
1,2	0,199	0,263	0,935	4,0	1,123	1,128	0,745
1,5	0,294	0,346	0,859	5,0	1,455	1,455	0,744
1,75	0,375	0,418	0,820	6,0	1,789	1,789	0,743
2,0	0,457	0,493	0,795	8,0	2,456	2,456	0,742
2,5	0,622	0,645	0,766	10,0	3,123	3,123	0,742

Для стержней с сечением в виде узкого прямоугольника (при $h/b\geqslant 10$), по данным таблицы 9, коэффициенты α и $\beta\geqslant 3,123$, а α_1 и β_1 равны около одной трети (от 0,312 до 0,333). По формуле (9.37') для таких прямоугольных сечений получим

$$J_к=\frac{1}{3}hb^3;\qquad W_к=\frac{1}{3}hb^2. \qquad (9.38)$$

Для некоторых сечений более сложного очертания значения геометрических характеристик при кручении и наибольших касательных напряжений приведены в таблице 10. Если имеет место кручение стержня сложного сечения, которое может быть разбито на части из *тонкостенных* элементов, то для него

$$J_к=J_{к1}+J_{к2}+\ldots=\sum J_{кn},$$

где $n=1, 2, 3, \ldots$ — номера тех простейших частей, на которые разбито сечение.

Так как угол закручивания для всего сечения и всех его частей один и тот же:

$$\varphi=\frac{M_к l}{GJ_к}=\frac{M_{к1}l}{GJ_{к1}}=\ldots=\frac{M_{кn}l}{GJ_{кn}},$$

то крутящий момент распределяется между отдельными частями сечения пропорционально их жесткостям:

$$M_{к1}=M_к\frac{J_{к1}}{J_к};\quad M_{к2}=M_к\frac{J_{к2}}{J_к};\quad \ldots;\quad M_{кn}=M_к\frac{J_{кn}}{J_к}.$$

Соответственно наибольшее касательное напряжение в каждой части (n) сечения будет равно

$$\tau_{кn}=\frac{M_{кn}}{W_{кn}}=\frac{M_к}{W_{кn}}\left(\frac{J_{кn}}{J_к}\right)=\frac{M_к}{J_к}\left(\frac{J_{кn}}{W_{кn}}\right).$$

Таблица 10

Данные по кручению некруглых профилей

Форма сечения	Момент инерции сечения при кручении $J_к$, $см^4$	Момент сопротивления при кручении $W_к$, $см^3$	Примечания
b_1, b_2, h_1, h_2, δ	$\frac{\pi}{16}\frac{m^3}{(m^2+1)}b_1^4(1-\alpha^4)$	$W_к=\frac{\pi b_1^3}{16}(1-\alpha^4)m$	$\frac{h_1}{b_1}=\frac{h_2}{b_2}=m>1$; $\frac{h_2}{h_1}=\frac{b_2}{b_1}=\alpha<1$; $\tau_{max}=\frac{M_к}{W_к}$
b, b_0, h_0, h, δ_1, δ_2	$\frac{h_0^2 b_0^2\delta_1\delta_2}{h\delta_2+b\delta_1-\delta_1^2-\delta_2^2}$	$W_{к1}=2h_0b_0\delta_1$; $W_{к2}=2h_0b_0\delta_2$	Посредине длинной стороны $\tau_1=\frac{M_к}{W_{к1}}$, посредине короткой стороны $\tau_2=\frac{M_к}{W_{к2}}$
d, h	$\frac{d^4}{16}\left(2,6\frac{h}{d}-1\right)$	$\frac{d^3}{8}\frac{\left(2,6\frac{h}{d}-1\right)}{\left(0,3\frac{h}{d}+0,7\right)}$	$\frac{h}{d}>0,5$; $\max\tau=\frac{M_к}{W_к}$
d, D	$J_к=\alpha\frac{D^4}{16}$	$W_к=\beta\frac{D^3}{8}$	По дну канавки $\max\tau=\frac{M_к}{W_к}$

α и β — по таблице в зависимости от отношения $\frac{d}{D}$

d/D	0,0	0,05	0,10	0,20	0,40	0,60	0,80	1,0
α	1,57	0,80	0,81	0,82	0,76	0,66	0,52	0,38
β	1,57	1,56	1,56	1,46	1,22	0,92	0,63	0,38

Наибольшего значения τ достигает для того элемента, у которого $J_{кn}/W_{кn}$ будет максимальным. Тогда

$$\tau_{max}=\frac{M_к}{J_к}\left(\frac{J_{кn}}{W_{кn}}\right)_{max}=\frac{M_к}{W_к},$$

где

$$W_к=\frac{J_к}{\left(\frac{J_{кn}}{W_{кn}}\right)_{max}}.$$

В дополнение к таблице 10 приведем формулы $J_к$ и τ для сечений, составленных из узких и длинных прямоугольников, как-то: уголковых, тавровых, двутавровых, корытных и т. п. В этом случае можно принять

$$J_к=\eta\cdot\frac{1}{3}\sum h\delta^3, \qquad (9.38')$$

где δ — короткие, а h — длинные стороны прямоугольников, на которые можно разбить сечеиие.

Коэффициент η зависит от формы сечения и равен:

для уголкового сечения	$\eta=1,00$;
» двутаврового »	$\eta=1,20$;
» таврового »	$\eta=1,15$;
» корытного »	$\eta=1,12$.

Угол φ по-прежнему выразится формулой

$$\varphi=\frac{M_к l}{GJ_к}.$$

Наибольшего касательного напряжения можно ожидать в наиболее широком из прямоугольников, иа которые мы разбиваем наш профиль. Это напряжение можно вычислить по формуле

$$\tau_{max}=\frac{M_к\delta_{max}}{J_к}, \qquad (9.39)$$

где δ_{max} — наибольшая толщина из всех толщин фигуры.

Для расчета на кручение трубчатых стержней некруглого сечения при малой толщине стенок можно воспользоваться формулами, полученными для круглого кольцевого сечения. Момент сопротивления тонкостенного кольцевого сечения по формуле (9.16) равен

$$W_p=2\pi r_0^2 t=2F_0 t,$$

где F_0 — площадь круга, ограниченная средней линией кольца, а t — его толщина. Считая, что касательные напряжения равномерно распределены по сечению кольца, получим

$$\tau=\frac{M_к}{2F_0 t}. \qquad (9.40)$$

Этой формулой можно пользоваться для расчета *тонкостенных* стержней некруглого замкнутого сечения.

Для угла закручивания имеем

$$\varphi=\frac{M_к l r_0}{GJ_p r_0}=\frac{\tau l}{Gr_0}.$$

Умножив и поделив на $2\pi r_0=S$, получим

$$\varphi=\frac{\tau S}{2GF_0}l, \qquad (9.41)$$

где S — длина осевой линии трубчатого сечения, а F_0 — площадь, ограниченная средней линией рассматриваемого замкнутого профиля.

Отдел IV

ИЗГИБ. ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ БАЛОК

Глава X

ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ ПРИ ИЗГИБЕ. ЭПЮРЫ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

§ 55. Общие понятия о деформации изгиба. Устройство опор балок

Деформация изгиба призматического стержня с прямой осью происходит, если к нему будут приложены в плоскостях, *проходящих через ось стержня*, пары сил или силы, перпендикулярные к его оси.

Стержень, работающий на изгиб, обычно называется балкой. Опыт показывает, что при указанном действии сил ось балки *искривляется*, балка изгибается. На рис. 123 изображена в качестве примера система сил, изгибающих балку прямоугольного сечения; силы расположены в плоскости симметрии балки. Если плоскость действия сил не является плоскостью симметрии, помимо изгиба может наблюдаться скручивание стержня.

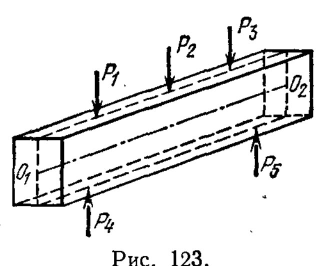


Рис. 123.

Балки являются наиболее часто встречающимися элементами сооружений и машин, принимающими *давления* от других элементов конструкции (например, силы P_1, P_2, P_3 на рис. 123) и передающими их тем частям, которые поддерживают балку (например, силы P_4, P_5 на рис. 123).

Таким образом, на балку действуют *приложенные* силы и *реакции* опор. Для решения задачи сопротивления материалов необходимо знать и те и другие.

Внешние приложенные силы можно вычислить, если известно, какие части конструкции опираются на балку. Эти нагрузки сводятся к сосредоточенным силам P (*Т*, *кГ*, *н*), парам сил M (*Тм*, *кГм*, *нм*) и равномерно и неравномерно распределенным по длине балки нагрузкам.

Равномерно распределенные нагрузки измеряются их интенсивностью q, т. е. величиной нагрузки, приходящейся на единицу длины балки, и выражаются в *Т/м*, *кГ/м* или *н/м*.

Интенсивность неравномерно распределенных нагрузок меняется по длине балки и обозначается через $q(x)$. В этом случае $q(x)$ равна величине нагрузки, приходящейся на единицу длины балки в рассматриваемой точке[1]). Иначе: $q(x)$ равно пределу отношения величины нагрузки, лежащей на длине dx в рассматриваемой точке балки, к этой длине.

Некоторые примеры балок изображены на рис. 124 *а*, *б*, *в*. Первая из них, балка междуэтажного перекрытия, загружена равномерно распределенной нагрузкой $q=200$ *кГ/м*; вторая — стойка плотины, загруженная треугольной нагрузкой (давление воды) с интенсивностью $q(x)$, меняющейся от 0 до $q_0=$ $=1200$ *кГ/м*; третья — главная балка моста, загруженная давлением колес локомотива.

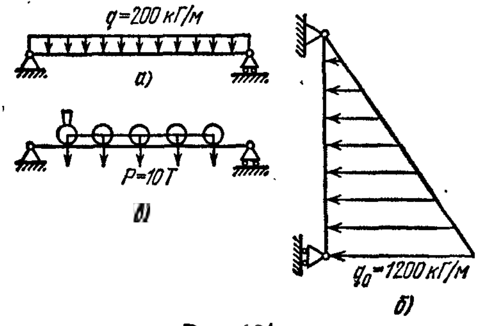


Рис. 124.

Вагонная ось представляет собой балку, опирающуюся на колеса и загруженную давлением букс; балки, входящие в состав крыла самолета, изгибаются давлением воздуха.

Будем пока рассматривать лишь балки, удовлетворяющие следующим двум ограничениям:

1) сечение балки имеет хотя бы одну ось симметрии (рис. 125);
2) все внешние силы лежат в плоскости симметрии балки.

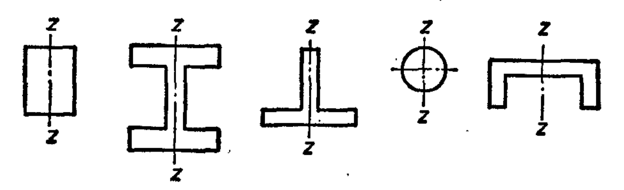


Рис. 125.

Опорные реакции, уравновешивая приложенные к балке силы, будут расположены в той же плоскости.

Для вычисления *опорных реакций* необходимо рассмотреть устройство опор балок. Эти опоры относятся обычно к одному из следующих трех типов:

---

[1]) Запись $q(x)$ означает, что интенсивность нагрузки в этом случае является функцией x.

а) шарнирно-неподвижная опора;
б) шарнирно-подвижная опора;
в) защемленный конец.

Шарнирно-неподвижная опора схематически изображена в точке A на рис. 126. Она позволяет опорному сечению балки свободно поворачиваться вокруг шарнира, расположенного в центре тяжести A опорного сечения, но не допускает поступательного перемещения этого конца. Это сопротивление выражается реакцией, которая передается от опоры через шарнир на конец балки и лежит в плоскости действия внешних сил.

Нам известна только точка приложения этой реакции — шарнир — как единственная точка, в которой происходит соприкосновение балки и опоры, но неизвестны ни величина реакции, ни ее направление. Поэтому будем всегда заменять эту реакцию двумя ее составляющими: одной H_A, направленной по оси балки, и другой A, направленной перпендикулярно к оси. Шарнирно-неподвижная опора дает, с этой точки зрения, две неизвестные по величине реакции (A и H_A).

Шарнирно-подвижная опора допускает, помимо поворотов, также свободное перемещение в соответствующем направлении (рис. 126, точка B). Таким образом, рассматриваемая опора *препятствует* лишь перемещению, перпендикулярному к определенному направлению. В соответствии с этим реакция такой опоры проходит через центр шарнира и направлена перпендикулярно к линии свободного перемещения опоры — обычно оси балки. *Шарнирно-подвижная опора дает лишь одну неизвестную реакцию B.*

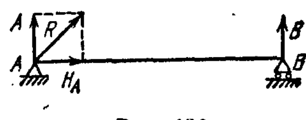


Рис. 126.

Наконец, при *защемленном* конце балки опора препятствует всяким перемещениям этого конца в плоскости действия сил. Она может быть получена из шарнирно-неподвижной опоры путем уничтожения шарнира (рис. 127).

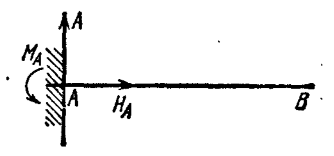


Рис. 127.

Уничтожая шарнир, мы препятствуем вращению концевого сечения балки — вводим новую реакцию, которая должна помешать этому *вращению;* такой реакцией может быть только *пара сил.* Поэтому *защемленный конец балки дает три неизвестные реакции:* составляющую H_A, параллельную оси балки, составляющую A, перпендикулярную к оси, и опорный момент M_A.

Балка может опираться на ряд опор указанных типов. Так, на рис. 127 изображена балка, защемленная одним концом; на рис. 126 — балка, опертая шарнирно-неподвижно на одном конце и подвижно на другом; на рис. 128,*а* — та же балка, подпертая посре-

дине еще одной шарнирно-подвижной опорой; на рис. 128, *б* — балка, защемленная одним концом и подпертая шарнирно-подвижной опорой в одном из промежуточных сечений.

На всех этих рисунках изображены реакции опор, которые *могут*, в связи с конструкцией опорных частей, возникнуть при действии на балки внешних нагрузок; эти нагрузки на чертежах не показаны.

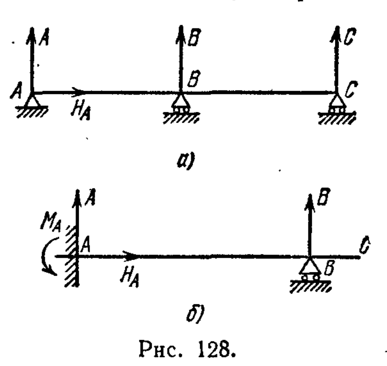


Рис. 128.

Для определения неизвестных реакций нам придется в первую очередь использовать уравнения статики, выражающие условие, что балка в целом при действии всех сил и реакций, приложенных к ней, находится в равновесии. Так как все эти силы лежат в одной плоскости, то уравнений равновесия для них можно написать *три*. Поэтому задача определения реакций из условий статики разрешима при наличии *лишь трех* неизвестных реакций.

Таким образом, балки с устройством опор, дающим три реакции (рис. 126—127), являются *статически определимыми*. К статически определимым балкам относятся также многопролетные (многоопорные) балки с промежуточными шарнирами; такие балки могут быть

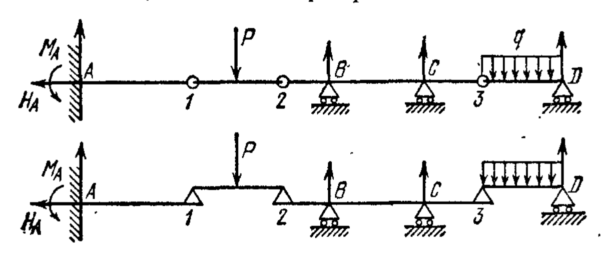


Рис. 129.

расчленены на основные статически определимые балки (*А—1* и *2—3*) и подвесные (*1—2* и *3—D*), опирающиеся на первые через шарниры (рис. 129).

Прочие балки относятся к категории *статически неопределимых*, вопросам расчета которых посвящены специальные главы.

Устройство опор балок в действительности далеко не всегда соответствует схемам, изображенным на рис. 126 и 127. Поэтому, приступая к решению задачи по расчету балки, надо прежде всего рассмотреть, как запроектировано устройство опор этой балки, и отнести эти опоры к тому или иному виду из изображенных на рис. 126 и 127.

Так как деформации балок обычно весьма малы и напряжения лежат в пределах упругости, надо установить, допускает ли устройство опор балки хотя бы небольшой поворот или перемещение; этого уже достаточно, чтобы считать опору шарнирной или подвижной. Если конец металлической или деревянной балки заложен в кирпичную стену на небольшую глубину, то можно считать вполне возможным незначительные повороты этого конца и, стало быть, принять его при расчете за шарнирный.

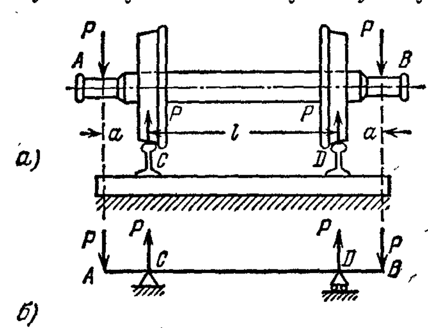


Рис. 130.

Таким образом, приступая к определению опорных реакций балки, необходимо схематизировать опорные части, заменяя действительную конструкцию наиболее приближающейся к ней схемой. Так, например, вагонную ось (рис. 130, *а*), воспринимающую давления P от кузова вагона и передающую их на рельсы, можно рассматривать как балку, нагруженную силами P в точках A и B и опирающуюся на две шарнирные опоры C и D, из которых одну следует считать подвижной (рис. 130, *б*). Такая схема примерно соответствует действительной работе оси, опорные сечения которой при изгибе могут поворачиваться, причём расстояние между точками C и D может немного изменяться.

Для определения опорных реакций в статически определимых балках мы будем пользоваться тремя уравнениями равновесия. При этом за ось x будем принимать ось балки, за начало координат — центр одного из опорных шарниров, а ось y будем направлять вертикально вверх (предполагается, что балка расположена горизонтально).

Сначала составляем условие равенства нулю суммы проекций всех сил на ось x — для определения горизонтальной составляющей опорной реакции. Вертикальные составляющие и опорный момент определяем, составляя два условия равенства нулю суммы моментов всех сил относительно двух каких-либо точек балки, обычно относительно центров тяжести опорных сечений балки. Условие равенства нулю суммы проекций сил на ось y лучше оставить для проверки правильности вычислений: оно должно обращаться в тождество при подстановке в него определенных уже величин опорных реакций.

Для балок с промежуточными шарнирами рассматриваем сначала равновесие подвесных балок, как двухопорных балок, и находим их реакции. Эти реакции уравновешивают давления, передающиеся через шарниры от подвесных балок на основные. Зная давления, находим реакции основных балок (см. § 59).

§ 56. Характер напряжений в балке. Изгибающий момент и поперечная сила

Выбор расчетной схемы и вычисление опорных реакций завершают первую часть задачи о расчете балки — определение внешних сил, действующих на балку.

Теперь можно перейти к отысканию напряжений в сечениях балки; это будет следующим шагом в решении задачи об изгибе. В качестве объекта для рассуждений возьмем балку (рис. 131), шарнирно-опертую по концам и нагруженную силами P_1, P_2, P_3. Реакция H_A при заданной системе нагрузок равна нулю, реакции же A и B определяются из уравнений статики; таким образом, внешние силы известны.

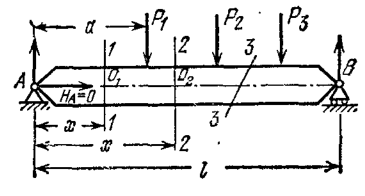


Рис. 131.

При вычислении напряжений необходимо отыскать *опасное* сечение балки, через которое передаются *наибольшие* напряжения. Для этого мы должны получить формулы, позволяющие вычислить напряжения по любому сечению (например, наклонному сечению *3—3*); после этого можно будет найти и опасное сечение и наибольшие напряжения.

Сначала научимся вычислять напряжения по сечениям, перпендикулярным к оси; затем — по сечениям, параллельным оси, и уже потом — по любым сечениям. Возьмем перпендикулярное к оси сечение *1—1* с центром тяжести O_1 на расстоянии x от левого опорного конца. Для вычисления напряжений по этому сечению отбросим одну часть балки и заменим действие ее на оставшуюся часть искомыми напряжениями. Оставить следует, для упрощения вычислений, ту часть балки, к которой приложено меньше сил, в нашем случае — левую. Она должна остаться в равновесии под действием приложенных к ней внешних и внутренних сил.

Левее сечения *1—1* приложена только одна внешняя сила A, направленная вверх (собственным весом балки пренебрегаем). Уравновесить ее может передающаяся от правой отброшенной части балки внутренняя сила $Q=A$ (или $Q=P_2+P_3-B=A$), направленная вниз, касательно к сечению (рис. 132, *а*). Так как силы A и Q, лежащие в вертикальной плоскости, образуют пару с моментом $M=Ax$, направленным по ходу часовой стрелки, то в сечении должны возникнуть внутренние усилия, также складывающиеся в пару с таким же моментом $M=Ax$, направленным против хода часовой стрелки. Эта пара, удерживающая в равновесии рассматриваемую левую часть балки, может сложиться только из нормальных усилий, возникающих в сечении.

Следовательно, внутренние усилия в сечении *1—1*, заменяющие действие правой отброшенной части балки на левую, образуются:

сила $Q=A$, параллельная внешним силам, из касательных усилий, действующих в плоскости поперечного сечения; пара с моментом $M=Ax$, лежащая в плоскости действия внешних сил, из нормальных усилий.

Значит, в рассматриваемом сечении возникают и касательные, и нормальные напряжения (рис. 132, *б*), складывающиеся в систему внутренних силовых факторов Q и M, *вместе* уравновешивающих систему внешних сил, приложенных к рассматриваемой части балки. Разумеется, такие же усилия Q и M, но обратно направленные, передаются через сечение *1—1* от левой части балки на правую, уравновешивая приложенные к правой части внешние силы.

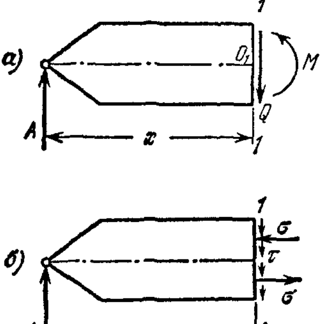


Рис. 132.

Для определения напряжений, возникающих в различных сечениях балки, надо научиться находить величину и направление внутренних усилий в любом сечении балки, выразив их через внешние силы. Рассмотрим, например, некоторое сечение *2—2* (рис. 131) и найдем величину внутренних усилий, передающихся от левой части балки на правую. Для этого, отбросив левую часть, перенесем приложенные к ней силы на правую часть — в центр тяжести сечения *2—2* (точка O_2). При перенесении сил, лежащих в плоскости, они, как известно, приводятся к силе — равнодействующей, приложенной в центре приведения, и к паре, образующейся при переносе. Таким образом, к правой части балки в точке O_2 должны быть приложены в виде внутренних силовых факторов перенесенные с левой части (рис. 133):

сила

$$Q=A-P_1 \qquad (10.1)$$

и пара с моментом

$$M=Ax-P_1(x-a). \qquad (10.2)$$

Полагая, что $A>P_1$, мы направили силу Q вверх, а момент M — по ходу часовой стрелки. Такие же внутренние усилия Q и M, но направленные в противоположную сторону, передаются от правой части балки на левую (рис. 133).

Из сказанного ясно: *в любом поперечном сечении балки внутренние усилия приводятся к силе Q и к паре с моментом M*, совместно заменяющим действие одной отсеченной части балки на другую.

Сила Q, складывающаяся из элементарных касательных усилий, действующих в сечении, называется поперечной или перерезывающей силой. Эта сила сдвигает рассматриваемое сечение относительно

смежного (рис. 133 и 134). Как следует из равенства (10.1), поперечная сила в каждом поперечном сечении *вычисляется как сумма проекций на нормаль к оси балки всех внешних сил, расположенных по*

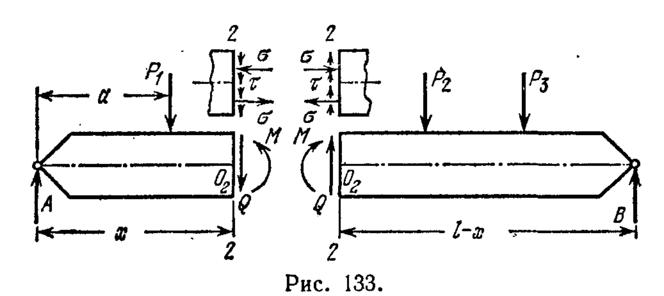


Рис. 133.

одну сторону от сечения. При действии на балку только сил, перпендикулярных к ее оси, поперечную силу можно определить как *алгебраическую сумму сил*, приложенных к оставленной части балки.

Момент внутренней пары, складывающейся из элементарных нормальных усилий, возникающих в поперечном сечении балки,

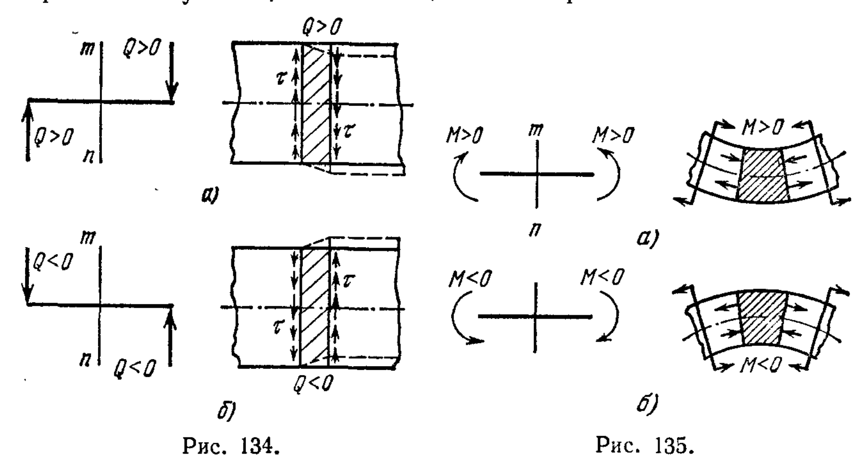


Рис. 134. Рис. 135.

называется изгибающим моментом. Изгибающий момент поворачивает это сечение относительно смежного, чем и обусловлено искривление оси балки, т. е. изгиб (рис. 135).

Как видно из равенства (10.2), изгибающий момент в любом сечении балки *равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения относительно поперечной центральной оси y.*

Условимся о правилах знаков для Q и M. Как показано на рис. 133, внутренние силовые факторы Q и M — в зависимости от

того, к правой или левой части балки принадлежит рассматриваемое сечение, направлены в противоположные стороны. При установлении правила знаков это обстоятельство следует учесть, чтобы получить одинаковые значения Q и M не только по величине, но и по знаку, независимо от того, рассматриваем ли мы силы, приложенные к левой или к правой отсеченной части балки.

В соответствии с этим (для горизонтально расположенной балки) условимся считать поперечную силу Q положительной, если внешние силы, лежащие *слева* от проведенного сечения, направлены *вверх*, или *справа* от него — *вниз*. Иначе говоря, если равнодействующая внешних сил, приложенных к левой отсеченной части, *направлена вверх*, $Q>0$; для сил, расположенных *справа* от сечения, $Q>0$, если их равнодействующая направлена вниз. По этому правилу знаков направление Q совпадает с направлением касательных напряжений τ, из которых складывается поперечная сила (рис. 134).

Изгибающий момент будем считать *положительным*, если алгебраическая сумма моментов сил, расположенных *слева* от сечения, дает равнодействующий момент, направленный *по ходу часовой стрелки*; либо для *правой* части балки, если равнодействующий момент сил, лежащих правее сечения, направлен *против хода часовой стрелки* (рис. 135). Следовательно, для левой отсеченной части изгибающий момент, образуемый действием каждой силы в отдельности, считаем положительным, если она дает момент относительно центра тяжести сечения, направленный по часовой стрелке, и $M<0$, если он вращает против хода часовой стрелки. Для правой части балки — наоборот [1]).

Принятое правило знаков для M соответствует характеру деформации балки: положительный изгибающий момент изгибает ее выпуклостью вниз, а отрицательный — выпуклостью вверх (рис. 135). В сечении, где M переходит через нуль, ось балки имеет точку перегиба; на участке, где $M=0$, ось балки остается прямой.

Как мы видели, в разных сечениях нашей балки (*1—1* и *2—2*) выражения для поперечной силы и изгибающего момента различны. По самому определению внутренних усилий очевидно, что в сечении, где $Q=Q_{max}$, касательные напряжения будут наибольшими, а в сечении, где $M=M_{max}$, наибольших значений достигают нормальные напряжения. Поэтому для проверки прочности балок следует отыскать те сечения, в которых поперечная сила и изгибающий момент достигают наибольших значений. Отысканию этих *опасных* сечений очень помогает построение так называемых *эпюр* изгибающих моментов и поперечных сил, т. е. графиков, которые показывают, как меняются для различных сечений балки величины M и Q в зависимости от изменения переменной x.

---

[1]) Некоторые авторы связывают знаки Q и M с выбором направления координатных осей, что в некоторых случаях, например, при сложном изгибе стержней с ломаной осью, упрощает выбор знаков.

Таким образом, поперечная сила $Q(x)$ и изгибающий момент $M(x)$ являются функциями от x. Для краткости в дальнейшем будем их обозначать Q и M, сохраняя значок (x) лишь в тех случаях, когда необходимо *подчеркнуть*, что Q и M — величины переменные, зависящие от x. При построении эпюр откладывают под каждым сечением от оси абсцисс, проведенной параллельно оси балки, ординаты, которые в выбранном масштабе изображают величину изгибающего момента или поперечной силы в этом сечении. Положительные ординаты эпюр Q и M будем откладывать вверх, а отрицательные — вниз. Заметим, что в некоторых руководствах рекомендуется строить эпюры моментов на выпуклой стороне изгибаемой балки, откладывая для этого положительные ординаты M вниз, а отрицательные — вверх. Впрочем, это дело вкуса, не имеющее существенного значения.

Построение эпюр Q и M может быть облегчено, если будут установлены некоторые зависимости между значениями поперечной силы и изгибающего момента в любом сечении балки, а также связь этих величин Q и M с приложенной к балке нагрузкой.

Отыскание этих зависимостей между нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом дано в следующем параграфе.

§ 57. Дифференциальные зависимости между интенсивностью сплошной нагрузки, поперечной силой и изгибающим моментом

В § 56 было показано, что для равновесия отсеченной части балки в рассматриваемом сечении следует приложить внутренние силы Q и M, заменяющие действие отброшенной части на оставленную. Отсюда следует, что если из балки (рис. 136) вырезать элемент бесконечно малой длины dx, то он должен находиться в равновесии под действием части сплошной нагрузки с интенсивностью q (которую на длине dx можно считать постоянной), а также сил Q и Q_1 и моментов M и M_1 заменяющих действие на него соответственно левой и правой отброшенных частей[1]). Заметим, что $Q_1=Q+dQ$ и $M_1=M+dM$, так как приращения этих величин при переходе от сечения mn к бесконечно близкому сечению m_1n_1 — также бесконечно малые величины.

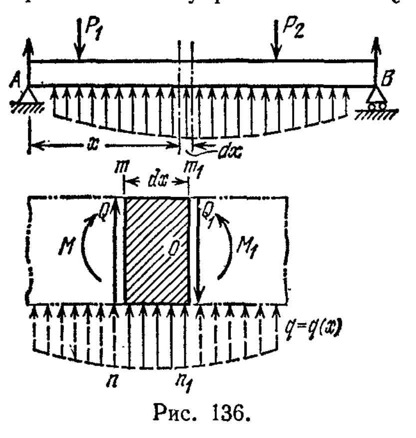


Рис. 136.

---

[1]) В пределах участка dx не приложено сосредоточенной силы или пары сил.

Условия равновесия выделенного элемента напишутся так:

$$\sum Y=0; \qquad Q+q\,dx-(Q+dQ)=0,$$

$$\sum M_0=0; \qquad M+Q\,dx+q\,dx\cdot\frac{dx}{2}-(M+dM)=0.$$

Из первого уравнения имеем

$$q\,dx-dQ=0,$$

откуда

$$\frac{dQ}{dx}=q, \tag{10.3}$$

т. е. *производная от поперечной силы по абсциссе сечения равна интенсивности сплошной нагрузки в том же сечении.*

Из второго уравнения, пренебрегая бесконечно малыми второго порядка малости, получим

$$Q\,dx-dM=0, \text{ или } \frac{dM}{dx}=Q, \tag{10.4}$$

т. е. *производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна поперечной силе в том же сечении.*

Взяв производную от обеих частей равенства (10.4), получим

$$\frac{d^2M}{dx^2}=\frac{dQ}{dx}, \text{ или } \frac{d^2M}{dx^2}=q, \tag{10.5}$$

т. е. *вторая производная от изгибающего момента по абсциссе равна интенсивности сплошной нагрузки.* Если q направлено вниз, то уравнение (10.5) будет

$$\frac{d^2M}{dx^2}=-q \text{ и } \frac{dQ}{dx}=-q.$$

Из формул (10.3) и (10.4) путем интегрирования можно получить

$$Q(x)=\int_0^x q(x)\,dx+Q(0), \tag{10.3'}$$

$$M(x)=\int_0^x Q(x)\,dx+M(0). \tag{10.4'}$$

Произвольные постоянные $Q(0)$ и $M(0)$ — это сосредоточенные в начале участка сила и пара сил (если они имеются). Этими формулами удобно пользоваться при построении эпюр от действия криволинейной нагрузки $q=q(x)$. Геометрически каждый из интегралов представляет площадь: $\int_0^x q(x)\,dx=\omega_q$, это грузовая площадь (см. § 59), а $\int_0^x Q(x)dx=\omega_Q$ — это площадь эпюры Q на длине x. Формулы

(10.3′) и (10.4′) можно представить в виде

$$Q(x)=\omega_q+Q(0), \qquad (10.3'')$$

$$M(x)=\omega_Q+M(0). \qquad (10.4'')$$

Полученные зависимости могут быть использованы при построении эпюр Q и M, особенно если учесть, что производная функции геометрически представляет собой тангенс угла наклона, образуемого с осью абсцисс, касательной в данной точке кривой. Иначе говоря, поперечная сила в данном сечении может рассматриваться как тангенс угла наклона касательной к эпюре M в точке, соответствующей этому сечению. Поэтому надо иметь в виду, что если ось x направлена справа налево, то $\frac{dM}{dx}=-Q$, так как угол наклона касательной меняет знак при изменении направления оси абсцисс.

Из уравнения (10.3) следует, что в том сечении, где интенсивность нагрузки $q=0$, поперечная сила $Q=Q_{max}$ или $Q=Q_{min}$, так как если $q=\frac{dQ}{dx}=0$, то касательная к эпюре Q параллельна оси абсцисс. По той же причине из формулы (10.4) следует другое, более важное заключение, что изгибающий момент достигнет максимума (или минимума) в том сечении, где $Q=\frac{dM}{dx}=0$, т. е. в сечении, где поперечная сила переходит через нуль.

Хотя уравнение (10.4) дает возможность получить выражение для Q, как производной от M, однако при построении эпюр следует определять Q независимо, используя уравнение (10.4) только для проверки. Так же для проверки правильности построения эпюры M можно воспользоваться формулой (10.4″), в соответствии с которой ордината эпюры M в любом сечении равна части площади эпюры Q, лежащей по одну сторону от сечения, либо отличается от нее на величину момента сосредоточенной пары $M(0)$, если он входит в выражение для $M(x)$. Точно так же для проверки правильности очертания эпюры M может быть использовано уравнение (10.5), поскольку знаком второй производной определяется направление выпуклости кривой, по которой очерчена эпюра M. Указания о проверке правильности построения эпюр Q и M даны ниже (§ 60).

§ 58. Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил[1])

Пример. Построить эпюры моментов и поперечных сил для балки, лежащей на двух опорах и нагруженной силой P (рис. 137).

Для вычисления M и Q в любом сечении этой балки прежде всего необходимо отыскать реакции. На рис. 137 намечено предполагаемое направление этих реакций A, H_A и B.

[1]) Ряд примеров построения эпюр Q и M разобран в сборнике задач. См. Беляев Н. М., Сборник задач по сопротивлению материалов, «Наука», 1965.

Из условия равенства нулю суммы проекций всех сил на ось балки получаем, что

$$H_A=0.$$

Этот результат можно было предвидеть заранее, так как нагрузки перпендикулярны к оси балки.

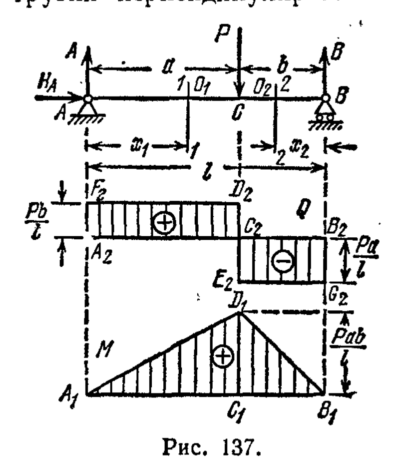


Рис. 137.

Составляя сумму моментов сил относительно точки B, получаем

$$\sum M_B=0; \quad +Al-Pb=0$$

и

$$A=+\frac{Pb}{l}.$$

Точно так же

$$\sum M_A=0; \quad -Bl+Pa=0$$

и

$$B=+\frac{Pa}{l}.$$

Для проверки правильности полученных результатов составим сумму проекций всех сил на вертикальную ось y:

$$A-P+B=0, \quad \text{или} \quad A+B=P.$$

Подставляя значение найденных реакций, получим

$$\frac{Pb}{l}+\frac{Pa}{l}=\frac{P(a+b)}{l}=P,$$

что удовлетворяет условию равновесия. Такую проверку *всегда* необходимо производить, так как ошибка в определении реакций неизбежно поведет к ошибкам и в построении эпюр Q и M.

Для получения выражений, дающих нам величины поперечной силы и изгибающего момента в любом сечении балки, возьмем какое-либо сечение 1—1 между точками A и C на расстоянии x_1 от конца A. Заметим, что выражение «взять сечение» требует не только обозначить это сечение на чертеже, но и *обязательно отметить* его расстояние от выбранного начала координат. Центр тяжести проведенного сечения обозначен через O_1.

Для вычисления поперечной силы Q в этом сечении удобнее рассмотреть левую отсеченную часть, так как к ней приложено меньше сил (только сила A). Рассматривая часть балки слева от сечения O_1 и проектируя приложенные к ней внешние силы на перпендикуляр к оси балки, получаем выражение для поперечной силы Q_1 в сечении

на расстоянии x_1 от опоры A:

$$Q_1 = +A = \frac{Pb}{l}. \qquad (10.6)$$

Поперечная сила в сечении с абсциссой x_1 не зависит от этого расстояния. Таким образом, пока x_1 меняется в пределах от 0 до a, поперечная сила остается постоянной, и её эпюра на этом участке изобразится прямой F_2D_2, параллельной оси абсцисс A_2B_2 (рис. 137).

Выражение (10.6) для Q_1 будет справедливым, пока взятое нами сечение не перешло за точку C, т. е. пока $0 \leqslant x_1 \leqslant a$. Если $x_1 > a$, в левую часть балки попадут уже две силы A и P; следовательно, сумма проекций сил, приложенных к левой отсеченной части балки, изменится.

Чтобы найти величину поперечной силы на втором участке, придется взять еще одно сечение между точками B и C с центром тяжести O_2. Расстояние его x_2 будем отсчитывать от правой опоры B. В этом случае нам будет выгоднее рассматривать правую часть балки, так как на нее действует лишь сила B.

Рассматривая правую отсеченную часть балки, получим выражение для поперечной силы в сечении *2—2*:

$$Q_2 = -B = -\frac{Pa}{l}. \qquad (10.7)$$

Знак минус взят потому, что сила B, приложенная к *правой* отсеченной части, направлена вверх.

Нетрудно видеть, что если бы мы рассматривали левую отсеченную часть, то получили бы то же значение для Q_2:

$$Q_2 = A - P = -B \qquad (\text{так как } A + B = P).$$

Выражение (10.7) пригодно при любом значении x_2, не выходящем за пределы участка BC, т. е. при $0 \leqslant x_2 \leqslant b$, и показывает, что Q_2 от x_2 не зависит.

График для поперечной силы на протяжении второго участка представляет собой прямую E_2G_2, параллельную оси абсцисс. Эпюра поперечных сил имеет разрыв — скачок в месте приложения силы P_1; в этом месте поперечная сила переходит через нуль и не равна отрезку $D_2E_2 = P$. В сечении непосредственно слева от точки C

$$Q = +\frac{Pb}{l};$$

в сечении же непосредственно справа от нее

$$Q = -\frac{Pa}{l}.$$

Отметим, что абсолютная величина скачка равна величине приложенной в этом сечении сосредоточенной силы P.

Такое очертание эпюры поперечных сил (рис. 137) есть следствие того, что мы при расчете считаем сосредоточенную силу P приложенной в *одной* точке C. В действительности передача давления P на балку происходит через очень малую площадку, имеющую некоторую длину вдоль балки (рис. 138). Поэтому на самом деле поперечная сила на протяжении этой длины постепенно изменяется от величины $+Pb/l$ до $-Pa/l$, переходя через нуль.

Рис. 138.

Наибольшим значением поперечной силы по абсолютной величине в данном примере (при $a>b$) будет

$$|Q_{max}| = \frac{Pa}{l}.$$

Опасными в отношении касательных напряжений будут все сечения участка балки CB.

Для построения эпюры изгибающих моментов воспользуемся теми же сечениями *1—1* (с началом координат в точке A) для левой части балки и *2—2* (с началом координат в точке B) для правой части балки.

Рассматривая левую отсеченную часть, найдем значение момента в сечении *1—1* как сумму моментов приложенных к ней сил относительно центра тяжести сечения O_1:

$$M_1 = A \cdot x_1 = \frac{Pb}{l} \cdot x_1, \tag{10.8}$$

причем M_1 — функция первой степени от x_1. Следовательно, если мы будем передвигать наше сечение, менять x_1, то M_1 будет меняться по закону прямой линии. Полученное выражение (10.8) для M_1 будет пригодным, пока наше сечение не перешло за точку C, т. е. пока $0 \leqslant x_1 \leqslant a$.

Как только x_1 станет больше a, на левую часть балки попадут уже две силы: A и P, и формула (10.8) окажется непригодной. Так как этот график — прямая линия, то x_1 достаточно дать лишь два значения для получения двух точек эпюры моментов. При $x_1=0$ получаем $M_1=0$ — это ордината под точкой A. Точно так же при $x_1=a$ получим $M_1=+Pab/l$ — ордината под сечением C.

Отложив от оси абсцисс *вверх* (положительный момент!) отрезок C_1D_1, выражающий в масштабе ординату Pba/l, и соединив точку D_1 и A_1 прямой, получаем первый участок эпюры моментов. Для построения эпюры на втором участке составим выражение момента сил, приложенных к правой отсеченной части балки, относительно O_2:

$$M_2 = Bx_2 = \frac{Pa}{l} \cdot x_2. \tag{10.9}$$

Момент и на этом участке получился положительным, так как мы рассматривали *правую* часть, и сила B вращала ее относительно

точки O_2 *против* часовой стрелки. Полученное выражение (10.9) представляет собой уравнение прямой линии и пригодно при $0 \leqslant x_2 \leqslant b$. При $x_2 = b$, $M_2 = +Pab/l$ и при $x_2 = 0$, $M_2 = 0$.

Таким образом, второй участок эпюры моментов изображается прямой D_1B_1. На всем протяжении балки изгибающий момент положителен и достигает максимума в сечении C — в месте приложения силы P, где он равен

$$M_{max} = \frac{Pab}{l}. \qquad (10.10)$$

В этом сечении будут наибольшие нормальные напряжения.

При $a = b = l/2$ (сила приложена посредине пролета) получаем

$$M_{max} = \frac{Pl}{4}. \qquad (10.10')$$

В любом поперечном сечении балки, взятом между граничными точками A—C и C—B, величины Q и M графически изображаются ординатами соответствующих эпюр, показанными на рис. 137 *вертикальной* штриховкой.

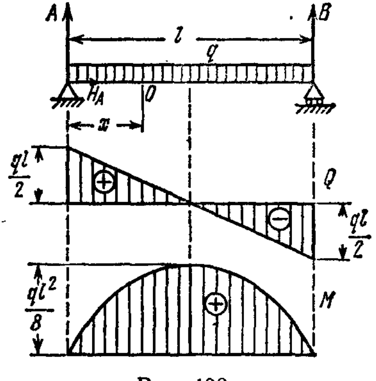


Рис. 139.

Ниже показан ход построения эпюр Q и M при некоторых других видах загружения балки.

Построим эпюры моментов и поперечных сил для балки, изображенной на рис. 139, нагруженной сплошной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (выражаемой в *кГ/м*, *Т/м*, *н/м* и т. п.).

Здесь необходимо начать с определения опорных реакций.

Реакция H_A равна нулю, реакции же A и B по симметрии равны; каждая из них равна половине всей лежащей на балке нагрузки:

$$A = B = \frac{ql}{2}.$$

Возьмем сечение O на расстоянии x от левого конца балки. Оставим для вычисления Q и M левую часть. На нее действуют реакция A и равномерно распределенная по длине x нагрузка q.

Для определения поперечной силы в сечении O нужно взять сумму сил, приложенных к левой отсеченной части балки. Слева от сечения лежит сила $A = ql/2$, направленная вверх, и равнодействующая равномерно распределенной нагрузки, расположенной на длине x, равная qx и направленная вниз. Следовательно,

$$Q = A - qx = \frac{ql}{2} - qx.$$

Поперечная сила меняется с изменением x по закону прямой линии, для построения которой дадим переменной x два значения: при $x = 0$

$Q=ql/2$ и при $x=l$ $Q=-ql/2$. Эпюра поперечных сил дана на рис. 139: $Q_{max}=ql/2$.

Для построения эпюры M составим сумму моментов тех же сил, приложенных к рассматриваемой части балки, относительно точки O. Имея в виду, что равнодействующая qx приложена посредине отрезка длиной x и плечо относительно точки O равно $x/2$, получим

$$M=+Ax-qx\frac{x}{2}=\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}=\frac{qx}{2}(l-x).$$

Это уравнение моментов пригодно для вычисления изгибающего момента в любом сечении балки.

В данном случае величина изгибающего момента зависит от квадрата абсциссы x, следовательно, очертание эпюры представляет собой кривую — квадратную параболу. Для построения этой кривой наметим по крайней мере три-четыре точки ее. Имеем

$$\begin{aligned}
&\text{при}\quad x=0 && M=0,\\
&\text{при}\quad x=\frac{1}{4} && M=\frac{ql}{2\cdot 4}\left(l-\frac{l}{4}\right)=\frac{3ql^2}{32},\\
&\text{при}\quad x=\frac{1}{2} && M=+\frac{ql}{4}\left(l-\frac{l}{2}\right)=+\frac{ql^2}{8},\\
&\text{при}\quad x=l && M=0.
\end{aligned}$$

Эпюра моментов получает вид, показанный на рис. 139.

Для нахождения M_{max} найдем абсциссу x_0 соответствующего сечения, приравнивая нулю производиую от M по x:

$$\frac{dM}{dx}=\frac{ql}{2}-\frac{2qx_0}{2}=0,$$

откуда

$$x_0=\frac{l}{2}\quad\text{и}\quad M_{max}=+\frac{qx_0}{2}(l-x_0)=+\frac{ql^2}{8}. \tag{10.11}$$

Наибольший изгибающий момент имеет место посредине пролета, т. е. в том сечении, где $Q=0$, что является следствием установленной выше (§ 57) зависимости между $M(x)$ и $Q(x)$.

Рассмотрим еще один пример — балку AB, защемленную одним концом (рис. 140). Такую балку обычно называют *консолью*. Так как правый конец балки свободен от закрепления, то при построении эпюр целесообразно рассматривать силы, расположенные справа от проведенных сечений; в этом случае нет необходимости определять опорные реакции в защемлении (у левого конца). Сила P разделяет балку на два участка: AC — длиной a и CB длиной b.

Взяв сечение 1—1 на участке CB на расстоянии x_1 от свободного конца, видим, что правее сечения нет никаких внешних сил, следовательно, в сечении не возникает и внутренних усилий. При всех значениях x_1 от нуля до $x_1=b$

$$Q_1=0\quad\text{и}\quad M_1=0\ \ldots \tag{а}$$

Расстояния до сечения 2—2, взятого на втором участке AC, будем откладывать от точки приложения силы P. Правее сечения расположена направленная вверх сила P и равномерно распределенная направленная вниз нагрузка q на длине x_2 с равнодействующей qx_2. Внутренние усилия в сечении 2—2 будут

$$Q_2 = -P + qx_2, \qquad (б)$$

$$M_2 = Px_2 - \frac{qx_2^2}{2}. \qquad (в)$$

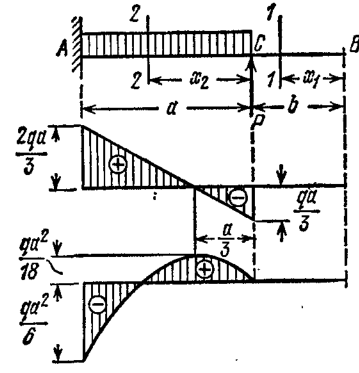


Рис. 140.

При изменении абсциссы от $x_2=0$ до $x_2=a$ поперечная сила Q_2 изменяется по закону прямой линии, а момент M_2 по параболическому закону с максимумом в том сечении, где $Q_2=dM/dx=0$, т. е. при $x_2=P/q$, как это видно из (б).

Построим эпюры Q и M. Для подсчета ординат в общем виде зададимся соотношением между нагрузками P и q (что всегда можно сделать при известных числовых значениях). Пусть, например, $P=qa/3$.

На первом участке длиной b ординаты эпюр Q и M, как видно из (а), равны нулю, обе эпюры совпадают с осями абсцисс. На втором участке $AC=a$ ($0 \leqslant x_2 \leqslant a$) из (б) и (в) имеем

$$\text{при} \quad x_2 = 0, \qquad Q_2 = -P = -\frac{qa}{3}, \qquad M_2 = 0,$$

$$\text{при} \quad x_2 = \frac{P}{q} = \frac{a}{3} \qquad Q_2 = 0, \qquad M_2 = \frac{qa}{3} \cdot \frac{a}{3} - \frac{qa^2}{2 \cdot 9} = \frac{qa^2}{18},$$

$$\text{при} \quad x_2 = a, \qquad Q_2 = -P + qa = \frac{2}{3}qa, \quad M_2 = Pa - \frac{qa^2}{2} = -\frac{qa^2}{6}.$$

Эпюры Q и M изображены на рис. 140. Из них видно, что наибольшие по абсолютному значению ординаты Q и M соответствуют сечению в заделке и равны

$$Q_{max} = \frac{2}{3}qa; \quad M_{max} = \left|\frac{qa^2}{6}\right|.$$

§ 59. Построение эпюр Q и M для более сложных случаев нагрузки

Изучив общий метод построения эпюр и их свойства, перейдем к решению более сложных задач.

Рассмотрим, как вычислить Q и M, когда на балку действует сплошная *неравномерно* распределенная нагрузка, интенсивность

которой меняется по длине балки в зависимости от x (рис. 141). Иначе говоря, q есть функция от x или $q=q(x)$. Поперечная сила и изгибающий момент также будут некоторыми функциями от x:

$$M=M(x) \quad \text{и} \quad Q=Q(x).$$

Кривая $adceb$, показывающая закон изменения $q(x)$, называется *грузовой линией*, а площадь, ограниченная этой кривой и осью балки,— *грузовой площадью*.

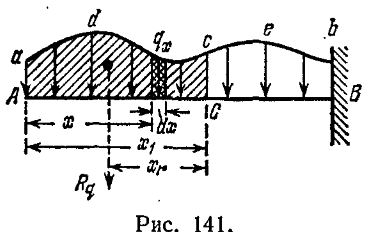


Рис. 141.

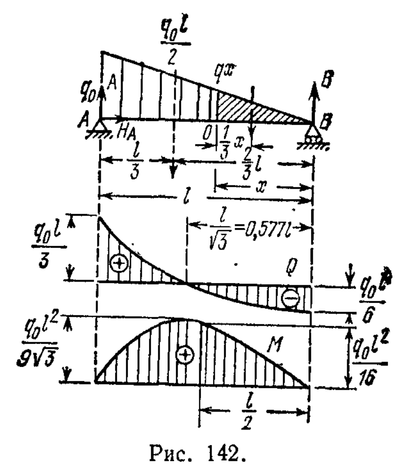


Рис. 142.

Вычислим Q и M в любом сечении балки, взятом на расстоянии x_1 от свободного конца. Рассматривая поперечную силу как сумму элементарных сил $q(x)\cdot dx$, приложенных к левой отсеченной части балки, и заменяя суммирование интегрированием, найдем

$$Q(x_1)=-\int_0^{x_1} q(x)\,dx=-\int_0^{x_1} d\omega=-\omega(x_1). \tag{10.12}$$

Здесь через $\omega(x_1)$ обозначена часть грузовой площади, расположенная левее взятого сечения c—C. Следовательно, поперечная сила $Q(x_1)$, равная равнодействующей R_q сплошной нагрузки, лежащей на участке $AC=x_1$, может быть вычислена как грузовая площадь $\omega(x_1)$, лежащая по одну сторону от сечения.

Изгибающий момент в том же сечении, равный сумме моментов элементарных сил $q(x)dx$, действующих на отсеченную часть балки, относительно точки C, может быть вычислен как момент равнодействующей R_q, т. е.

$$M(x_1)=-R_q\cdot x_r=-\omega(x_1)\cdot x_r. \tag{10.13}$$

Иначе говоря, *изгибающий момент от неравномерно распределенной нагрузки равен произведению грузовой площади, лежащей по одну сторону от сечения, на расстояние от центра тяжести этой площади до рассматриваемого сечения* (плечо равнодействующей).

Рассмотрим построение эпюр при действии сплошной нагрузки, изменяющейся по длине балки по закону треугольника (рис. 142).

Под такой нагрузкой работают балки, поддерживающие давление воды или земли, например, стойки плотин, стойки, подкрепляющие стенки резервуаров, предназначенных для хранения жидкостей. Подобным же образом нагружаются силами инерции шатуны паровых машин и двигателей внутреннего сгорания.

Величина этой нагрузки определяется ординатой q_0 — наибольшей интенсивностью нагрузки (в $кГ/м$). Реакция $H_A=0$; определим реакции A и B.

Для нахождения реакции A составим уравнение моментов относительно точки B. Момент нагрузки равен моменту ее равнодействующей, т. е. площади всей нагрузки $q_0l/2$, умноженной на расстояние до ее центра тяжести от конца B. Равнодействующая изображена на рис. 142 пунктиром; этим подчеркивается, что сосредоточенная сила, равная грузовой площади $\omega=\frac{1}{2}q_0l$, в действительности к балке не приложена и что мы ею пользуемся для вычисления суммы моментов всей нагрузки только при определении реакций.

Уравнения моментов будут иметь вид

$$\Sigma M_B=0;\quad Al-\omega\frac{2}{3}l=0;\quad A=\frac{2}{3}\omega=\frac{q_0l}{3},$$

$$\Sigma M_A=0;\quad -Bl+\omega\frac{l}{3}= \;;\quad B=\frac{1}{3}\omega=\frac{q_0l}{6}.$$

Таким образом, на опору A передается *две трети* всей нагрузки $\omega=q_0l/2$, а на опору B — *одна треть*.

Для построения эпюр возьмем сечение на расстоянии x от правого конца балки. Ордината нагрузки в этом сечении $q(x)$ определяется из подобия треугольников

$$\frac{q(x)}{q_0}=\frac{x}{l};\quad q(x)=q_0\frac{x}{l}.$$

Для вычисления Q и M будем рассматривать правую часть балки, так как на нее действуют сосредоточенная сила и треугольная нагрузка, в то время как на левую часть действуют сила и трапецеидальная нагрузка, что даст более сложные вычисления.

Поперечная сила Q будет равна сумме проекций на вертикаль реакции B и заштрихованной нагрузки $\omega(x)=\frac{1}{2}q(x)\,x=\frac{1}{2}q_0\frac{x^2}{l}$, т. е.

$$Q=-B+\omega(x)=-\frac{q_0l}{6}+\frac{q_0x^2}{2l}=\frac{q_0l}{6}\left(1-\frac{3x^2}{l^2}\right).$$

В данном случае эпюра поперечных сил изображается кривой второго порядка, причем

$$\text{при}\quad x=0\qquad Q=-\frac{q_0l}{6}=-B,$$

$$\text{при}\quad x=l\qquad Q=+\frac{q_0l}{3}=+A,$$

$$\text{при}\quad x=\frac{l}{2}\qquad Q=-\frac{q_0l}{6}\left(1-\frac{3}{4}\right)=-\frac{q_0l}{24}.$$

Очертание эпюры Q дано на рис. 142. Из этой эпюры видно, что наибольшее значение (по абсолютной величине) поперечная сила получает в сечении A

(у опоры):

$$Q_{max}=+A=+\frac{q_0 l}{3}.$$

Через нуль поперечная сила переходит при x_0, определяющемся из уравнения

$$Q=0=-\frac{q_0 l}{6}\left(1-\frac{3x_0^2}{l^2}\right); \quad x_0=-\frac{l}{\sqrt{3}}=0{,}577l.$$

Это значение x_0 будет использовано нами для определения максимума M. Наконец, аналитического минимума поперечная сила достигает в точке B, где интенсивность сплошной нагрузки равна нулю. Как это следует из уравнения (10.3), касательная к эпюре поперечных сил в этом сечении параллельна оси абсцисс.

Перейдем к построению эпюры M, для чего опять рассмотрим правую отсеченную часть балки. Момент относительно точки O равнодействующей заштрихованной (рис. 142) треугольной нагрузки равен ее грузовой площади, умноженной на плечо $x/3$:

$$-\omega(x)\frac{1}{3}x=-\frac{x}{2}q(x)\cdot\frac{1}{3}x=-\frac{q_0x^3}{6l}.$$

Изгибающий момент в проведенном сечении равен

$$M=Bx-\frac{q_0x^3}{6l}=\frac{q_0 l}{6}x-\frac{q_0x^3}{6l}=\frac{q_0xl}{6}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right).$$

Это выражение для M пригодно на всем протяжении балки. Эпюра M представляет кривую третьего порядка. Для построения кубической параболы по точкам найдем несколько ординат:

при $x=0$ $\quad M=0,$

при $x=\frac{l}{2}$ $\quad M=\frac{q_0l^2}{12}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3q_0l^2}{48}=\frac{q_0l^2}{16}.$

при $x=l$ $\quad M=0.$

Наибольшее значение изгибающий момент получит в сечении, где $Q=0$, т. е. при $x_0=l/\sqrt{3}$; он равен

$$M_{max}=\frac{q_0 l}{6l\sqrt{3}}\left(l^2-\frac{l^2}{3}\right)=\frac{q_0l^2}{9\sqrt{3}}=\frac{q_0l^2}{15{,}58}. \quad (10.14)$$

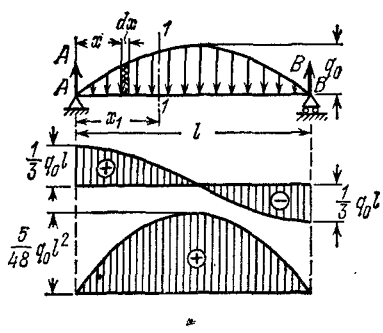


Рис. 143.

Эпюра показана на рис. 142. Как видно из формулы (10.14), наибольший изгибающий момент весьма мало отличается от момента посредине пролета, равного $q_0l^2/16$. При практических подсчетах для балки, загруженной треугольной нагрузкой, всегда можно вместо M_{max} вводить в вычисления момент посредине пролета $q_0l^2/16$; ошибка не превышает 2,6%.

Рассмотрим построение эпюр Q и M для шарнирно-опертой балки на двух опорах (рис. 143), загруженной сплошной нагрузкой, интенсивность которой изменяется по параболическому закону, выражаемому уравнением

$$q(x)=4q_0\left(\frac{x}{l}-\frac{x^2}{l^2}\right).$$

Вследствие симметрии опорные реакции равны между собой: $A=B=\omega/2$. Здесь ω — грузовая площадь, определяемая из условия (10.12)

$$\omega=\int_0^l q(x)\,dx=\frac{4q_0}{l}\left[\int_0^l x\,dx-\frac{1}{l}\int_0^l x^2\,dx\right]=$$
$$=\frac{4q_0}{l}\left[\frac{l^2}{2}-\frac{l^2}{3}\right]=\frac{2}{3}q_0 l. \tag{10.15}$$

Следовательно, реакции опор равны

$$A=B=\frac{q_0 l}{3}.$$

Теперь перейдем к составлению выражений $Q(x)$ и $M(x)$ для сечения 1—1, взятого иа расстоянии x_1 от левой опоры A. Обозначив грузовую площадь, расположенную на длине x_1, через $\omega(x)$ получим:

а) Поперечная сила $Q(x)=A-\omega(x)$.

Грузовая площадь, лежащая слева от сечения, равна

$$\omega(x)=\int_0^{x_1} q(x)\,dx=\frac{4q_0}{l}\left[\int_0^{x_1} x\,dx-\frac{1}{l}\int_0^{x_1} x^2\,dx\right],$$

или

$$\omega(x)=\frac{4q_0}{l}\left[\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_1^3}{3l}\right]=\frac{2}{3}\frac{q_0x_1^2}{l^2}(3l-2x_1).$$

Подставляя найденные значения A и $\omega(x)$ в уравнения для $Q(x)$, найдем

$$Q(x)=\frac{q_0 l}{3}-\frac{2}{3}\frac{q_0x_1^2}{l^2}(3l-2x_1). \tag{10.16}$$

б) Для вычисления изгибающего момента воспользуемся формулой (10.4′)

$$M(x)=\int Q(x)\,dx+M(0).$$

Произвольная постоянная $M(0)=0$, так как в начале участка нет сосредоточенной пары. Подставляя под знак интеграла выражение для $Q(x)$, получим

$$M(x)=\int_0^{x_1}\left[\frac{q_0 l}{3}-\frac{2}{3}\frac{q_0x^2}{l^2}(3l-2x)\right]dx=$$
$$=\int_0^{x_1}\frac{q_0 l}{3}\,dx-\int_0^{x_1}\frac{2q_0x^2}{l}\,dx+\int_0^{x_1}\frac{4q_0x^3}{3l^2}\,dx=$$
$$=\frac{q_0 l}{3}x_1-\frac{2q_0x_1^3}{3l}+\frac{q_0x_1^4}{3l^2},$$

или

$$M(x)=\frac{q_0 l}{3}x_1-\frac{q_0x_1^3}{3l^2}(2l-x). \tag{10.17}$$

Из уравнений (10.16) и (10.17) видно, что поперечная сила изменяется по закону кубической параболы, а изгибающий момент — по параболе четвертой степени.

Для построения этих кривых по точкам дадим переменной x значения:

$$x=0;\quad Q(x)=\frac{q_0 l}{3};\qquad M(x)=0,$$

$$x=\frac{l}{2};\quad Q(x)=\frac{q_0 l}{3}-\frac{2}{3}\,q_0\,\frac{2l}{4}=0;\qquad M(x)=\frac{q_0 l^2}{6}-\frac{q_0 l^3}{24 l^2}\cdot\frac{3}{2}l=\frac{5}{48}q_0 l^2,$$

$$x=l;\quad Q(x)=\frac{q_0 l}{3}-\frac{2}{3}q_0 l=-\frac{q_0 l}{3};\qquad M(x)=\frac{q_0 l^2}{3}-\frac{q_0 l^2}{3}=0.$$

Соответствующие эпюры Q и M построены на рис. 143. Наибольшие значения Q и M соответственно равны

$$\max Q=\frac{q_0 l}{3}\quad \text{и}\quad \max M=\frac{5}{48}q_0 l^2. \tag{10.18}$$

На примере двухпролетной балки с промежуточным шарниром рассмотрим порядок построения эпюр Q и M для таких балок, нередко применяемых при проектировании мостов. Нагрузка и размеры балки показаны на рис. 144, *а*.

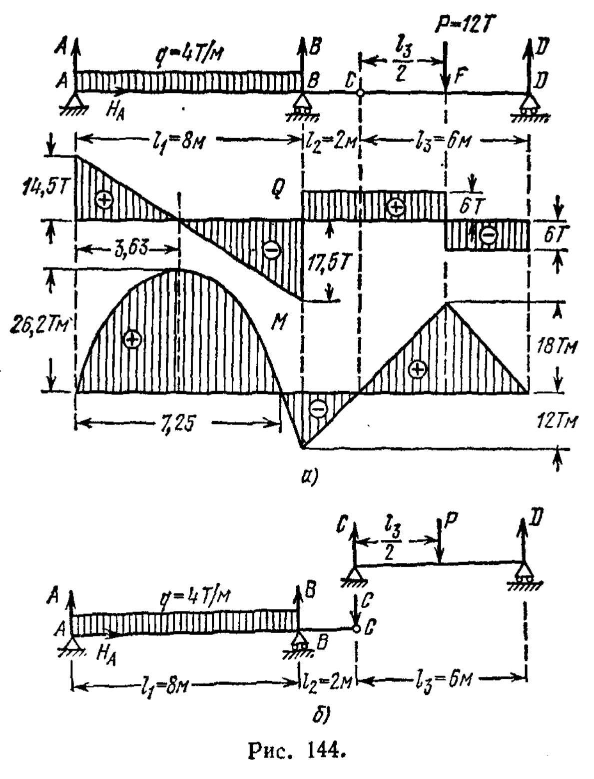


Рис. 144.

Для построения эпюр найдем реакции балок. Как видно из рис. 144, *а*, система балок может иметь *четыре* опорные реакции A, H_A, B и D. Уравнений же равновесия для *всей* балки AD мы можем написать только три. Четвертое уравнение определяется условием, что шарнир C (по свойству конструкции) не может

передать момента, так как позволяет взаимно поворачиваться одной части балки (AC) относительно другой (CD).

Последнее условие требует, чтобы сумма моментов относительно точки C сил, приложенных слева или справа от этого шарнира, равнялась нулю. Другими словами, для соблюдения равновесия балки *изгибающий момент в шарнире должен равняться нулю*. Это добавочное требование делает балку AD статически определимой.

Определение реакций начинаем с вычисления H_A. Приравнивая нулю сумму проекций всех сил на ось балки, убеждаемся, что $H_A=0$.

Далее мы могли бы написать три уравнения моментов, а именно:

1) приравнять нулю сумму моментов всех сил относительно точки A;

2) приравнять нулю сумму моментов всех сил относительно точки B или D;

3) приравнять нулю момент относительно точки C сил, расположенных *слева* или *справа* от этого шарнира.

Решая систему этих трех уравнений, можно получить все три неизвестные реакции: A, B и D. Однако проще определить эти реакции путем разложения балки AD на простейшие. Подвесная балка CD опирается в точке C шарнирно на конец консоли BC, а в точке D — на шарнирную подвижную опору. Поэтому всю балку AD мы можем рассматривать (рис. 144, *б*) как комбинацию из двух балок. Подвесная балка воспринимает в шарнире C реакцию C от конца консоли и в свою очередь давит на этот конец с такой же силой C.

Рассматривая сначала равновесие подвесной балки, находим ее реакции D и C, а прикладывая уже известную силу C к концу консоли, находим реакции A и B. В нашем примере

$$C=D=\frac{P}{2}=6T; \quad A=\frac{ql_1}{2}-C\frac{l_2}{l_1}=\frac{4\cdot 8}{2}-6\frac{2}{8}=14{,}5T,$$

$$B=\frac{ql_1}{2}+C\frac{l_1+l_2}{l_1}=\frac{4\cdot 8}{2}+6\frac{10}{8}=23{,}5T.$$

Проверка: $\Sigma Y=A+B+D-ql_1-P=14{,}5+23{,}5+6-4\cdot 8-12=0$.

После определения реакций изображаем вновь балку как одно целое со всеми силами и реакциями и определяем моменты и поперечные силы, как для обычного случая. Проверкой будет служить равенство нулю момента в шарнире C. Следует обратить внимание на то, что шарнир C не является точкой раздела участков, если в нем не приложена внешняя сила. Эпюры элементов и поперечных сил показаны на рис. 144, *а*.

Более удобно после определения опорных реакций строить эпюры Q и M *отдельно* для каждой подвесной и основной балки, откладывая значения полученных величины Q и M от общей оси x.

§ 60. Контроль правильности построения эпюр Q и M

Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью сплошной нагрузки определяют связь между эпюрами M и Q, построенными при любой нагрузке. Эта взаимная связь имеет важное практическое значение для контроля правильности выполненного построения. Приведем некоторые заключительные замечания, могущие быть полезными при построении эпюр Q и M.

1. Уже было указано (§ 57), что каждая ордината эпюры поперечных сил $Q=\frac{dM}{dx}$ геометрически представляет собой тангенс образуемого с осью x угла наклона касательной к эпюре M в

соответствующей точке. Подобные же геометрические соотношения имеются и между эпюрами q и Q (рис. 145).

2. Если на некотором участке:

а) $Q>0$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha>0$, то момент возрастает;

б) $Q<0$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha<0$, то момент убывает;

в) Q переходит через нуль, меняя знак с $+$ на $-$, то $M=M_{\max}$;

г) $Q=0$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha=0$, то $M=\mathrm{const}$.

3. Если $q=0$, т. е. $\frac{dQ}{dx}=0$, то $Q=\mathrm{const}$. Следовательно, на участках, свободных от сплошной нагрузки, эпюра Q ограничена прямыми, параллельными оси x; эпюра же моментов изобразится наклонными прямыми, если только $Q\neq0$ (см. п. 2, г). Если $q<0$, т. е. $\operatorname{tg}\beta<0$, то поперечная сила убывает.

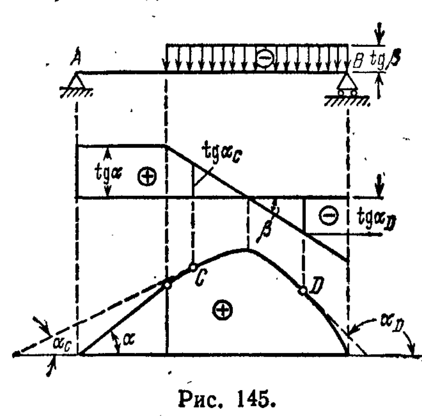


Рис. 145.

4. На участках балки, загруженных сплошной равномерно распределенной нагрузкой, эпюра M ограничена параболической кривой, а эпюра Q — наклонной прямой. При неравномерно распределенной нагрузке обе эпюры Q и M будут ограничены кривыми, характер которых зависит от типа нагрузки.

5. В сечениях под сосредоточенными силами в эпюре Q имеется скачок (на величину силы), а в эпюре M резкое изменение угла наклона (излом) смежных участков эпюры (см., например, сечение C на рис. 137).

6. Если сплошная нагрузка направлена вниз, т. е. $\frac{d^2M}{dx^2}=q<0$, иначе, если вторая производная, характеризующая кривизну линии M, отрицательна, то эпюра M очерчена кривой, имеющей выпуклость кверху. Наоборот, если $q>0$ (нагрузка направлена вверх), то эпюра M на соответствующем участке имеет выпуклость книзу (рис. 146).

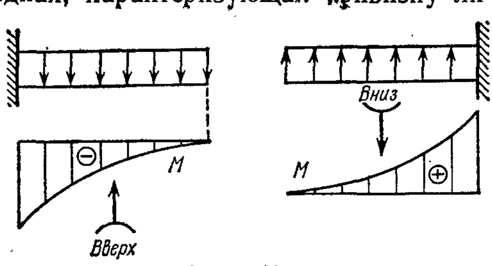
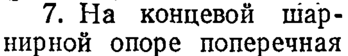


Рис. 146.


7. На концевой шарнирной опоре поперечная сила равна реакции этой опоры, а изгибающий момент равен нулю, если в опорном сечении не приложена пара сил.

8. На свободном конце балки (консоль) изгибающий момент равен нулю, если там нет сосредоточенной пары сил. При отсутствии в концевом сечении консоли сосредоточенной силы поперечная сила Q также равна нулю.

9. В защемленном конце (заделка) Q и M соответственно равны опорной реакции и опорному моменту.

10. В сечениях, где приложена пара сил, эпюра M имеет скачок на величину момента этой пары. На эпюре Q это не отражается.

Указанные в § 57 дифференциальные зависимости и приведенные здесь замечания служат не только для проверки правильности эпюр, но будут использованы нами в дальнейшем (главы XV, XVI и др.).

§ 61. Способ сложения действия сил при построении эпюр

Рассматривая выражения для M и Q, полученные нами в последних задачах, мы видим, что внешние нагрузки входят в эти выражения в первой степени; M и Q линейно зависят от нагрузок.

Рассматривая, например, уравнение для $M(x)$ в сечении консоли (рис. 140)

$$M(x) = Px - q\frac{x^2}{2},$$

мы видим, что ординаты изгибающего момента в сечениях этого участка складываются из двух: Px и $-q\frac{x^2}{2}$; первая из них представляет собой изгибающий момент, вызванный в выбранном сечении силой P, а вторая — нагрузкой q.

Мы могли бы построить отдельно эпюры моментов от силы P и от нагрузки q, а потом ординаты этих эпюр алгебраически сложить. Это было бы применением так называемого *способа сложения действия сил.*

Построение суммарной эпюры M покажем иа примере. Для балки, изображенной иа рис. 147; построеиы эпюры изгибающих моментов отдельно от равномерно распределениой нагрузки q (M_q) и от сосредоточенной силы P (M_P). Наибольшие по абсолютной величине значения моментов в защемлении соответственно равны

$$M_q = -\frac{ql^2}{2} \quad \text{и} \quad M_P = -Pl.$$

Чтобы сложить ординаты двух графиков одинакового знака, следует *приложить* их один к другому, как это показано на рис. 148, *а*, для чего один из графиков (M_P) отложен вверх. Изгибающий момент в любом сечении складывается из моментов

$$M_q = -\frac{qx^2}{2}$$

и

$$M_P = -Px.$$

Если сила P направлена вверх, то изменяется знак M_P. Для сложения двух графиков, имеющих *разные* знаки, достаточно *наложить* один график на другой (рис. 148, *б*).

Пусть по абсолютному значению min M_q>max M_P, т. е. $|ql^2/2| > Pl$. При наложении графиков ординаты автоматически вычтутся, и в данном случае мы получим в защемлении отрицательную ординату, в пролете же на некотором протяжении ординаты будут положительными.

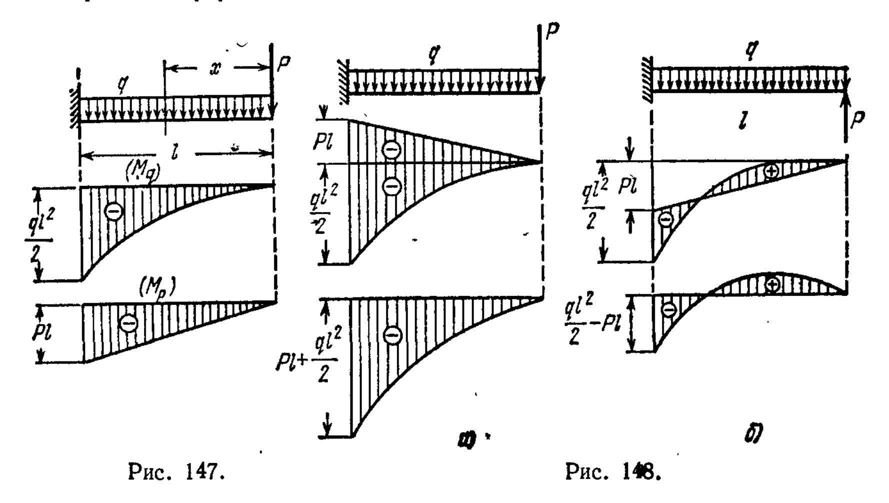


Рис. 147. Рис. 148.

Разумеется, для графического суммирования необходимо оба графика строить в одном и том же масштабе. Аналогично можно построить эпюру Q. Этот прием сложения эпюр удобен при расчете статически неопределимых неразрезных балок (глава XIX).

Для приведения эпюры к обычному виду можно полученные суммарные ординаты отложить от горизонтальной оси x (рис. 148, *а*, *б*).

Глава XI

ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ И ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ БАЛОК

§ 62. Экспериментальное изучение работы материала при чистом изгибе

Построение эпюр Q и M позволяет определить внутренние усилия в любом сечении балки, которые складываются из нормальных и касательных напряжений, возникающих в этом сечении при изгибе. Обратимся к вопросу об определении этих напряжений. Выше мы выяснили, что поперечная сила в сечении складывается из элементарных касательных усилий, а изгибающий момент — из нормальных, приводящихся к парам. Если на некотором участке балки поперечная сила Q отсутствует, т. е. касательные напряжения в сечениях

этого участка равны нулю, то в этих сечениях будут возникать только нормальные напряжения, вычисление которых в этом случае упрощается.

Такой случай изгиба, при котором поперечная сила в сечениях, перпендикулярных к оси балки, обращается в нуль, называется *чистым изгибом*. Чистый изгиб осуществим, если система внешних сил, приложенных к некоторому участку балки, приводится к парам сил (см., например, рис. 130). На практике, однако, чистый изгиб возможен лишь в случаях, когда собственный вес балки достаточно мал по сравнению с величинами приложенных к ней внешних сил и им можно пренебречь.

В качестве примера рассмотрим изгиб оси железнодорожного вагона (см. § 55). Схема действия внешних сил на ось (при пренебрежении ее собственным весом) показана на рис. 149. Имея в виду, что вследствие симметрии обе реакции одинаковы $A=B=P$, для любого сечения между точками C и D получим

$$Q(x)=A-P=0; \quad M(x)=Ax-P(x-a)=Pa=\text{const}.$$

Таким образом, в средней части вагонной оси CD поперечная сила отсутствует, а $M=\text{const}$ $\left(\text{вспомним, что } Q=\frac{dM}{dx}\right)$: на участке CD балка подвергается *чистому изгибу*.

Возвратимся к вопросу об отыскании нормальных напряжений для этого случая. Взяв сечение на расстоянии x от левой опоры A, рассмотрим условия равновесия левой отсеченной части балки (рис. 149). К ней приложена пара сил с моментом $M=Pa$ и нормальные напряжения в сечении, складывающиеся в пары с равнодействующим изгибающим моментом $M(x)$. Нам необходимо определить величину этих напряжений в каждой точке поперечного сечения и найти наибольшие их значения. Однако условия равновесия между внешними и внутренними силами, выражаемые равенством $M(x)=M$, недостаточны для определения напряжений σ, так как не только величина, но и характер распределения их по сечению нам пока неизвестны. Задача оказывается статически неопределимой и для ее решения следует обратиться к изучению упругой деформации балки, опираясь на данные *экспериментальных исследований*. Рассмотрим результаты опытов, полученные при чистом изгибе балки парами сил M, лежащими в плоскости симметрии (рис. 150).

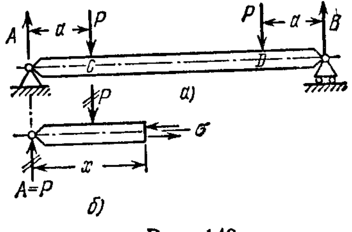


Рис. 149.

Линии *1—1* и *2—2*, проведенные на поверхности балки перпендикулярно к ее оси,— это следы двух смежных поперечных сечений, отстоящих друг от друга на расстоянии Δx, а проведенные между ни-

ми отрезки *ab* и *cd*, параллельные оси балки,— это продольные волокна, длина которых до деформации также равна Δx (рис. 150, *а*).

Опыт показывает, что после деформации (рис. 150, *б*):

1) линии *1—1* и *2—2* остаются прямыми, но наклоняются друг к другу, образуя между собой угол $\Delta\alpha$. Это позволяет думать, что и соответствующие поперечные сечения балки *остаются плоскими* и лишь поворачиваются друг относительно друга на угол $\Delta\alpha$.

2) отрезки *ab* и *cd* соответственно изменяют свою длину: отрезок *ab* укорачивается, а *cd* — удлиняется, из чего можно заключить, что верхние волокна подвергаются *сжатию*, а нижние — *растяжению*;

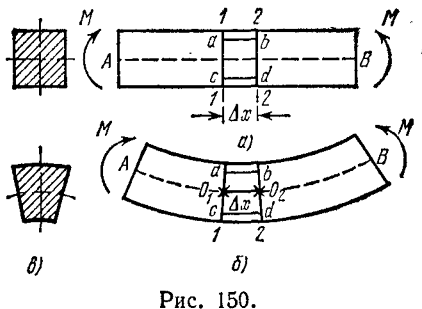


Рис. 150.

3) изменяются и поперечные размеры балки, как показано на рис. 150, *в*: ширина балки вверху увеличивается, что соответствует продольному сжатию, а внизу (в растянутой зоне) — уменьшается.

Так как деформация продольных волокон по высоте балки меняется непрерывно, то на каком-то уровне мы встретим слой волокон, не изменяющих своей длины, так *называемый нейтральный слой*, т. е. *поверхность, разделяющую сжатую зону от растянутой*. На рис. 150, *б* нейтральный слой показан пунктиром; отрезок O_1O_2 сохраняет свою первоначальную длину Δx.

Нейтральный слой перпендикулярен к плоскости симметрии балки, в которой расположены внешние силы, и пересекает плоскость каждого поперечного сечения по линии, также перпендикулярной к плоскости действия внешних сил. *Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения* называется *нейтральной осью* сечения. Совокупность всех нейтральных осей и образует нейтральный слой.

Что касается деформации продольных волокон *по ширине* сечения, то вследствие его симметрии относительно плоскости действия внешних сил обе половины балки должны деформироваться симметрично относительно этой плоскости; это позволяет считать, что продольная *деформация волокон любого слоя*, параллельного нейтральному, *не зависит от их положения по ширине балки*.

Деформация в поперечном направлении, как это установлено опытами, связана с деформацией продольных волокон пуассоновым отношением. Это дает основание полагать, что продольные волокна не нажимают друг на друга и подвергаются при чистом изгибе *простому сжатию* на вогнутой стороне и *простому растяжению* — на выпуклой, т. е. по другую сторону от нейтрального слоя.

Вместе с тем, вследствие поперечной деформации сечение балки несколько искажается, а нейтральная ось искривляется (рис. 150, *в*), что приводит к дополнительному искривлению и нейтрального слоя, приобретающего двоякую кривизну. Однако по малости упругих деформаций этими искажениями пренебрегают: нейтральную ось в каждом поперечном сечении считают *прямой линией*, а нейтральный слой — цилиндрической поверхностью.

Вследствие симметрии сечения относительно плоскости действия внешних сил искривление оси балки при изгибе происходит в той же плоскости. Изгиб, при котором ось балки остается после деформации в плоскости действия внешних сил, называется *плоским изгибом*.

Экспериментальные исследования изгиба балок дают основание для *ряда допущений*, положенных в основу дальнейших выводов:

1. При чистом изгибе поперечные сечения, бывшие плоскими до деформации, остаются плоскими и во время деформации (так называемая гипотеза плоских сечений).

2. Продольные волокна друг на друга не давят и, следовательно, под действием нормальных напряжений испытывают простое линейное растяжение или сжатие.

3. Деформации волокон не зависят от их положения по ширине сечения. Следовательно, и нормальные напряжения, изменяясь по высоте сечения, остаются по ширине одинаковыми.

Помимо этих допущений, введем еще *три ограничения:*

1. Балка имеет хотя бы одну плоскость симметрии, и все внешние силы лежат в этой плоскости.

2. Материал балки подчиняется закону Гука, причем модуль упругости при растяжении и сжатии одинаков.

3. Соотношения между размерами балки таковы, что она работает в условиях плоского изгиба без коробления или скручивания.

Из опыта известно, что балки с малой шириной сечения легко теряют устойчивость плоской формы при изгибе (скручиваются). При отношении высоты прямоугольного сечения балки к ее пролету $h/l > 1/5$ она работает не как балка, а как пластинка, и условия ее расчета изменяются.

Сделанные выше предположения в обычных случаях изгиба верны только приблизительно. Однако вытекающие из них погрешности теории так невелики (за исключением особых случаев), что ими можно пренебречь.

§ 63. Вычисление нормальных напряжений при изгибе. Закон Гука и потенциальная энергия при изгибе

А. Возьмем балку, подвергающуюся чистому изгибу парами M (рис. 151). Пользуясь методом сечения, разрежем балку сечением *1—1* на 2 части и рассмотрим условия равновесия одной из отсеченных частей, например левой, показанной на рис. 151 внизу. Для

простоты чертежа балка взята прямоугольного сечения. Так как практически искривления балки ничтожны по сравнению с ее размерами, то отсеченная часть изображена недеформированной.

Линия пересечения плоскости симметрии балки с плоскостью сечения принята за ось z (положительное направление взято вниз); нейтральная ось сечения принята за ось y, причем *положение ее по высоте балки* пока *неизвестно.* Ось x взята вдоль нейтрального слоя перпендикулярно к осям y и z.

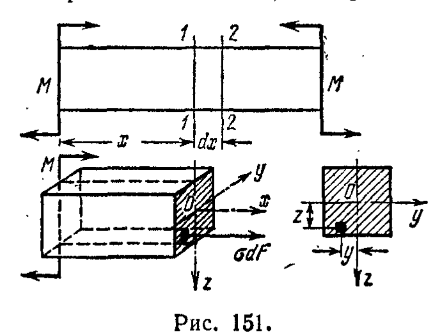


Рис. 151.

В каждой точке поперечного сечения действуют нормальные напряжения σ. Выделив вокруг любой точки с координатами y и z элементарную площадку dF, обозначим действующую на нее силу $dN=\sigma\,dF$. Отмеченная часть балки находится в равновесии под действием внешних сил, образующих пару M, и нормальных усилий dN, заменяющих отброшенную часть балки. Для равновесия эта система сил должна удовлетворять шести уравнениям статики. Напишем сначала уравнения проекций на 3 координатные оси x, y, z.

Так как проекция пары M на любую ось равна нулю, то эти уравнения дадут равенство нулю суммы проекций нормальных усилий dN на оси. Заменяя суммирование этих усилий по всей площади сечения интегрированием, получим

$$\sum X=0; \qquad \int_F \sigma\,dF=0. \tag{11.1}$$

$\sum Y=0$ и $\sum Z=0$ обращаются в тождества вида $0=0$, так как усилия $dN=\sigma\,dF$ проектируются на эти оси в точку.

Составим теперь уравнения моментов относительно осей x, y и z. Заметим при этом, что пара M лежит в плоскости xOz и потому моментов относительно осей Ox и Oz не дает. $\sum M_x=0$ обращается в тождество, так как усилия $dN=\sigma\,dF$ параллельны оси x:

$$\sum M_y=0; \quad M-\sum dN\cdot z=0, \quad \text{или} \quad M-\int_F \sigma\,dF\cdot z=0,$$

откуда

$$\int_F \sigma\cdot z\,dF=M; \tag{11.2}$$

$$\sum M_z=0; \quad \sum dN\cdot y=0, \quad \text{или} \quad \int_F \sigma\,dF\cdot y=0. \tag{11.3}$$

Таким образом, из шести уравнений равновесия можно использовать только три:

$$\sum X=0, \quad \text{или} \quad \int_F \sigma\, dF=0, \qquad (11.1')$$

$$\sum M_y=0, \quad \text{или} \quad \int_F \sigma z\, dF=M, \qquad (11.2')$$

$$\sum M_z=0, \quad \text{или} \quad \int_F \sigma y\, dF=0. \qquad (11.3')$$

Однако полученных трех уравнений статики недостаточно для определения величины нормальных напряжений, так как σ изменяется в зависимости от расстояния z площадки dF до нейтральной оси по неизвестному пока закону. Это расстояние (z) тоже неизвестно, так как неизвестно положение нейтральной оси y.

Б. Обратимся к рассмотрению деформаций балки, для чего двумя бесконечно близкими сечениями 1—1 и 2—2 выделим из нее элемент длиной dx. Вид этого элемента до и после деформации показан на рис. 152.

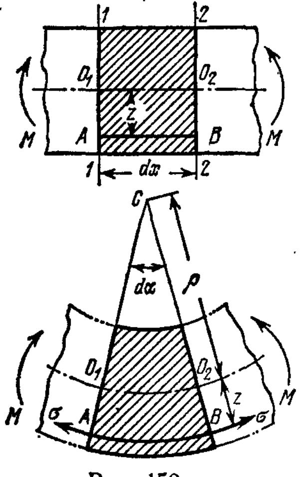


Рис. 152.

Для ясности чертежа деформация элемента показана с сильным преувеличением. Оба поперечных сечения, оставаясь плоскими, повернутся вокруг нейтральных осей (на фасаде точки O_1 и O_2) и образуют угол $d\alpha$. Нейтральный слой показан пунктиром. Линия O_1O_2, принадлежащая нейтральному слою, после деформации сохранит свою первоначальную длину dx. Все волокна, лежащие выше нейтрального слоя, укорачиваются, а ниже — удлиняются.

Найдем удлинение какого-либо волокна AB, расположенного на расстоянии z от нейтрального слоя и растянутого напряжениями σ. Первоначальная длина этого волокна равна $dx=\smile O_1O_2=\rho\, d\alpha$. После деформации его длина по дуге AB стала $\smile AB=(\rho+z)d\alpha$. Абсолютное удлинение рассматриваемого волокна $\Delta l=(\rho+z)d\alpha-\rho\, d\alpha=z\, d\alpha$. Относительное удлинение равно

$$\varepsilon=\frac{z\, d\alpha}{\rho\, d\alpha}=\frac{z}{\rho},$$

т. е. удлинения волокон пропорциональны их расстояниям до нейтрального слоя.

Здесь ρ — радиус кривизны нейтрального слоя, величину которого для выделенного (бесконечно малого по длине) элемента можно

считать постоянной. Допустив, что при изгибе волокна друг на друга не давят и что каждое волокно испытывает простое (линейное) растяжение или сжатие, для вычисления напряжений можем воспользоваться законом Гука при растяжении

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{E \cdot z}{\rho}. \tag{11.4}$$

Уравнение (11.4) показывает, что величина нормальных напряжений при изгибе меняется прямо пропорционально расстоянию z рассматриваемой точки сечения от нейтрального слоя. Значит, напряжения распределены по высоте сечения по линейному закону.

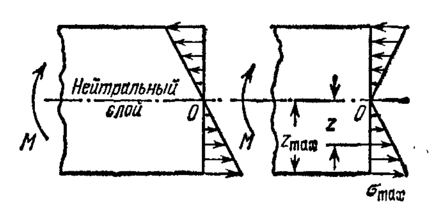


Рис. 153.

На нейтральной оси при $z=0$ и $\sigma=0$; при переходе в сжатую зону (выше нейтральной оси) σ вместе с z меняет знак на минус (сжатие) и вновь растет по абсолютному значению по мере удаления от нейтральной оси. Следовательно, наибольшего значения напряжения достигнут у верхнего и нижнего краев сечения при $z=z_{max}$. Характер распределения напряжений по высоте сечения показан на рис. 153.

Уравнение (11.4) дает только характер распределения нормальных напряжений по сечению, но им нельзя воспользоваться для вычисления величины их, так как ни ρ ни z неизвестны, поскольку неизвестно расположение нейтрального слоя по высоте сечения.

В. Для определения σ в зависимости от изгибающего момента обратимся к совместному решению полученного из рассмотрения деформаций уравнения (11.4) и уравнений статики (11.1), (11.2) и (11.3).

Подставляя значение σ из выражения (11.4) в уравнение (11.1), получим

$$\sum X = 0, \text{ или } \int_F \frac{E}{\rho} \cdot z\,dF = 0.$$

Так как $E/\rho = \text{const} \neq 0$, то

$$\int_F z\,dF = 0. \tag{11.5}$$

Этот интеграл представляет собой *статический момент* площади сечения относительно нейтральной оси y, который обращается в нуль только относительно *центральной* оси. Следовательно, *нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения.* Так как центр тяжести лежит и на оси симметрии Oz, то точка пересечения этих двух осей O является центром тяжести сечения, а ось Ox — осью стержня.

Таким образом, положения нейтральной оси и нейтрального слоя вполне определены. Нейтральный слой заключает в себе центры тяжести всех сечений стержня.

Теперь подставим то же выражение (11.4) в уравнение (11.3):

$$\sum M_z = 0; \quad \int_F \frac{E}{\rho} zy\,dF = 0, \quad \text{или} \quad \frac{E}{\rho}\int_F zy\,dF = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\int_F zy\,dF = 0. \tag{11.6}$$

Полученный интеграл — *сумма произведений из элементарных площадок на расстояния их до координатных осей — называется центробежным моментом инерции относительно осей y и z.* Центробежный момент инерции может быть положителен, может быть и величиной отрицательной, а следовательно, может и обратиться в нуль, так как координаты элементарных площадок могут иметь разные знаки.

По условию (11.6), в нашем случае центробежный момент инерции, который обычно обозначается символом

$$J_{zy} = \int_F zy\,dF,$$

должен обратиться в нуль.

Так как сечение симметрично относительно оси Oz, то для каждой площадки dF с координатами z, y слева от оси z мы можем подыскать такую же, симметрично расположенную площадку справа от оси z. Координаты z для этих площадок будут одинаковыми и по величине и по знаку, координаты же y окажутся одинаковыми по абсолютной величине, но обратными по знаку. Поэтому сумма

$$\int_F zy\,dF$$

разобьется на две суммы, равные по величине и противоположные по знаку. Таким образом, этот интеграл для симметричных сечений всегда равен нулю, и уравнение (11.6) обращается в тождество. Условие $J_{zy}=0$ в нашем случае соблюдено. Только при соблюдении условия, что центробежный момент инерции сечения обратится в нуль относительно осей, из которых одна лежит в плоскости действия внешних сил, изгиб будет плоским и дальнейшие наши выводы будут справедливы.

Наконец, используем последнее уравнение (11.2); подставив в него выражение (11.4), получим

$$\sum M_y = 0; \quad \int_F \frac{E}{\rho}\cdot z^2\,dF = M, \quad \text{или} \quad \frac{E}{\rho}\int z^2\,dF = M.$$

Обозначим

$$J_y = \int_F z^2\, dF. \qquad (11.7)$$

Этот интеграл, т. е. *сумма произведений из элементарных площадок на квадраты расстояний их до оси, называется осевым или экваториальным моментом инерции площади* относительно оси y и обозначается символом J_y. Так как ось y — нейтральная ось, то J_y есть момент инерции площади сечения балки относительно нейтральной оси[1]). Тогда из преобразованного только что уравнения (11.2) получаем

$$\frac{EJ}{\rho} = M, \quad \text{или} \quad \frac{E}{\rho} = \frac{M}{J}. \qquad (11.8)$$

Подставляя найденное значение E/ρ в уравнение (11.4), находим

$$\sigma = \frac{Mz}{J}. \qquad (11.9)$$

Таким образом, *нормальные напряжения в любой точке сечения прямо пропорциональны величине изгибающего момента и расстоянию точки от нейтральной оси и обратно пропорциональны моменту инерции сечения относительно нейтральной оси.*

Нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения и перпендикулярна к плоскости действия сил.

Момент инерции сечения, как видно из формулы (11.7), измеряется в единицах длины в четвертой степени и зависит от формы и размеров сечения. Практические приемы его вычисления для различных сечений будут показаны далее.

Для установления физического смысла этой величины видоизменим формулу (11.8)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}. \qquad (11.10)$$

Отсюда видно, что чем больше при данном изгибающем моменте момент инерции сечения J, тем бо́льшим окажется радиус кривизны нейтрального слоя, а стало быть, и оси балки, т. е. тем меньше балка искривится.

Величина момента инерции характеризует способность балки *сопротивляться искривлению в зависимости от размеров и формы поперечного сечения балки.* Модуль упругости E характеризует ту же способность балки сопротивляться искривлению, но уже в зависимости от материала балки. Произведение EJ называется *жесткостью* балки при изгибе, и чем оно больше, тем меньше искривится балка при действии данного изгибающего момента.

---

[1]) В дальнейшем, при обозначении момента инерции относительно нейтральной оси y, мы часто будем опускать индекс y, обозначая его для краткости просто J вместо J_y.

Г. С искривлением оси балки связан взаимный поворот сечений; длина отрезка $O_1O_2=dx$, как это видно из чертежа (рис. 152), равна $\rho\, d\alpha$. Отсюда угол поворота двух смежных сечений

$$d\alpha=\frac{dx}{\rho}.$$

Подставляя вместо $1/\rho$ его значение $M/(EJ)$, получим

$$d\alpha=\frac{M\,dx}{EJ}, \tag{11.11}$$

т. е. перемещения и деформации при изгибе — поворот сечений $d\alpha$ и кривизна оси балки $1/\rho$ прямо пропорциональны величине изгибающего момента и обратно пропорциональны жесткости балки.

Повторяя рассуждения, приведенные в § 52, легко подсчитать *потенциальную энергию*, накопленную балкой при изгибе. При изгибе бесконечно малого отрезка балки длиной dx работа момента на угловом перемещении $d\alpha$ будет

$$dA=\frac{1}{2}M\,d\alpha.$$

Подставляя $d\alpha$ из уравнения (11.11), получим

$$dU=dA=\frac{1}{2}\frac{M^2\,dx}{EJ}.$$

Просуммировав по всей длине балки, найдем

$$U=\int_0^l\frac{M^2\,dx}{2EJ}. \tag{11.12}$$

При чистом изгибе балки ($M=\text{const}$) и постоянном сечении ее по всей длине ($EJ=\text{const}$) потенциальная энергия выразится так:

$$U=\frac{M^2l}{2EJ}. \tag{11.12'}$$

Если изгибающий момент по длине балки выражается различными функциями от x (для разных участков), то интеграл (11.12) разобьется на сумму интегралов (каждый в пределах длины соответствующего участка) и выражение для потенциальной энергии при изгибе примет вид

$$U=\sum\int\frac{M^2\,dx}{2EJ}. \tag{11.12''}$$

Потенциальной энергией деформации балки от сдвигов (§ 36), вызываемых действием поперечных сил Q, обычно пренебрегают вследствие ее относительной малости (подробнее см. ниже — глава XVIII).

§ 64. Применение полученных результатов к проверке прочности балок

Формула (11.9) решает вопрос о величине и распределении нормальных напряжений по сечению. Она выведена в предположении наличия *чистого изгиба*, когда сечения остаются плоскими.

Исследования показали, что когда Q не равно нулю, сечения не только поворачиваются, но и несколько искривляются под влиянием касательных напряжений. Однако это искривление для двух смежных сечений таково, что оно не меняет установленного выше закона распределения деформаций волокон, заключающихся между этими сечениями. Поэтому формула (11.9) может быть применена и в том случае, когда Q не равно нулю.

Далее следует отметить, что *пока* мы имеем право применять эту формулу лишь в том случае, когда сечения балки имеют ось симметрии и внешние силы расположены в этой плоскости симметрии.

Нейтральная ось в каждом сечении, от которой отсчитывается z, проходит через его центр тяжести перпендикулярно к оси симметрии.

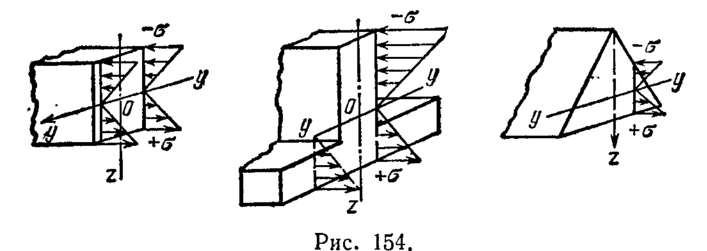


Рис. 154.

На рис. 154 приведены примеры распределения напряжений при различных формах сечений балки: прямоугольник, тавр, треугольник. Во всех точках, одинаково удаленных от нейтральной оси, нормальные напряжения одинаковы. По одну сторону от нейтральной оси мы получаем сжимающие, а по другую — растягивающие напряжения. Наибольшие напряжения получаются в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси. При выбранных условиях относительно знаков M и z формула (11.9) автоматически дает правильный знак для σ, плюс — для растягивающих и минус — для сжимающих напряжений.

При положительном изгибающем моменте балка гнется выпуклостью вниз, верхние волокна сжимаются ($z<0$), нижние растягиваются. При отрицательном изгибающем моменте получается обратная картина. Поэтому при решении практических задач для выбора знака нормальных напряжений можно руководствоваться правилом: если точка рассматриваемого сечения находится в растянутой зоне, то σ следует брать со знаком плюс, а если в сжатой — со знаком ми-

нус. Разумеется, в этом случае в формулу (11.9) следует подставлять *абсолютные значения* M и z.

Для проверки прочности материала балки по отношению к нормальным напряжениям необходимо найти наиболее напряженные на растяжение и сжатие площадки. Для этого необходимо применить формулу (11.9) к *опасному сечению*, т. е. подставить в нее вместо M его наибольшее значение M_{max}, а вместо z подставить z_{max} — расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленных от нее точек. Тогда для наибольшего нормального напряжения получаем формулу

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}\, z_{max}}{J}.$$

Обычно эту формулу преобразовывают, деля числитель и знаменатель на z_{max}:

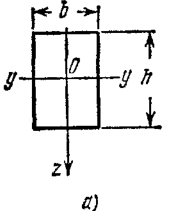
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{(J/z_{max})}.$$

Величина J/z_{max} называется *осевым моментом сопротивления* сечения и обозначается буквой W. Так как J выражается в единицах длины в четвертой степени, то W измеряется единицами длины в третьей степени, например, *см*³. Таким образом,

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}, \qquad (11.13)$$

где

$$W = \frac{J}{z_{max}}. \qquad (11.14)$$



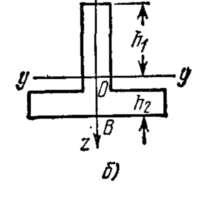


Рис. 155.

При симметричном относительно нейтральной оси сечении, например прямоугольном, расстояния до крайних растянутых и сжатых волокон одинаковы и такое сечение имеет *одно вполне определенное* значение момента сопротивления относительно оси y. Так, при высоте прямоугольника (рис. 155, *а*), равной h,

$$z_{max} = \frac{h}{2} \quad \text{и} \quad W = \frac{J}{(h/2)}.$$

Если сечение несимметрично относительно нейтральной оси — тавр, мы получим *два* момента сопротивления: один для волокон A (рис. 155, *б*) $W_1 = J/h_1$ и другой для волокон B: $W_2 = J/h_2$. Теперь в формулу (11.13) следует вводить: W_1 — при вычислении напряжений в точке A и W_2 — при вычислении напряжений в точке B.

Переходим к составлению условия прочности по напряжениям растяжения или сжатия. Это условие выражает ту мысль, что наибольшее действительное напряжение должно быть не больше

допускаемого:

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W}\leqslant[\sigma]. \qquad (11.15)$$

Отсюда находим, что

$$W\geqslant\frac{M_{max}}{[\sigma]}, \qquad (11.16)$$

т. е. необходимый по условию прочности момент сопротивления сечения балки должен быть больше или равен наибольшему изгибающему моменту, деленному на допускаемое напряжение.

Так как W зависит от формы и размеров сечения балки, то, выбрав форму (прямоугольник, тавр, двутавр), мы сможем подобрать размеры балки так, чтобы ее сечение имело момент сопротивления, равный полученному из формулы (11.16). Как это делается практически, будет показано ниже. Для прокатных профилей значения J и W даются в таблицах сортамента (см. приложение).

При применении формул (11.15) и (11.16) следует различать два случая.

Первый случай, наиболее часто встречающийся при изгибе,— когда материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию; в этом случае допускаемые напряжения для того и другого вида деформации равны между собой:

$$[\sigma_p]=[\sigma_{сж}]=[\sigma].$$

Тогда при *симметричном* сечении безразлично, проверять ли прочность растянутых или сжатых волокон, ибо для тех и других момент сопротивления W и наибольшие действительные напряжения будут иметь одну и ту же величину. При *несимметричном* сечении в формулы (11.15) и (11.16) вместо W надо подставить то значение W_1 или W_2, которое *меньше*; оно будет относиться к более удаленному волокну.

Второй случай относится к балкам, материал которых неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию. В этом случае необходимо составить два условия прочности: одно — для растянутых волокон, другое — для сжатых:

$$\sigma_p=+\frac{M_{max}}{W_1}\leqslant[\sigma]; \quad \sigma_{сж}=-\frac{M_{max}}{W_2}\leqslant[\sigma_{сж}]. \qquad (11.17)$$

В зависимости от того, чему лучше сопротивляется материал, что больше, $[\sigma]$ или $[\sigma_{сж}]$, приходится соответствующим образом конструировать сечение, выбирая его форму и размеры так, чтобы W_1 и W_2 удовлетворяли условию прочности.

Что касается физического смысла момента сопротивления, то он ясен из формулы (11.13); чем больше W, тем больший изгибающий момент может принять на себя балка, не подвергаясь опасности разрушения. Таким образом, величина момента сопротивления харак-

теризует влияние *формы и размеров принятого сечения на прочность балки при напряжениях, не превосходящих предела пропорциональности.*

При напряжениях, превышающих предел пропорциональности материала, формулы (11.13) и (11.17) перестают быть справедливыми.

Формулы (11.15) и (11.17) позволяют произвести проверку прочности заданного сечения (при известной величине W); формула (11.16) дает возможность при выбранном материале и допускаемом напряжении для него по вычисленному значению наибольшего изгибающего момента M_{max} подобрать необходимую величину момента сопротивления сечения. Затем в зависимости от принятого профиля балки, т. е. формы сечения, определяются необходимые поперечные его размеры.

Как было указано выше, для этой цели нужно найти связь между размерами сечения и величиной момента сопротивления. Как это сделать, указано в следующей главе (§ 73).

Глава XII

ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ ФИГУР

§ 65. Вычисление моментов инерции и моментов сопротивления для простейших сечений

При выводе формулы для нормальных напряжений (§ 63) было получено выражение (11.7) вида

$$J_y = \int_F z^2\,dF,$$

где z — расстояние от центральной оси y до любой элементарной площадки. Этот интеграл, распространяющийся на всю площадь сечения, мы назвали моментом инерции площади относительно нейтральной оси; от величины момента инерции зависит сопротивление сечения балки деформации при изгибе (11.10).

Кроме того, в условие прочности при изгибе (§ 64) входит выражение для момента сопротивления сечения (11.14)

$$W_y = \frac{J_y}{z_{max}}.$$

Из сказанного следует, что для обеспечения прочности и жесткости балки необходимо научиться вычислять моменты инерции и моменты сопротивления для поперечных сечений любой формы. Начнем с простейшего сечения балки — прямоугольника шириной b и высотой h (рис. 156). Проведем через его центр тяжести O оси симметрии Oz и Oy. Если внешние силы, действующие на балку, лежат в плоскости Oz, то нейтральной осью будет ось Oy. Найдем

относительно этой оси сначала момент инерции, а потом и момент сопротивления площади прямоугольника.

Площадки dF, на которые следует разбить всю площадь сечения, выберем в виде узких прямоугольников шириной b и высотой dz (рис. 156). Тогда

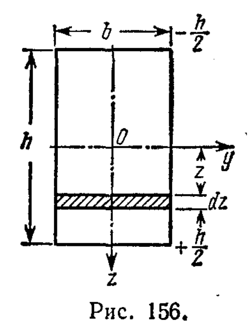


Рис. 156.

$$dF = b\,dz$$

и интеграл J принимает вид

$$J_y = \int_F bz^2\,dz.$$

Чтобы взять интеграл по всей площади прямоугольника, следует z менять от $-h/2$ до $+h/2$. Тогда

$$J_y = \int_{-h/2}^{+h/2} bz^2\,dz = b\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-h/2}^{+h/2} = \frac{bh^3}{12}. \quad (12.1)$$

Момент же сопротивления относительно нейтральной оси Oy мы получим, разделив J_y на $z_{max} = h/2$:

$$W = \frac{J_y}{z_{max}} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}. \quad (12.2)$$

Если бы нам нужно было вычислить момент инерции и момент сопротивления прямоугольника относительно оси Oz, то в полученных формулах следовало бы b и h поменять местами:

$$J_z = \frac{hb^3}{12}$$

и

$$W_z = \frac{hb^2}{6}. \quad (12.3)$$

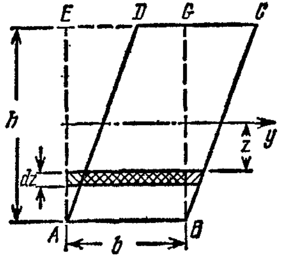


Рис. 157.

Заметим, что сумма произведений z^2dF не изменится, если мы сдвинем все полоски $dF = b\,dz$ (рис. 156) параллельно самим себе так, что они расположатся в пределах параллелограмма $ABCD$ (рис. 157).

Таким образом, момент инерции *параллелограмма* $ABCD$ относительно оси y равен моменту инерции равновеликого ему прямоугольника $ABGE$:

$$J_y = \frac{bh^3}{12}. \quad (12.1)$$

Так как момент инерции площади представляет собой сумму вида $J_y = \int_F z^2\,dF$, то, пользуясь формулой (12.1), можно сразу подсчитать

величину момента инерции прямоугольного коробчатого сечения (рис. 158) как разность

$$J_y = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12}(BH^3 - bh^3). \qquad (12.1')$$

Момент сопротивления сечения

$$W_y = \frac{J_y}{z_{max}} = \frac{BH^3 - bh^3}{12 \cdot H/2} = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}. \qquad (12.2')$$

Обращаем внимание на то, что момент сопротивления *нельзя* подсчитывать как разность вида $W = W_1 - W_2$ или $W = \frac{BH^2}{6} - \frac{bh^2}{6}$,

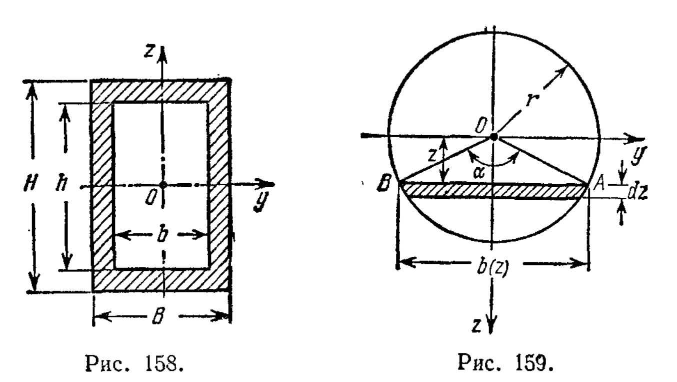


Рис. 158. Рис. 159.

что противоречит самому понятию о моменте сопротивления, как об *отношении* J_y/z_{max}

При вычислении момента инерции *круга* радиуса r (рис. 159) также разбиваем площадь на узкие полоски размером dz вдоль оси Oz; ширина этих полосок $b = b(z)$ тоже будет переменной по высоте сечения. Элементарная площадка

$$dF = b(z)\,dz.$$

Момент инерции равен

$$J = \int_F z^2 b(z)\,dz.$$

Так как верхняя и нижняя половины сечения одинаковы, то вычисление момента инерции достаточно провести для одной нижней и результат удвоить. Пределами для изменения z будут 0 и r:

$$J = 2\int_0^r z^2 b(z)\,dz.$$

Введем новую переменную интегрирования — угол α (рис. 159); тогда

$$z = r\cos\frac{\alpha}{2}; \quad dz = -\frac{1}{2} r \sin\frac{\alpha}{2}\, d\alpha; \quad b(z) = 2r\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Пределы: при $z=0$ $\alpha=\pi$; при $z=r$ $\alpha=0$, следовательно,

$$J = -2\int_{\pi}^{0} 2r^4 \cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}\, d\alpha = \frac{r^4}{2}\int_{0}^{\pi}\sin^2\alpha\, d\alpha = \frac{\pi r^4}{4} \qquad (12.4)$$

и

$$W = \frac{J}{z_{\max}} = \frac{J}{r} = \frac{\pi r^3}{4}. \qquad (12.5)$$

Для круга всякая ось, проходящая через центр тяжести, есть ось симметрии. Поэтому формулы (12.4) и (12.5) годны для любой такой оси.

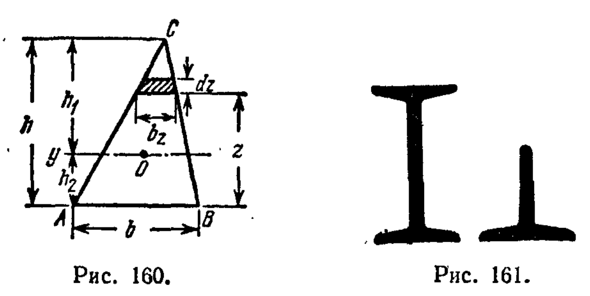


Рис. 160. Рис. 161.

Сделав замену $r=d/2$, выразим J и W через диаметр круга

$$J = \frac{\pi d^4}{64}, \qquad (12.4')$$

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0{,}1 d^3. \qquad (12.5')$$

Для *треугольника* (рис. 160) момент инерции относительно оси AB равен

$$J_{AB} = \int_F z^2 b_z\, dz; \quad b_z = b\frac{h-z}{h} = b\left(1-\frac{z}{h}\right),$$

$$J_{AB} = \int_0^h bz^2\left(1-\frac{z}{h}\right) dz = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}.$$

Ниже (§§ 66—68) будет показано, как вычислять момент инерции для сечения любой сложной формы относительно любой оси.

На практике из симметричных сечений встречаются чаще всего: для дерева — прямоугольник и круг, для металлов — двутавровое и тавровое сечения (рис. 161). Для прокатных профилей можно поль-

зоваться таблицами ГОСТ (сортамент), в которых помещены размеры и величины J и W для профилей, выпускаемых заводами. Эти таблицы помещены в приложении.

В балках из металла обычно применяются сложные поперечные сечения, потому что в них материал может быть использован экономичнее, чем в таких сечениях, как прямоугольник и круг.

Мы видели (§ 48), что валы делают полыми, чтобы удалить ту часть материала, которая слабо работает. При изгибе балок материал около нейтральной оси принимает на себя малые нормальные

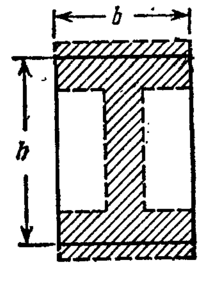


Рис. 162.

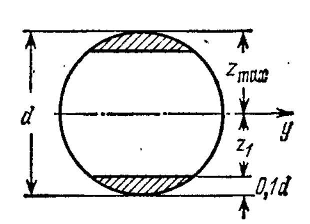


Рис. 163.

напряжения (формула (11.9)) и также не может быть использован полностью. Поэтому целесообразнее переделать прямоугольное сечение так, чтобы удалить материал у нейтральной оси и часть его сэкономить, а часть перенести в верхнюю и нижнюю зоны балки, где он будет работать более интенсивно. Так получается (рис. 162) из прямоугольного сечения профиль *двутавра*, обладающего той же прочностью и меньшим весом. Применение двутавра целесообразно при материалах, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию (большинство металлов).

Сечения в виде *тавра* применяются или в случаях, вызываемых специальными конструктивными обстоятельствами, или для таких материалов, как чугун, бетон, у которых сопротивления растяжению и сжатию резко разнятся между собой; последнее обстоятельство требует, чтобы напряжения в крайних волокнах были различными.

Как видно из изложенного, при решении вопроса о наиболее экономичном проектировании сечения следует стремиться к тому, чтобы при одной и той же площади F получить наибольший момент сопротивления и момент инерции. Это ведет к размещению большей части материала подальше от нейтральной оси.

Однако для некоторых сечений можно увеличить момент сопротивления не добавлением, а, наоборот, путем срезки некоторой части сечения, наиболее удаленной от нейтральной оси.

Так, например, для круглого сечения срезка заштрихованных сегментов (рис. 163) несколько увеличивает момент сопротивления,

так как при этом мы уменьшаем момент инерции сечения в меньшей степени, чем расстояние до крайнего волокна z_{max}.

Наиболее экономичным при изгибе будет то сечение, для которого отношение момента сопротивления к площади W/F будет наибольшим. Удобнее оценивать экономичность сечения безразмерным коэффициентом $\alpha = W/(F \cdot h)$, где h — высота сечения. Для некоторых сечений значения коэффициентов α приведены в таблице 11. Как мы видим, наибольшую величину α имеет для двутаврового сечения.

Таблица 11

Коэффициенты, характеризующие экономичность профиля

Форма сечения	Коэффициент α	Форма сечения	Коэффициент α
Двутавр (в зависимости от номера профиля)	0,31÷0,34	Прямоугольник	0,167
		Круг	0,125
Швеллер (то же)	0,29÷0,31	Треугольник	0,083
Тавр	0,085	Полый круг (при $r/R = 0,9$)	0,226

§ 66. Общий способ вычисления моментов инерции сложных сечений

При проверке прочности частей конструкций нам приходится встречаться с сечениями довольно сложной формы, для которых нельзя вычислить момент инерции таким простым путем, каким мы пользовались для прямоугольника и круга в § 65.

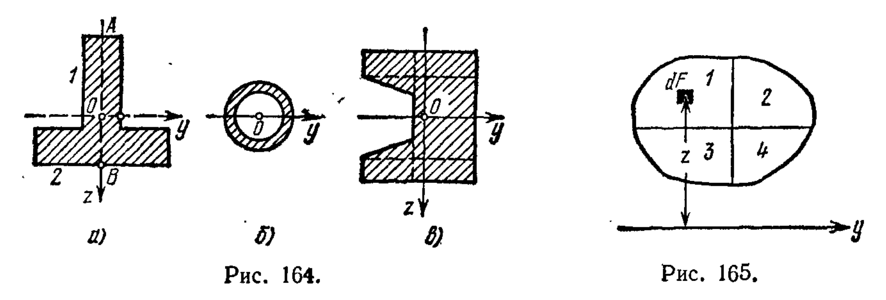


Рис. 164. Рис. 165.

Таким сечением может быть, например, тавр (рис. 164, *а*), кольцевое сечение трубы, работающей на изгиб (авиационные конструкции) (рис. 164, *б*), кольцевое сечение шейки вала или еще более сложное сечение (рис. 164, *в*). Все эти сечения можно разбить на простейшие, как-то: прямоугольники, треугольники, круги и т. д. Можно показать, что момент инерции такой сложной фигуры яв-

ляется суммой моментов инерции частей, на которые мы ее разбиваем.

Возьмем (рис. 165) какую угодно фигуру, изображающую поперечное сечение балки; в ее плоскости проведена ось y—y. Момент инерции этой фигуры относительно оси y—y равен (11.7)

$$J_y = \int_F z^2\,dF,$$

где z — расстояние элементарных площадок dF до оси y—y.

Разобьем взятую площадь на четыре части: F_1, F_2, F_3 и F_4. Теперь при вычислении момента инерции по формуле (11.7) можно сгруппировать слагаемые в подынтегральной функции так, чтобы отдельно произвести суммирование для каждой из выделенных четырех площадей, а затем эти суммы сложить. Величина интеграла от этого не изменится.

Наш интеграл разобьется на четыре интеграла, каждый из которых будет охватывать одну из площадей F_1, F_2, F_3 или F_4:

$$J_y = \int_F z^2\,dF = \int_{F_1} z^2\,dF + \int_{F_2} z^2\,dF + \int_{F_3} z^2\,dF + \int_{F_4} z^2\,dF.$$

Каждый из этих интегралов представляет собой момент инерции соответствующей части площади относительно оси y—y; поэтому

$$J_y = J_y^{I} + J_y^{II} + J_y^{III} + J_y^{IV}, \tag{12.6}$$

где J_y^{I} — момент инерции относительно оси y—y площади F_1, а J_y^{II} — то же для площади F_2 и т. д.

Полученный результат можно формулировать так: *момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции составных ее частей*. Поэтому, чтобы вычислить, например, момент инерции сечения, изображенного на рис. 164, *в*, относительно оси Oy, необходимо найти моменты инерции прямоугольников и треугольников относительно оси Oy и затем сложить их. Таким образом, нам необходимо уметь *вычислять момент инерции любой фигуры относительно любой оси, лежащей в ее плоскости*.

Решение этой задачи и составляет содержание настоящей главы.

§ 67. Зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей, из которых одна — центральная

Задачу — получить наиболее простые формулы для вычисления момента инерции любой фигуры относительно любой оси — мы решим в несколько приемов. Если взять серию осей, параллельных друг другу, то оказывается, что можно легко вычислить моменты инерции фигуры относительно любой из этих осей, зная ее момент

инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести фигуры параллельно выбранным осям.

Оси, проходящие через центр тяжести, мы будем называть *центральными осями*. Возьмем (рис. 166) какую-нибудь фигуру. Проведем центральную ось Oy, момент инерции относительно этой оси назовем J_y. Проведем в плоскости фигуры ось y_1 *параллельно* оси y на расстоянии a от нее. Найдем зависимость между J_y и J'_y — моментами инерции относительно осей y и y_1. Для этого напишем выражения для J_y и J'_y. Разобьем площадь фигуры на площадки dF; расстояния каждой такой площадки до осей y и y_1 назовем z и z_1. Тогда

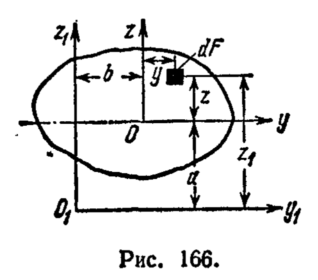


Рис. 166.

$$J_y = \int_F z^2\,dF \quad \text{и} \quad J'_y = \int_F z_1^2\,dF.$$

Но из чертежа имеем

$$z_1 = z + a;$$

следовательно,

$$J'_y = \int_F (z+a)^2\,dF = \int_F (z^2 + 2az + a^2)\,dF = $$
$$= \int_F z^2\,dF + 2a\int_F z\,dF + a^2\int_F dF.$$

Первый из этих трех интегралов — момент инерции относительно центральной оси Oy. Второй — статический момент относительно той же оси; он равен нулю, так как ось y проходит через центр тяжести фигуры. Наконец, третий интеграл равен площади фигуры F. Таким образом,

$$J'_y = J_y + a^2F, \tag{12.7}$$

т. е. *момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, проведенной параллельно данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.*

Значит, наша задача теперь свелась к вычислению только центральных моментов инерции; если мы их будем знать, то по формуле (12.7) сможем вычислить момент инерции относительно любой другой оси. Из формулы (12.7) следует, что *центральный* момент инерции является *наименьшим* среди моментов инерции относительно параллельных осей, и для него мы получаем

$$J_y = J'_y - a^2F. \tag{12.7'}$$

Найдем также центробежный момент инерции J'_{yz} относительно осей y_1z_1, параллельных центральным, если известен $J_{yz}=\int_F yz\,dF$ (рис. 166). Так как, по определению,

$$J'_{yz}=\int_F y_1z_1\,dF,$$

где $y_1=y+b$, $z_1=z+a$, то

$$J'_{yz}=\int_F (y+b)(z+a)\,dF=\int_F yz\,dF+ab\int_F dF+a\int_F y\,dF+b\int_F z\,dF.$$

Так как два последних интеграла представляют собой статические моменты площади относительно центральных осей Oy и Oz, то они обращаются в нуль и, следовательно,

$$J'_{yz}=J_{yz}+ab\cdot F. \qquad (12.8)$$

Центробежный момент инерции относительно системы взаимно перпендикулярных осей, параллельных центральным, равен центробежному моменту инерции относительно этих центральных осей плюс произведение из площади фигуры на координаты ее центра тяжести относительно новых осей.

§ 68. Зависимость между моментами инерции при повороте осей

Центральных осей можно провести сколько угодно. Возникает вопрос, нельзя ли выразить момент инерции относительно любой центральной оси в зависимости от момента инерции относительно одной или двух *определенных* осей. Для этого посмотрим, как будут меняться моменты инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей при повороте их на угол α.

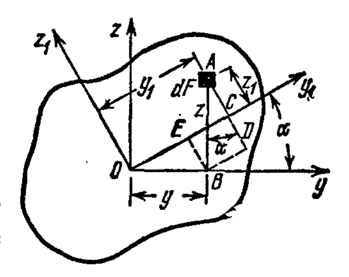


Рис. 167.

Возьмем какую-либо фигуру и проведем через ее центр тяжести O две взаимно перпндикулярные оси Oy и Oz (рис. 167). Пусть нам известны осевые моменты инерции относительно этих осей J_y, J_z, а также центробежный момент инерции J_{yz}. Начертим вторую систему координатных осей y_1 и z_1, наклоненных к первым под углом α; положительное направление этого угла будем считать при повороте осей вокруг точки O против часовой стрелки. Начало координат O сохраняем. Выразим моменты относительно второй системы координатных осей J'_y и J'_z через известные моменты инерции J_y и J_z.

Напишем выражения для моментов инерции относительно этих осей:

$$\left.\begin{aligned} J_y &= \int_F z^2\,dF; \quad J_z = \int_F y^2\,dF, \\ J'_y &= \int_F z_1^2\,dF; \quad J'_z = \int_F y_1^2\,dF. \end{aligned}\right\} \tag{12.9}$$

Из чертежа видно, что координаты площадки dF в системе повернутых осей $y_1\,Oz_1$ будут

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= OE+EC = OE+BD = y\cos\alpha + z\sin\alpha, \\ z_1 &= AD-DC = AD-BE = z\cos a - y\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{12.10}$$

Подставляя эти значения y_1 и z_1 в формулы (12.9), получим

$$J'_y = \int_F (z\cos\alpha - y\sin\alpha)^2\,dF =$$

$$= \int_F (z^2\cos^2\alpha + y^2\sin^2\alpha - 2yz\sin\alpha\cos\alpha)\,dF,$$

или

$$J'_y = \cos^2\alpha\int_F z^2\,dF + \sin^2\alpha\int_F y^2\,dF - \sin 2\alpha\int_F yz\,dF. \tag{12.11}$$

Аналогично,

$$J'_z = \int_F (y\cos\alpha + z\sin\alpha)^2\,dF,$$

или

$$J'_z = \sin^2\alpha\int_F z^2\,dF + \cos^2\alpha\int_F y^2\,dF + \sin 2\alpha\int_F yz\,dF. \tag{12.12}$$

Первые два интеграла выражений (12.11) и (12.12) представляют собой осевые моменты инерции J_y и J_z, а последний — центробежный момент инерции площади относительно этих осей J_{yz}. Тогда

$$\left.\begin{aligned} J'_y &= J_y\cos^2\alpha + J_z\sin^2\alpha - J_{yz}\sin 2\alpha, \\ J'_z &= J_y\sin^2\alpha + J_z\cos^2\alpha + J_{yz}\sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{12.13}$$

Для решения задач могут понадобиться формулы перехода от одних осей к другим для центробежного момента инерции. При повороте осей (рис. 167) имеем

$$J'_{yz} = \int_F y_1 z_1\,dF,$$

где y_1 и z_1 вычисляются по формулам (12.10); тогда

$$J'_{yz} = \int_F (z\sin\alpha + y\cos\alpha)(z\cos\alpha - y\sin\alpha)\,dF =$$

$$= \sin\alpha\cos\alpha \int_F z^2\,dF - \sin\alpha\cos\alpha \int_F y^2\,dF +$$

$$+ \cos^2\alpha \int_F yz\,dF - \sin^2\alpha \int_F yz\,dF.$$

После преобразований получим

$$J'_{yz} = \frac{1}{2}(J_y - J_z)\sin 2\alpha + J_{yz}\cos 2\alpha. \qquad (12.14)$$

Таким образом, для того чтобы вычислить момент инерции относительно любой центральной оси y_1, надо знать моменты инерции J_y и J_z относительно системы каких-нибудь двух взаимно перпендикулярных центральных осей Oy и Oz, центробежный момент инерции J_{yz} относительно тех же осей и угол наклона оси y_1 к оси y.

Для вычисления же величин J_y, J_z, J_{yz} приходится так выбирать оси y и z и разбивать площадь фигуры на такие составные части, чтобы иметь возможность произвести это вычисление, пользуясь только формулами перехода от центральных осей каждой из составных частей к осям, им параллельным. Как это сделать на практике, будет показано ниже на примере. Заметим, что при этом вычислении сложные фигуры надо разбивать на такие элементарные части, для которых по возможности известны величины центральных моментов инерции относительно системы взаимно перпендикулярных осей.

Заметим, что ход вывода и полученные результаты (12.13) и (12.14) не изменились бы, если бы начало координат было взято не в центре тяжести сечения, а в любой другой точке O. Таким образом, формулы (12.13) и (12.14) являются формулами перехода от одной системы взаимно перепендикулярных осей к другой, повернутой на некоторый угол α, независимо от того, центральные это оси или нет.

Из формулы (12.13) можно получить еще одну зависимость между моментами инерции при повороте осей. Сложим выражения для J'_y и J'_z (12.13); получим

$$J'_y + J'_z = J_y(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + J_z(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = J_y + J_z, \qquad (12.15)$$

т. е. сумма моментов инерции относительно любых взаимно перпендикулярных осей y и z не меняется при их повороте. Подставляя в формулу (12.15) вместо J_y и J_z их значения из (12.9), получаем

$$J_y + J_z = \int_F z^2\,dF + \int_F y^2\,dF = \int_F (z^2 + y^2)\,dF = \int_F \rho^2\,dF = J_p, \qquad (12.16)$$

где $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ — расстояние площадок dF от точки O. Величина

$J_p = \int\limits_F \rho^2\, dF$ является, как уже известно, полярным моментом инерции сечения относительно точки O (§ 48).

Полярный момент инерции сечения относительно какой-либо точки равен сумме осевых моментов инерции относительно взаимно перпендикулярных осей, проходящих через эту точку. Поэтому эта сумма и остается постоянной при повороте осей. Зависимостью (12.16) можно пользоваться для упрощения вычисления моментов инерции. Так, для круга мы уже имели (§ 48)

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Так как по симметрии для круга $J_z = J_y$, то

$$J_z = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi r^4}{4},$$

что было получено выше путем интегрирования (§ 65).

Точно так же для тонкостенного кольцевого сечения на основании формулы (9.15) можно получить

$$J_y = \frac{J_p}{2} \approx \pi r_0^3 t.$$

§ 69. Главные оси инерции и главные моменты инерции

Формулы (12.7) и (12.13) решают поставленную в § 66 задачу: зная для данной фигуры центральные моменты инерции J_y, J_z и J_{zy}, мы можем вычислить момент инерции и относительно любой другой оси.

При этом можно за *основную* систему осей принять такую систему, при которой формулы (12.13) упрощаются. Именно, можно найти систему координатных осей, для которых центробежный момент инерции равен нулю. В самом деле, моменты инерции J_y и J_z всегда положительны как суммы положительных слагаемых, центробежный же момент

$$J_{yz} = \int\limits_F zy\, dF$$

может быть и положительным и отрицательным, так как слагаемые $zy\, dF$ могут быть разного знака в зависимости от знаков z и y для той или иной площадки. Значит, он может быть равен нулю (см. § 63, п. В).

Те оси, относительно которых центробежный момент инерции обращается в нуль, называются *главными осями* инерции. Если начало такой системы помещено в центре тяжести фигуры, то это бу-

дут *главные центральные оси*. Эти оси мы будем обозначать y_0 и z_0; для них

$$J_{y_0z_0}=0.$$

Найдем, под каким углом α_0 наклонены к центральным осям y и z (рис. 168) главные оси. В формуле перехода (12.14) от осей yz к осям y_1z_1 для центробежного момента инерции дадим углу α значение α_0; тогда оси y_1 и z_1 совпадут с главными, и центробежный момент инерции будет равен нулю:

$$J'_{yz\ \text{при}\ \alpha=\alpha_0}=J_{y_0z_0}=0,$$

или

$$J_{y_0z_0}=-\frac{1}{2}\sin 2\alpha_0(J_z-J_y)+J_{yz}\cos 2\alpha_0=0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0=\frac{2J_{yz}}{J_z-J_y}. \qquad (12.17)$$

Этому уравнению удовлетворяют два значения $2\alpha_0$, отличающиеся на 180°, или два значения α_0, отличающиеся на 90°. Таким образом, уравнение (12.17) дает нам положение *двух осей*, составляющих между собой прямой угол. Это и будут главные центральные оси y_0 и z_0, для которых $J_{y_0z_0}=0$.

Пользуясь формулой (12.17), можно по известным J_y, J_z и J_{yz} получить формулы для главных моментов инерции J_{y_0} и J_{z_0}. Для этого опять воспользуемся формулами (12.13); они дадут нам значения J_{y_0} и J_{z_0}, если вместо α подставить α_0:

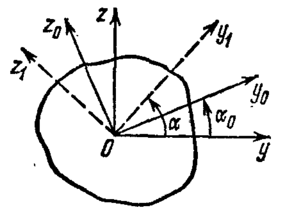


Рис. 168.

$$\left.\begin{aligned}J_{y_0}&=J_y\cos^2\alpha_0+J_z\sin^2\alpha_0-J_{yz}\sin 2\alpha_0,\\ J_{z_0}&=J_y\sin^2\alpha_0+J_z\cos^2\alpha_0+J_{yz}\sin 2\alpha_0.\end{aligned}\right\} \qquad (12.18)$$

Этими формулами вместе с формулой (12.17) можно пользоваться при решении задач. В § 70 будет показано, что одним из главных моментов инерции является $J_{\max}$, другим $J_{\min}$.

Формулы (12.18) можно преобразовать к виду, свободному от значения α_0. Выражая $\cos^2\alpha_0$ и $\sin^2\alpha_0$ через $\cos 2\alpha_0$ и подставляя их значения в первую формулу (12.18), получим, делая одновременно замену J_{yz} из формулы (12.17):

$$J_{y_0}=\frac{J_y+J_z}{2}+\frac{J_y-J_z}{2}\cos 2\alpha_0+\frac{J_y-J_z}{2}\,\frac{\sin 2\alpha_0}{\cos 2\alpha_0}=$$

$$=\frac{J_y+J_z}{2}+\frac{J_y-J_z}{2}\,\frac{1}{\cos 2\alpha_0}.$$

Заменяя здесь из формулы (12.17) дробь $\frac{1}{\cos 2\alpha_0}$ на $\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha_0}=$ $=\pm\sqrt{1+\frac{(2J_{yz})^2}{(J_y-J_z)^2}}$, получаем

$$J_{\frac{\max}{\min}}=\frac{J_y+J_z}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(J_y-J_z)^2+4(J_{yz})^2}. \tag{12.18'}$$

К этой же формуле можно прийти, делая подобное же преобразование второй формулы (12.18).

За основную систему центральных осей, от которых можно переходить к любой другой, можно взять не Oy и Oz, а главные оси Oy_0 и Oz_0; тогда в формулах вида (12.13) не будет фигурировать центробежный момент инерции ($J_{y_0z_0}=0$). Обозначим угол, составленный осью y_1 (рис. 169) с главной осью Oy_0, через β. Для вычисления J'_y, J'_z и J'_{yz}, переходя от осей y_0 и z_0, нужно в формулах (12.13) и (12.14) заменить угол α через β, а J_y, J_z и J_{yz} — через J_{y_0}, J_{z_0} и $J_{y_0z_0}=0$. В результате получаем

$$\left.\begin{aligned} J'_y&=J_{y_0}\cos^2\beta+J_{z_0}\sin^2\beta,\\ J'_z&=J_{y_0}\sin^2\beta+J_{z_0}\cos^2\beta,\\ J'_{yz}&=\frac{J_{y_0}-J_{z_0}}{2}\sin 2\beta. \end{aligned}\right\} \tag{12.19}$$

По своему виду эти формулы совершенно аналогичны формулам для нормальных σ_α и касательных τ_α напряжений (6.5) и (6.6) по двум взаимно перпендикулярным площадкам в элементе, подвергающемся растяжению в двух направлениях (§ 30). Поэтому мы и здесь можем применить построение круга Мора; следует лишь по горизонтальной оси откладывать экваториальные моменты инерции, по вертикальной — центробежные. Построение круга и анализ его рекомендуется сделать самостоятельно. Укажем лишь формулу, позволяющую из двух значений угла α_0 (формула (12.17)) выделить то, которое соответствует отклонению первой главной оси (дающей max J) от начального положения оси y:

$$\operatorname{tg}\alpha_0=\frac{J_{zy}}{J_{\min}-J_y}. \tag{12.17'}$$

Эта формула полностью аналогична формуле (6.11).

Теперь можно окончательно сформулировать, что надо сделать, чтобы получить возможность простейшим образом вычислять момент инерции фигуры относительно любой оси. Необходимо через центр тяжести фигуры провести оси Oy и Oz так, чтобы, разбивая фигуру на простейшие части, мы могли легко вычислить моменты J_y, J_z и J_{zy}. После этого следует найти по формуле (12.17) величину угла α_0 и вычислить главные центральные моменты инерции J_{y_0} и J_{z_0} по формулам (12.18).

Далее, можно найти момент инерции относительно любой центральной оси Oy_1 (рис. 169), наклоненной к Oy_0 под углом β, по формуле (12.19)

$$J'_y = J_{y_0}\cos^2\beta + J_{z_0}\sin^2\beta.$$

Зная же центральный момент инерции J'_y, можно сейчас же найти момент инерции относительно любой параллельной ей оси y_2, проходящей на расстоянии a (рис. 169 от центра тяжести по формуле (12.7)

$$J''_y = J'_y + a^2F.$$

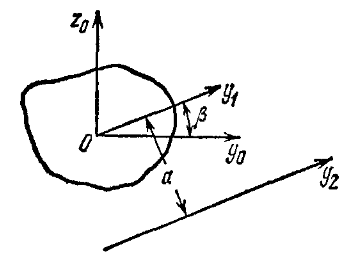


Рис. 169.

Во многих случаях удается сразу провести главные оси фигуры; если фигура имеет ось симметрии, то это и будет одна из главных осей. В самом деле, при выводе формулы $\sigma = Mz/J$ мы уже имели дело с интегралом $\int_F yz\,dF$, представляющим собой центробежный момент инерции сечения относительно осей y и z; было доказано, что если ось Oz является осью симметрии, этот интеграл обращается в нуль.

Стало быть, в данном случае оси Oy и Oz являются *главными* центральными осями инерции сечения. Таким образом, *ось симметрии* — всегда *главная* центральная ось; вторая главная центральная ось проходит через центр тяжести перпендикулярно к оси симметрии.

§ 70. Наибольшее и наименьшее значения центральных моментов инерции

Как мы уже знаем, центральные моменты инерции являются *наименьшими* из всех моментов относительно ряда параллельных осей.

Найдем теперь крайние значения (максимум и минимум) для центральных моментов инерции. Возьмем ось y_1 и начнем ее вращать, т. е. менять угол α; при этом будет изменяться величина

$$J'_y = J_y\cos^2\alpha + J_z\sin^2\alpha - J_{yz}\sin 2\alpha.$$

Наибольшее и наименьшее значения этого момента инерции соответствуют углу α_1, при котором производная $\frac{dJ'_y}{d\alpha}$ обращается в нуль. Эта производная равна

$$\frac{dJ'_y}{d\alpha} = -2J_y\cos\alpha\sin\alpha + 2J_z\sin\alpha\cos\alpha - 2J_{yz}\cos 2\alpha.$$

Подставляя в написанное выражение $\alpha=\alpha_1$ и приравнивая его нулю, получаем

$$(J_z-J_y)\sin 2\alpha_1-2J_{yz}\cos 2\alpha_1=0;$$

отсюда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1=\frac{2J_{yz}}{J_z-J_y}=\operatorname{tg} 2\alpha_0 \qquad (\text{см. } (12.17)).$$

Таким образом, осями с *наибольшим* и *наименьшим* центральными моментами инерции будут *главные* центральные оси. Так как при повороте центральных осей сумма соответствующих моментов инерции не меняется, то

$$J'_y+J'_z=J_y+J_z=J_p.$$

Когда один из центральных моментов инерции достигает *наибольшего* значения, другой оказывается *минимальным*, т. е. если

$$J_{y_0}=J_{\max}, \quad \text{то} \quad J_{z_0}=J_{\min}.$$

Следовательно, *главные центральные оси инерции — это такие взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр тяжести сечения, относительно которых центробежный момент инерции обращается в нуль, а осевые моменты инерции имеют наибольшее и наименьшее значения.*

В дальнейшем будем обозначать главные оси инерции y и z и главные моменты инерции сечения J_y и J_z. Осью x по-прежнему будет обозначаться ось балки по ее длине.

§ 71. Распространение формулы для вычисления нормальных напряжений на случай несимметричного сечения балки

Пользуясь равенством нулю центробежного момента инерции относительно главных осей, можно показать, что формулы § 63 применимы при известных условиях и к *несимметричным* сечениям.

При выводе формулы для нормальных напряжений (§ 63) введенное нами ограничение, что балка *симметрична* относительно плоскости действия внешних сил xz, понадобилось нам прежде всего для: 1) установления перпендикулярности нейтральной оси y к плоскости zx, 2) доказательства того, что сумма моментов усилий dN относительно оси z равна нулю:

$$\sum M_z=0; \quad \frac{E}{\rho}\int_F xy\,dF=0; \quad \int_F zy\,dF=0. \qquad (11.6)$$

Но условия перпендикулярности осей z и y и равенства нулю $\int_F zy\,dF$ могут быть выполнены и для несимметричного сечения бал-

ки; для этого достаточно, чтобы ось z, лежащая в плоскости действия сил, и нейтральная ось y были *главными центральными* осями инерции поперечного сечения балки. Тогда и условие *перпендикулярности* соблюдается, и интеграл $\int\limits_F zy\,dF$, как центробежный момент инерции сечения относительно главных осей, снова будет *равен нулю*.

Значит, вместо условия совпадения плоскости внешних сил с плоскостью симметрии сечений балки можно ввести другое: чтобы *плоскость действия внешних сил* совпадала с *одной из двух плоскостей*, содержащих главные оси инерции поперечных сечений. Эти две плоскости в балке называются *главными плоскостями инерции*.

Тогда нейтральной осью будет вторая главная ось, перпендикулярная к плоскости внешних сил, и условие $\int\limits_F zy\,dF = 0$ будет автоматически удовлетворено.

Так как при *всякой форме* поперечного сечения балки мы можем найти главные центральные оси инерции, то для балки *любого поперечного сечения* можно пользоваться выведенными формулами (11.9) и (11.13)

$$\sigma = \frac{Mz}{J} \quad \text{и} \quad \sigma_{max} = \frac{\max M}{W}$$

при условии, что *внешние силы лежат в одной из главных плоскостей инерции балки*; J и W берутся относительно другой главной оси, перпендикулярной к плоскости действия внешних сил и являющейся нейтральной осью.

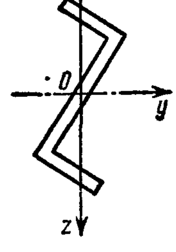


Рис. 170.

Как пример, можно указать балку зетового сечения (рис. 170) с главными осями z и y. Приведенные выше формулы применимы к ней, если внешние силы будут лежать в плоскости z или y; нейтральной осью в первом случае будет y, во втором z. Так как нейтральные оси сечений и в этом случае перпендикулярны плоскости действия внешних сил, то ось балки при деформации будет оставаться в этой плоскости. Таким образом, *расположение внешних сил в одной из главных плоскостей инерции балки и будет общим случаем плоского изгиба*.

Балки зетового профиля нередко применяются в качестве прогонов, укладываемых поверх стропильных ферм. Под действием вертикального давления, передающегося от веса кровли и снега, прогоны будут изгибаться в плоскости действия внешних сил (при соответствующем угле наклона крыши), т. е. в условиях плоского изгиба.

Надо заметить, что в некоторых случаях в балках несимметричного (относительно оси, лежащей в плоскости действия сил) сечения появляется дополнительная система нормальных и касательных напряжений, связанная с добавочным кручением балки.

§ 72. Радиусы инерции. Понятие об эллипсе инерции

Введем понятие об еще одной геометрической характеристике сечения, связывающей момент инерции фигуры J с ее площадью F формулами

$$J_y = i_y^2 F \quad \text{и} \quad J_z = i_z^2 F. \tag{12.20}$$

Величины i_y и i_z называются *радиусами инерции* и соответственно равны

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} \quad \text{и} \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}. \tag{12.21}$$

Если J_y и J_z— главные моменты инерции, то i_y и i_z— *главные радиусы инерции.* Для прямоугольного сечения, например, на основании формул (12.1) и (12.3):

$$i_y = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}}; \quad i_z = \sqrt{\frac{hb^3}{12bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}}. \tag{12.22}$$

Для круга по формуле (12.4) получим

$$i_y = i_z = \sqrt{\frac{\pi r^4}{4\pi r^2}} = \frac{r}{2}. \tag{12.23}$$

Для прокатных профилей значения главных радиусов инерции приводятся в таблицах нормального сортамента (см. приложение).

Эллипс, построенный на главных радиусах инерции как на полуосях, называется эллипсом инерции. Для его построения надо отложить от центра тяжести сечения радиусы инерции: i_y— перпендикулярно к центральной оси y, т. е. вдоль оси z, а i_z— перпендикулярно к оси z (вдоль оси y). Если $J_y = J_{max}$, то длинная ось эллипса, равная $2\,i_y$, расположится вдоль оси z (рис. 171).

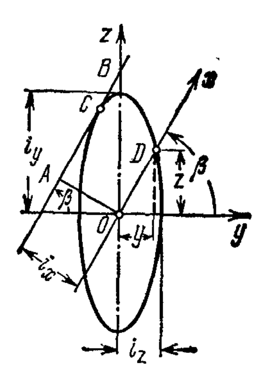


Рис. 171.

Эллипс инерции обладает следующим замечательным свойством: радиус инерции относительно произвольной оси x, проведенной через центр тяжести сечения, равен длине перпендикуляра, опущенного из центра эллипса на касательную к нему, параллельную этой оси. Следовательно, при помощи эллипса инерции можно графически найти радиус инерции i_x для любой оси x, составляющей угол β с главной осью y; для этого достаточно провести касательную к эллипсу, параллельную оси x, и измерить расстояние i_x от этой оси до касательной (рис. 171). Зная измеренную величину радиуса инерции i_x,

вычисляем момент инерции относительно оси x по формуле

$$J_x = i_x^2 F. \qquad (12.24)$$

Для некоторых довольно часто встречающихся в инженерной практике сечений, например, круга, квадрата и многих других (рис. 172), моменты инерции относительно обеих главных осей инерции одинаковы. Следовательно, равны между собой и главные радиусы инерции ($i_y = i_z$), вследствие чего эллипс инерции обращается в круг инерции. Для таких сечений любая центральная ось является главной центральной осью инерции, что видно также из формулы

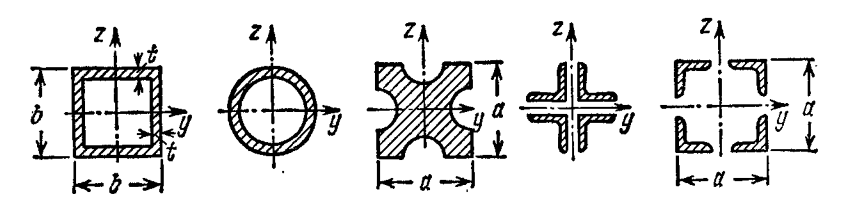


Рис. 172.

(12.19) для центробежного момента инерции, обращающегося в нуль при любом значении угла β, если $J_y = J_z$ (см. § 69).

Стержни такого профиля одинаково сопротивляются деформации изгиба в любом направленин, что особенно важно при продольном сжатии длинных стержней (глава XXVII).

§ 73. Проверка прочности, подбор сечения и определение допускаемой нагрузки при изгибе

Полученные в главе XI формулы (11.15), (11.16), (11.17), выражающие условие прочности при изгибе, в сочетании с умением вычислять моменты инерции и моменты сопротивления сечений (глава XII), позволяют решать основные задачи сопротивления материалов при изгибе (§ 4), а именно:

а) при заданных нагрузках и размерах балки проверить ее прочность на изгиб;

б) при известных нагрузках и продольных размерах балки определить необходимые размеры ее поперечного сечения;

в) при известных продольных и поперечных размерах балки определить для нее величину допускаемой нагрузки.

Во всех случаях величину допускаемых напряжений при изгибе считаем заданной.

Применение условий прочности для решения перечисленных задач покажем на примерах.

А. Пусть необходимо *проверить прочность* стального стержня прямоугольного сечения 60×100 *мм*, ослабленного двумя симметрично расположенными отверстиями диаметром $d=10$ *мм* (рис. 173), если изгибающий момент в опасном сечении $M_{max}=1{,}3$ *Тм*, а допускаемое напряжение $[\sigma]=1600$ *кГ/см*^{2}.

Подсчитаем момент инерции сечения относительно нейтральной оси y:

$$J_y=\frac{bh^3}{12}-2\left(bd\,a^2+\frac{bd^3}{12}\right)=\frac{6\cdot10^3}{12}-2\left(6\cdot1\cdot3^2+\frac{6\cdot1^3}{12}\right)=391\ см^4.$$

Момент сопротивления сечения

$$W_y=\frac{J_y}{z_{max}}=\frac{391}{5}=78{,}2\ см^3.$$

Наибольшие напряжения в опасном сечении:

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W}=\frac{1{,}3\cdot10^5}{78{,}5}=1660\ кГ/см^2>1600\ кГ/см^2.$$

Перенапряжение $\dfrac{1660-1600}{1600}\cdot100=3{,}75\%$ допустимо.

Б. Рассмотрим также *пример подбора сечения*. Пусть балка двутаврового сечения пролетом $l=4$ *м*, шарнирно опертая по концам, нагружена по всей длине равномерно распределенной нагрузкой $q=2$ *Т/м* и сосредоточенной силой $P=6$ *Т*, приложенной посредине пролета. Необходимо подобрать сечение балки при допускаемом напряжении $[\sigma]=1600$ *кГ/см*^{2}.

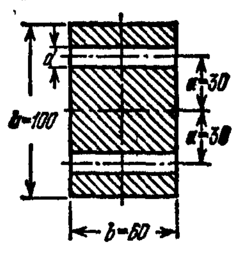


Рис. 173.

Величину наибольшего изгибающего момента посредине пролета подсчитаем, пользуясь методом сложения действия сил (§ 61).

Изгибающий момент от сплошной нагрузки q по формуле (10.11)

$$M_q=\frac{ql^2}{8}=\frac{2\cdot4^2}{8}=4\ Тм.$$

От действия сосредоточенной силы P (10.10′)

$$M_P=\frac{Pl}{4}=\frac{6{,}4}{4}=6\ Тм.$$

Наибольший суммарный изгибающий момент в опасном сечении:

$$M_{max}=M_q+M_P=4+6=10\ Тм=10\cdot10^5\ кГ\cdot см.$$

По условию прочности (11.16) необходимый момент сопротивления сечения должен быть не меньше

$$W\geqslant\frac{M_{max}}{[\sigma]}=\frac{10\cdot10^5}{1600}=625\ см^3.$$

Находим по сортаменту (см. приложение) номер профиля, удовлетворяющий этому условию: двутавр № 33 с моментом сопротивления $W=597$ *см*^{3} (перенапряжение около 5% допустимо).

В. Покажем еще на примере порядок определения *допускаемой* равномерно распределенной *нагрузки*, которую можно безопасно приложить к подкрановой балке пролетом $l=10$ *м*, шарнирно опертой по концам. Балка представляет собой двутавр № 60, усиленный двумя приваренными к нему листами (полками) сечением 200×20 *мм* (рис. 174). Допускаемое напряжение принято $[\sigma]=1400$ *кГ/см*^{2}.

Момент инерции сечения найдем как сумму моментов инерции относительно нейтральной оси двутавра (по сортаменту) и двух полок — по формуле перехода к параллельным осям (12.7)

$$J = J_{\rm I} + 2\left[\frac{bt^3}{12} + bt\left(\frac{h}{2}+\frac{t}{2}\right)^2\right] =$$

$$= 76\,806 + 2\left[\frac{20\cdot 2^3}{12} + 20\cdot 2\cdot(30+1)^2\right] \approx 153\,700 \text{ см}^4.$$

Момент сопротивления сечения

$$W = \frac{J_y}{z_{\max}} = \frac{153\,700}{32} = 4820 \text{ см}^3.$$

По условию прочности (11.16) наибольший изгибающий момент, равный $M_{\max} = ql^2/8$, не должен превышать

$$M_{\max} \leqslant [\sigma]\, W,$$

откуда

$$[q] \leqslant \frac{8\,[\sigma]\,W}{l^2} = \frac{8\cdot 1400\cdot 4820}{10^2\cdot 100^2} \approx 54 \text{ кГ/см},$$

или 5400 *кГ/м*.

Если учесть собственный вес балки, то следует вычесть погонную нагрузку от веса двух листов $2\cdot 20\cdot 2\cdot 100\cdot 0{,}00785 = 63$ *кГ/м* и от веса двутавра (по сортаменту) 108 *кГ/м*, а всего $q_0 = 63 + 108 = 171$ *кГ/м*.

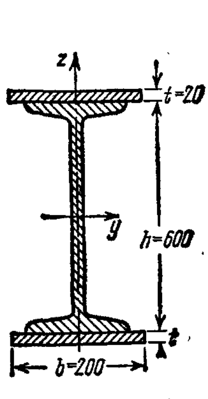




Рис. 174.

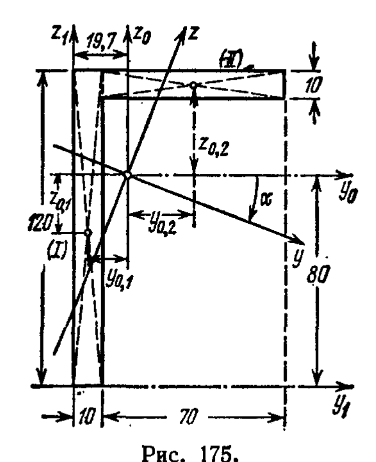


Рис. 175.

Таким образом, балку можно загрузить полезной нагрузкой

$$q = [q] - q_0 = 5400 - 171 \approx 5230 \text{ кГ/м}.$$

Г. И, наконец, рассмотрим *ход расчета балки* составного несимметричного сечения. Пусть необходимо определить величину допускаемого изгибающего момента для балки, защемленной одним концом в стену, если пара сил расположена на другом конце в главной плоскости инерции. Размеры сечения в *мм* показаны на рис. 175. Пролет балки $l = 0{,}6$ *м*. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 1600$ *кГ/см²*.

Прежде всего необходнмо найти положение центра тяжести сечення. Для этого выбираем произвольную систему координатных осей y_1z_1; удобно, чтобы вся фигура лежала в положительном квадранте. Расстояния центра тяжести сечения до этнх осей найдутся по формулам

$$y_c=\frac{S_{z_1}}{F} \text{ и } z_c=\frac{S_{y_1}}{F},$$

где S_{z_1} и S_{y_1} — статические моменты площади относнтельно осей z_1 и y_1.

Для подсчета статических моментов разобьем площадь нашей фигуры на 2 прямоугольника — вертикальный I и горизонтальный II. Площадь фигуры равна $F=1\cdot 12+7\cdot 1=19{,}0$ *см*². Статические моменты[1]):

$$S_{z_1}=F_1y_{1,1}+F_2y_{1,2}=12\cdot 0{,}5+7\,(1+3{,}5)=37{,}5 \text{ см}^3,$$
$$S_{y_1}=F_1z_{1,1}+F_2z_{1,2}=12\cdot 6{,}0+7\cdot 11{,}5=152{,}5 \text{ см}^3.$$

Коордннаты центра тяжести:

$$y_c=\frac{37{,}5}{19}=1{,}97 \text{ см}\approx 2{,}0 \text{ см};\quad z_c\approx\frac{152{,}5}{19}\approx 8{,}00 \text{ см}.$$

Теперь наметим снстему центральных осей y_0 и z_0. Проще всего эти оси направить параллельно сторонам фигуры, что облегчит вычнсление моментов инерции площади сечения относительно этих осей.

Моменты инерции отдельных прямоугольников отиосительно осей y_0 и z_0 вычисляются по формулам перехода к параллельным осям (12.7) н (12.8), а собственные моменты инерцнн прямоугольников по формулам (12.1).

Таблица 12

Вычисление моментов инерции

Номера частей	Площади частей	Координаты площадок в *см*		Моменты инерции площадей в *см*⁴							
				$J_y^0=\frac{bh^3}{12}+Fz_0^2$			$J_z^0=\frac{hb^3}{12}+Fy_0^2$			$J_{yz}^0=Fy_0z_0$	
		y_0	z_0	$\frac{bh^3}{12}$	Fz_0^2	J_y^0	$\frac{hb^3}{12}$	Fy_0^2	J_z^0	±	J_{yz}^0
1	12	−1,5	−2,0	$\frac{1\cdot 12^3}{12}=144$	$12\cdot 2^2=48$	192	$\frac{12\cdot 1^3}{12}=1{,}0$	$12\cdot 1{,}5^2=27$	28	+	$12\cdot 1{,}5\times 2{,}0=36$
2	7	2,5	3,5	$\frac{7\cdot 1^3}{12}=0{,}6$	$7\cdot 3{,}5^2=85{,}6$	86	$\frac{1\cdot 7^3}{12}=28{,}6$	$7\cdot 2{,}5^2=43{,}8$	72	+	$7\cdot 2{,}5\times 3{,}5=61$
Σ	19			144,6	133,6	278	29,6	70,8	100	+	97

[1]) Здесь индексы при координатах площадок указывают: первый — ось (y_1 или z_1), а второй — номер площадки.

Вычисления ведем по схеме, показанной в таблице 12 (см. рис. 175), пользуясь которой можно найти угол наклона главных осей с осью Oy_0:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{yz}^0}{J_z^0 - J_y^0} = \frac{2\cdot 97}{100-278} = -1{,}09,$$

$$2\alpha_0' = -47°40' \quad \text{и} \quad \alpha_0' = -23°50'.$$

Знак минус показывает, что угол α_0' следует отложить по часовой стрелке

$$\sin\alpha_0' = -0{,}404; \quad \cos\alpha_0' = 0{,}915; \quad \sin 2\alpha_0' = -0{,}74; \quad \cos 2\alpha_0' = 0{,}673.$$

Главные моменты инерции будут

$$J_y = J_y^0\cos^2\alpha_0 + J_z^0\sin^2\alpha_0 - J_{yz}^0\sin 2\alpha_0 =$$
$$= 278\cdot 0{,}915^2 + 100\cdot 0{,}404^2 + 97\cdot 0{,}74 = 320 \text{ см}^4.$$
$$J_z = J_y^0\sin^2\alpha_0 + J_z^0\cos^2\alpha_0 + J_{yz}^0\sin 2\alpha_0 =$$
$$= 278\cdot 0{,}404^2 + 100\cdot 0{,}915^2 - 97\cdot 0{,}74 = 58 \text{ см}^2.$$

Произведем проверку правильности вычислений

1) $J_y + J_z = 320 + 58 = 378$ см$^4 = J_y^0 + J_z^0 = 278 + 100 = 378$ см^4;

2) $J_{yz} = \frac{1}{2}(J_y^0 - J_z^0)\sin 2\alpha + J_{yz}^0\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}(278-100)\cdot 0{,}74 + 97\cdot 0{,}673 = 0.$

Расчет показал, что $J_y = J_{max}$, а $J_z = J_{min}$. Следовательно, изгибающую пару выгоднее расположить в плоскости Oz так, чтобы ось Oy была нейтральной осью (рис. 176).

Теперь найдем момент сопротивления сечения. Для этого необходимо найти расстояние z_{max} от нейтральной оси Oy до наиболее удаленного волокна. Проще всего это сделать графически, вычертив в масштабе сечение и изобразив на нем главные оси. Для нашего сечения измеренное расстояние оказалось равным $z_{max} = 8{,}1$ см [1]). Момент сопротивления сечения относительно оси y, следовательно, равен

$$W_y = \frac{J_y}{z_{max}} = \frac{320}{8{,}1} = 39{,}5 \text{ см}^3.$$

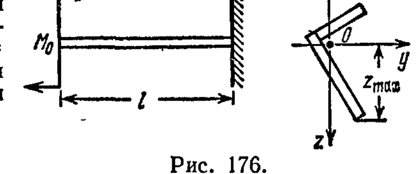


Рис. 176.

Из условия прочности [2]) находим величину допускаемого изгибающего момента

$$\sigma = \frac{\max M}{W_y} \leqslant [\sigma],$$

откуда

$$\max [M] \leqslant [\sigma]\cdot W_y;$$
$$M_0 = \max[M] \leqslant 1600\cdot 39{,}5 = 63\,200 \text{ кГ см} \approx 0{,}63 \text{ Тм}.$$

Если пару сил расположить в плоскости Oy, то при расстоянии от оси z до крайнего волокна $y_{max} = 4{,}12$ см момент сопротивления сечения был бы равен $W_z = J_z/y_{max} = 58/4{,}12 = 14{,}1$ см^3, и мы могли бы безопасно приложить нагрузку

---

[1]) Для аналитического определения z_{max} или y_{max} можно воспользоваться формулами (12.10).

[2]) В примере не учитываются дополнительные нормальные напряжения, возникающие в рассматриваемом случае вследствие стесненного кручения.

в виде пары с моментом

$$M_1^0 = \max [M_1] \leqslant 1600 \cdot 14{,}1 = 22\,560 \text{ кГсм} \approx 0{,}226 \text{ Тм},$$

что почти втрое меньше, чем при расположении пары в плоскости Oz.

Заметим также, что если пара будет расположена в какой-либо другой, не главной плоскости, например, параллельно полке уголка, то и изгиб в этом случае не будет плоским изгибом и условие прочности примет другой вид (§ 120).

Глава XIII

КАСАТЕЛЬНЫЕ И ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В БАЛКАХ

§ 74. Касательные напряжения в балке прямоугольного сечения

Рассмотрим в первую очередь вопрос о вычислении касательных напряжений по сечениям, перпендикулярным к оси балки в том случае, когда эти сечения имеют форму прямоугольника (рис. 177).

Пусть в сечении балки при изгибе возникает положительная поперечная сила Q. Относительно касательных напряжений τ в этом сечении сделаем следующие предположения:

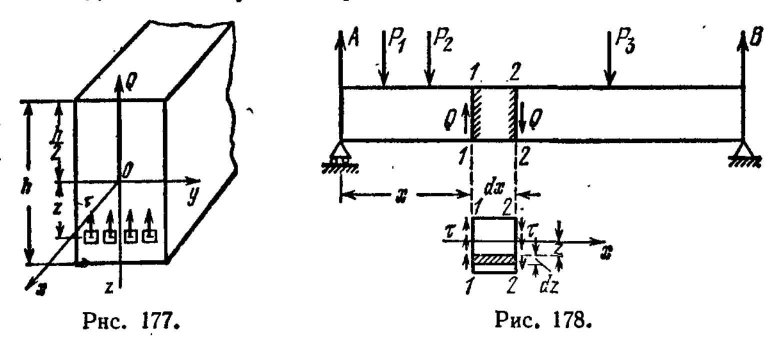


Рис. 177. Рис. 178.

1) направление всех касательных напряжений в сечении параллельно поперечной силе Q, которая является их равнодействующей;

2) касательные напряжения, действующие по площадкам, расположенным на одном и том же расстоянии z от нейтральной оси, равны между собой.

Оба эти предположения высказал Д. И. Журавский. Как показывает теория упругости, предположения эти практически вполне допустимы для балок прямоугольного сечения, если высота балки больше ее ширины.

Перейдем к вычислению величины касательных напряжений и выясним закон распределения их по высоте сечения.

Рассмотрим балку, загруженную несколькими силами (рис. 178). Выделим двумя сечениями 1—1 и 2—2 часть балки длиной dx. Бу-

дем считать, что по правой стороне выделенной части по сечению 2—2 будут действовать касательные напряжения τ, складывающиеся в поперечную силу Q, направленные *вниз*. Тогда на другой стороне по сечению 1—1 будут действовать касательные напряжения, направленные *вверх*, складывающиеся в поперечную силу Q. Величина обеих поперечных сил будет одинакова, что вполне справедливо при отсутствии на выделенном участке балки распределенной нагрузки. По сечениям 1—1 и 2—2 будут действовать также нормальные напряжения, которые мы здесь не показываем.

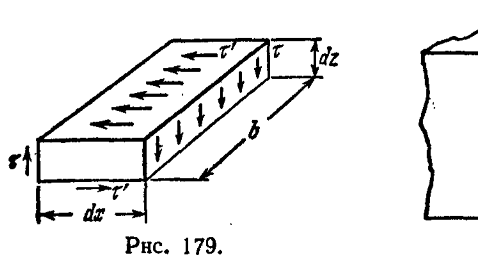


Рис. 179.

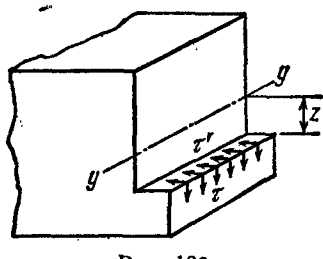


Рис. 180.

По свойству парности касательных напряжений (гл. VI, формула (6.8)) следует ожидать появления касательных напряжений и по площадкам, параллельным нейтральному слою. Поэтому, если на расстояниях z и $z+dz$ от нейтральной оси провести два горизонтальных сечения и, таким образом, выделить элемент с ребрами b, dx и dz (рис. 179), то по двум вертикальным граням элемента будут действовать касательные напряжения τ, а по двум горизонтальным граням — равные им по величине и противоположно направленные касательные напряжения τ'.

Так как продольные волокна балки при ее деформации не давят друг на друга, то по сечениям балки, параллельным нейтральному слою, нормальные напряжения возникать не будут.

Заменим теперь вычисление касательных напряжений τ по поперечному сечению балки вычислением равных им напряжений τ' по сечению, параллельному нейтральному слою (рис. 180).

На первый взгляд кажется странным появление касательных напряжений по плоскостям, параллельным нейтральному слою. Однако следующий пример пояснит это явление.

Представим себе балку, состоящую из двух одинаковых брусков прямоугольного сечения, положенных друг на друга (рис. 181, *а*): будем пренебрегать трением между ними. Предположим, что эта балка изгибается силой P, приложенной посредине пролета. Вид балки после искривления в сильно преувеличенном масштабе показан на рис. 181, *б*. Нижние волокна верхней балки A_1B_1 растянулись, а верхние волокна нижней балки A_2B_2 укоротились по сравнению со своей первоначальной длиной AB.

Если же балка является цельным брусом, то она изогнется так, как показано на рис. 181, *в*. Волокна AB окажутся в нейтральном слое и не изменят своей длины. Следовательно, при изгибе цельной балки от верхней половины балки на нижнюю и обратно по нейтральному слою будут передаваться касательные напряжения τ', удерживающие верхнюю и нижнюю половины балки от сдвига по нейтральному слою (рис. 181, *г*).

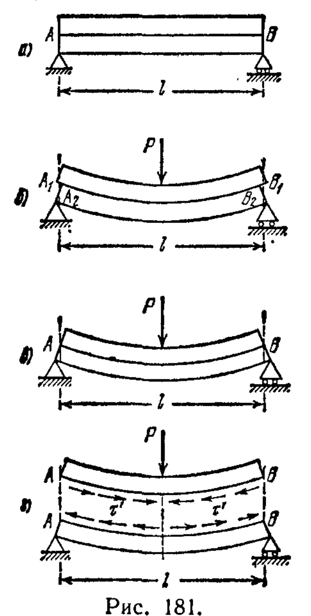


Рис. 181.

Покажем на рис. 182 часть фасада балки прямоугольного сечения, испытывающей плоский изгиб. Проведем два сечения *1—1* и *2—2* на расстоянии dx друг от друга. Проведем еще горизонтальное сечение на расстоянии z от нейтрального слоя.

Таким образом, из балки выделится элемент $ABCD$ размерами dx, $h/2—z$ и b. Вид этого элемента в аксонометрической проекции показан на рис. 182. Пусть изгибающий момент в сечении *1—1* равен M, а в смежном сечении *2—2* равен $M+dM$. Тогда по боковым граням элемента будут действовать нормальные напряжения σ — слева меньшие, справа бо́льшие. По горизонтальному сечению будут действовать касательные напряжения $\tau'=\tau$.

Касательные напряжения τ по сечениям *1—1* и *2—2* в условие равновесия выделенного элемента не войдут, так как мы используем

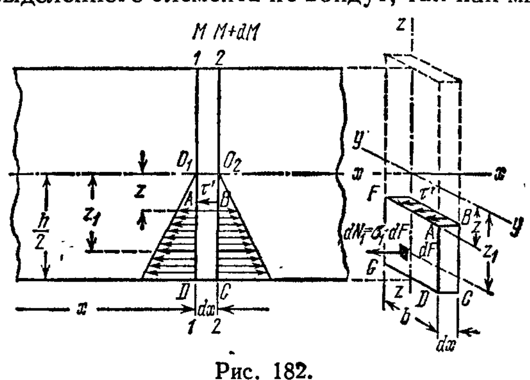


Рис. 182.

равенство нулю суммы проекций всех сил на ось балки; поэтому мы их на чертеже и не изображаем.

Для составления уравнений равновесия вычислим все силы, действующие на наш элемент, параллельные оси балки. Элементарное

касательное усилие dT по площадке $b\ dx$ будет равно

$$dT = \tau \cdot b \cdot dx.$$

Нормальные напряжения, действующие по боковой бесконечно малой площадке dF на уровне z_1 от нейтральной оси, будут равны

$$\sigma = \frac{Mz_1}{J}.$$

Усилие dN_1, приходящееся на эту площадку, будет равно

$$dN_1 = \frac{Mz_1}{J} dF.$$

На всю боковую грань AD будет действовать сила N_1 (рис. 183):

$$N_1 = \int_{F_1} \frac{Mz_1}{J} dF = \frac{M}{J} \int_{F_1} z_1 dF.$$

Интеграл $\int_{F_1} z_1 dF$ представляет собой *статический момент относительно нейтральной оси* y части площади сечения $GFAD$,

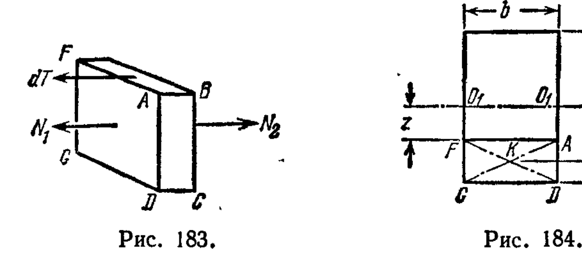


Рис. 183. Рис. 184.

расположенной от уровня z до края балки (рис. 184). Обозначим его S_y^0. Таким образом,

$$N_1 = \frac{MS_y^0}{J_y}. \tag{13.1}$$

Аналогично на грань BC нашего элемента действует сила

$$N_2 = \frac{(M + dM)\, S_y^0}{J_y}. \tag{13.2}$$

Разность нормальных усилий

$$N_2 - N_1 = \frac{dM \cdot S_y^0}{J_y}$$

уравновешивается при проектировании на ось Ox (рис. 183) касательным усилием dT. Отсюда

$$\tau = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{S_y^0}{J_y b}.$$

Но $\frac{dM}{dx}=Q$, поэтому

$$\tau=\frac{QS_y^0}{J_y b}, \qquad (13.3)$$

а значит, этой же формулой выражается и касательное напряжение на уровне z по сечению, перпендикулярному к оси балки.

Выведем формулу S_y^0 для случая балки прямоугольного сечения (рис. 184) высотой h и шириной b. Статический момент площади $GFAD$ относительно оси O_1O_1 будет равен величине этой площади, умноженной на расстояние z_k от ее центра тяжести до оси O_1O_1. Площадь $GFAD$ равна $b\left(\frac{h}{2}-z\right)$; расстояние z_k равно

$$z_k=\left(\frac{h}{2}-\frac{\frac{h}{2}-z}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+z\right).$$

Тогда

$$S_y^0=b\left(\frac{h}{2}-z\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+z\right)=\frac{bh^2}{8}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right). \qquad (13.4)$$

При вычислении статического момента части площади сечения безразлично, брать ли ту часть площади сечения, что расположена ниже уровня z, или бо́льшую, так как по абсолютному значению оба статических момента будут равны. Берут обычно статический момент той части площади, вычисление которого более просто. Так как для прямоугольника $J_y=bh^3/12$, то формула (13.3) принимает вид

$$\tau=\frac{Qbh^2\cdot 12}{bbh^3\cdot 8}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{Q}{bh}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right). \qquad (13.5)$$

Таким образом, величина касательного напряжения τ меняется по высоте прямоугольного сечения по закону *параболы*. У верхнего и нижнего краев сечения при $z=\pm h/2$ касательное напряжеиие τ обращается в нуль, что находится в строгом соответствии с законом парности касательных напряжений. Максимума оно достигает в точках на нейтральной оси (там, где нормальное напряжение равно нулю) при $z=0$ и притом в сечении, где $Q(x)=Q_{max}$:

$$\tau_{max}=\frac{3}{2}\cdot\frac{Q_{max}}{bh}. \qquad (13.6)$$

Таким образом, *наибольшее* касательное напряжение при прямоугольном сечении будет в $1\,^1/_2$ раза больше *среднего* значения этого напряжения. На рис. 185 изображена картина распределения касательных напряжений при положительной поперечной силе.

Наличие касательных напряжений в балке несколько искажает принятую нами раньше схему деформации балки. Мы считали, что под действием изгибающих моментов поперечные сечения, оставаясь

плоскими, поворачиваются (рис. 186, *а*). Под действием касательных напряжений элементы материала между двумя сечениями перекашиваются; этот перекос, в соответствии с изменением величины касательных напряжений, возрастает от краев балки к нейтральной оси. Поэтому сечения искривляются (рис. 186, *б*). Однако это искривление почти не отражается на продольных деформациях волокон, что позволяет пользоваться формулой $\sigma = Mz/J$ и при наличии поперечной силы.

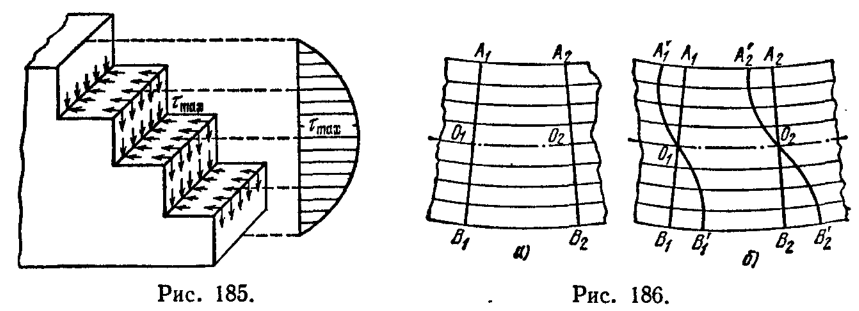


Рис. 185. Рис. 186.

Поэтому кроме проверки прочности материала по наибольшим нормальным напряжениям (11.15)

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} \leqslant [\sigma]$$

производится проверка прочности материала и по наибольшим касательным напряжениям

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_{max}}{J_y b} \leqslant [\tau]. \qquad (13.7)$$

Для того чтобы получить представление о *порядке* величины τ в балках прямоугольного сечения, рассмотрим числовой пример.

Найдем наибольшие нормальные и касательные напряжения для балки прямоугольного сечения при следующих данных: балка лежит на двух опорах и по всей длине $l=4$ *м* имеет равномерную нагрузку при $q=1{,}2$ *Т/м*; $M_{max}=2{,}4$ *Тм*; $Q_{max}=2{,}4$ *Т*; $h=27$ *см*; $b=18$ *см*; $[\sigma]=110$ *кГ/см*²; $[\tau]=22$ *кГ/см*².

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{240\,000 \cdot 6}{18 \cdot 27^2} = 109{,}5 \text{ кГ/см}^2 < 110 \text{ кГ/см}^2,$$

$$\tau_{max} = \frac{3Q_{max}}{2bh} = \frac{3 \cdot 2400}{2 \cdot 27 \cdot 18} = 7{,}5 \text{ кГ/см}^2 < 22 \text{ кГ/см}^2.$$

Балка прямоугольного сечения, подобранная при нормальных напряжениях, равных допускаемым, имеет большое недонапряжение по касательным.

Однако на практике может встретиться и обратное явление; оно имеет место в случае, когда при большой поперечной силе изгибающий момент невелик. В этих случаях и при прямоугольном сечении величина касательных напряжений может оказаться решающей для определения размеров балки.

Формула касательных напряжений в балке прямоугольного сечения впервые была выведена русским инженером Д. И. Журавским при проектировании им

деревянных мостов для железной дороги Петербург — Москва в 1855 г. Журавский воспользовался несколько иным и более трудным приемом для получения этой формулы, без применения зависимости $\frac{dM}{dx} = Q$.

§ 75. Касательные напряжения в балке двутаврового сечения

Так как сечения двутавровых и тавровых балок можно рассматривать как составленные из прямоугольников, то с известным приближением можно распространить на них теорию, изложенную в предыдущем параграфе. Таким образом, касательные напряжения в точке на расстоянии z от нейтральной оси для двутаврового сечения (рис. 187) выражаются также формулой

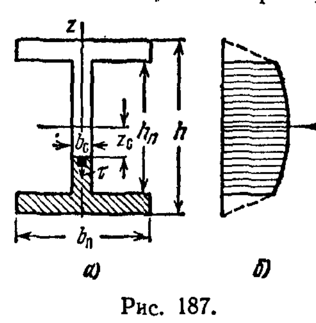


Рис. 187.

$$\tau = \frac{QS_y^0}{J_y b(z)}. \qquad (13.3)$$

Здесь S_y^0 — по-прежнему статический момент относительно нейтральной оси y части площади сечения между уровнем z и краем балки. Что касается величины $b(z)$ — ширины сечения, то ей в данном случае приписан значок z; это означает, что в знаменатель формулы (13.3) следует подставлять ширину сечения на уровне z. Как видно из вывода формулы (13.3), велнчина b входила множителем в слагаемое $\tau b\,dx$, т. е. была поперечным размером площадки, по которой действовало напряжение τ'; таким образом, величина b была шириной балки на уровне z. Поэтому при применении формулы (13.3) к двутавровому сечению следует, вычисляя касательные напряжения на площадках, находящихся в пределах стенки, вместо $b(z)$ подставлять толщину стенки $b_с$. Статический момент S_y^0 нужно вычислять как сумму статических моментов двух прямоугольников, заштрихованных на рис. 187, *а*. Если произвести вычисления, то получим

$$\tau_с = \frac{Q}{8b_с J_y}\left[b_п h^2\left(1 - \frac{h_п^2}{h^2}\right) + b_с h_п^2\left(1 - \frac{4z_с^2}{h_п^2}\right)\right]. \qquad (13.8)$$

Как видно из этой формулы, касательные напряжения по высоте стенки меняются по параболическому закону (рис. 187, *б*), достигая наибольшей величины на нейтральной оси сечения.

Что же касается вычисления касательных напряжений на площадках, расположенных в пределах полок двутавра, то пользоваться формулой (13.3) нельзя, так как эти напряжения далеко не одинаковы по ширине полки. На площадках вблизи оси z можно предпо-

ложить, что они меняются примерно по закону, определенному пунктирными кривыми на рис. 187, *б*. На площадках же, расположенных в остальной части полок, т. е. почти по всей их ширине, из-за условий на поверхности полок и в силу закона о парности касательных напряжений, они не могут иметь большого значения, изменяясь примерно так, как показано на рис. 188.

Зная теперь законы распределения и нормальных, и касательных напряжений по высоте двутаврового сечения, можно сделать следующее заключение о характере работы двутавра.

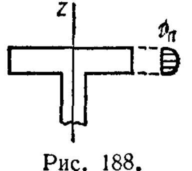


Рис. 188.

Полки двутавра, находясь на значительном расстоянии от нейтральной оси, всей своей площадью воспринимают нормальные напряжения, имеющие наибольшее или близкое к нему значение. Касательные напряжения в полках двутавра ничтожны.

В стенке двутавра по мере приближения к нейтральной оси нормальные напряжения стремятся к нулю. Величина статического момента S_y^0 при различных значениях z в пределах стенки изменяется мало. Поэтому касательные напряжения по всей высоте стенки достаточно велики (см. кривую рис. 187, *b*). Короче можно сказать: полки двутавра воспринимают нормальные напряжения, а стенка — касательные.

Проверим на касательные напряжения балку, испытывающую действие поперечной силы $Q=2{,}4\ T$, приняв допускаемое напряжение на срез равным 1000 $кГ/см^2$. Схема профиля двутавра показана на рис. 189. Пользуясь сортаментом, находим $J=1290\ см^4$. Статический момент полусечения $S_{max}=81{,}4\ см^3=S_3$. Статический момент для вычисления напряжений в точке 2 можно определить вычитанием из S_{max} статического момента половины стенки:

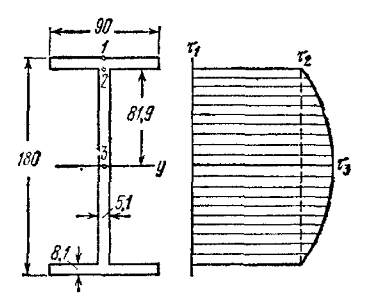


Рис. 189.

$$S_2=81{,}4-0{,}5\cdot 0{,}51\cdot 8{,}19^2=$$

$$=81{,}4-17{,}1=64{,}3\ см^3.$$

Касательные напряжения:

$$\tau_1=0,\quad \tau_2=\frac{2400\cdot 64{,}3}{1290\cdot 0{,}51}=236\ кГ/см^2,$$

$$\tau_3=\frac{2400\cdot 81{,}4}{1290\cdot 0{,}51}=297\ кГ/см^2.$$

График распределения касательных напряжений по высоте двутавра показан на рис. 189. Как видно, наибольшее касательное напряжение значительно ниже допускаемого, что объясняется большой толщиной стенки прокатного профиля. Для составных балок (см. § 80), клепаных и сварных, можно добиться значительного улучшения использования материала.

Определим ту долю поперечной силы, которая воспринимается стенкой двутавра. Для этого умножим ординаты эпюры касательных напряжений на площадь стенки двутавра: $236\cdot 0{,}51\cdot 16{,}38+(297-236)\cdot 0{,}51\cdot 16{,}38\cdot \frac{2}{3}=2312\ кГ$, что составляет 96% от величины поперечной силы.

Приведенный в настоящем параграфе способ определения касательных напряжений для двутавра может быть применен и к другим сечениям, образованным из прямоугольников: полый прямоугольник, тавр и др.

§ 76. Касательные напряжения в балках круглого и кольцевого сечений

Рассмотрим балку с поперечным сечением, имеющим форму круга. Здесь уже касательные напряжения не могут быть расположены параллельно линии действия поперечной силы. При отсутствии сил, действующих по боковой поверхности балки, касательные напряжения по площадкам *1* и *2*, прилегающим к контуру сечения, должны непременно быть направлены по касательной к контуру сечения (рис. 190, *а*). Эти касательные пересекутся с линией действия поперечной силы в точке *C*. Так как касательные напряжения образуют в

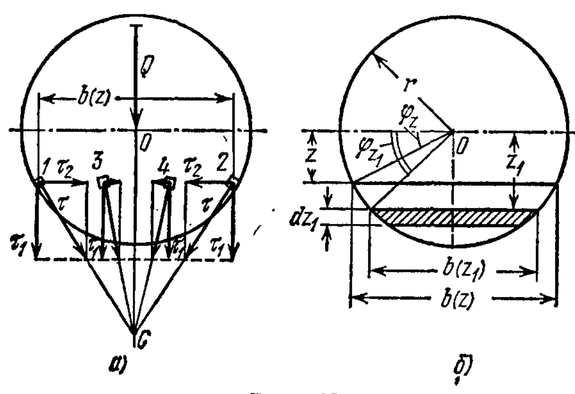


Рис. 190.

сумме поперечную силу Q (см. рис. 190), то и касательные напряжения на любых площадках *3* и *4*, расположенных на том же расстоянии z от горизонтального диаметра, будут направлены по линии, проходящей через ту же точку *C*. Каждое из напряжений τ можно разложить на два: вертикальное τ_1 и горизонтальное τ_2. Горизонтальные напряжения в левой и правой половинах сечения взаимно уравновешиваются, а вертикальные касательные напряжения складываются в поперечную силу Q. Таким образом, в балке с круглым сечением вертикальные напряжения τ_1 играют ту же роль, что в балке прямоугольного сечения полные напряжения τ.

Поэтому мы можем применить формулу (13.3) и для круглого сечения, но она будет определять лишь вертикальную составляющую касательного напряжения в любой точке. Вместо τ_1 будем в

дальнейшем писать τ:

$$\tau = \frac{QS_y^0}{J_y b(z)}. \tag{13.3}$$

Здесь S_y^0 будет по-прежнему статическим моментом части сечения от уровня z до крайней точки сечения (рис. 190, *б*) и будет выражаться формулой

$$S_y^0 = \int_F z_1\,dF = \int_F z_1 b(z_1)\,dz_1.$$

Для более удобного вычисления статического момента лучше ввести новую переменную — угол φ_{z1}; буквой r обозначим радиус сечения. Тогда

$$z = r\sin\varphi_z; \quad z_1 = r\sin\varphi_{z1}; \quad b(z_1) = 2r\cos\varphi_{z1};$$
$$dz_1 = r\cos\varphi_{z1}\cdot d\varphi_{z1}; \quad b(z) = 2r\cos\varphi_z.$$

Ограничим свою задачу нахождением величины τ_{max}:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}S_{max}}{J_y b}, \tag{13.7}$$

$$S_{max} = \int_0^{\pi/2} 2r\cos\varphi_{z1}\cdot r\sin\varphi_{z1}\cdot r\cos\varphi_{z1}\cdot d\varphi_{z1} =$$
$$= \frac{2r^3}{3}\Big| -\cos^3\varphi_{z1}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2r^3}{3}. \tag{13.9}$$

Так как $J = \pi r^4/4$ и $b_{z=0} = d = 2r$, то получаем

$$\tau_{max} = \frac{Q\cdot 2r^3\cdot 4}{3\cdot 2r\cdot \pi r^4} = \frac{4Q}{3\pi r^2}.$$

Таким образом, для круглого сечения

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{Q}{\pi r^2}, \tag{13.10}$$

т. е. τ_{max} в $1\,{}^1/_3$ раза больше среднего значения τ.

Так как уже для прямоугольного сечения, где τ_{max} в $1\,{}^1/_2$ раза больше среднего значения, проверка по касательным напряжениям часто бывает излишней, то тем более это относится к круглому сечению. Надо отметить, однако, что для балок трубчатого сечения касательные напряжения могут достигнуть более значительной величины.

Пример. Определить наибольшие касательные напряжения в чугунной трубе наружным диаметром $d = 10$ *см* с толщиной стенок $t = 1$ *см*; $Q_{max} = 2T$.

Наибольшее касательное напряжение имеет место в точках нейтральной плоскости и будет выражаться формулой

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}S_{max}}{J_y b}; \tag{13.7}$$

здесь J_y — момент инерции трубчатого сечения; S_{max} — статический момент полукольца; $b=2t$ — удвоенная толщина стенок трубы

$$J_y=\frac{\pi}{4}\left[\left(r_0+\frac{t}{2}\right)^4-\left(r_0-\frac{t}{2}\right)^4\right]=\pi r_0^3 t\left(1+\frac{t^2}{4r_0^2}\right)\approx\pi r_0^3 t, \quad (13.11)$$

где r_0 — средний радиус трубы.

Статический момент полукольца будет равен разности статических моментов относительно диаметра наружного и внутреннего полукругов; формула статического момента для полукруга

$$S(r)=\frac{2r^3}{3}. \quad (13.9)$$

Искомый статический момент полукольца равен

$$S_{max}=\frac{2}{3}\left[\left(r_0+\frac{t}{2}\right)^3-\left(r_0-\frac{t}{2}\right)^3\right]=2r_0^2 t\left[1+\frac{t^2}{12r_0^2}\right]\approx 2r_0^2 t. \quad (13.12)$$

Таким образом,

$$\tau_{max}=\frac{Q\cdot 2r_0^2 t}{2t\cdot\pi r_0^3 t}=\frac{Q}{\pi r_0 t}=\frac{2Q}{\pi d_0 t}=\frac{2\cdot 2000}{\pi\cdot 9\cdot 1}=141{,}4\ кГ/см^2.$$

Наибольшее касательное напряжение для кольцевого сечения в два раза больше среднего; напомним, что для прямоугольника это соотношение равно 1,5, а для сплошного круга 1,33.

§ 77. Проверка прочности по главным напряжениям

В предыдущем изложении были введены две проверки прочности материала балки при изгибе — по нормальным (11.15) и касательным (13.7) напряжениям

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W}\leqslant[\sigma], \quad (11.15)$$

$$\tau_{max}=\frac{Q_{max}S_{max}}{J_y b(z)}\leqslant[\tau]. \quad (13.7)$$

Выясним, прочность каких элементов балки мы проверяем по этим формулам.

На рис. 191 показана часть фасада изучаемой балки в том месте, где расположены сечения с наибольшим изгибающим моментом и наибольшей поперечной силой. На чертеже изображены элементы, прочность которых мы проверяем по условиям (11.15), (13.7). Первое относится к элементам, расположенным у верхнего и нижнего краев сечения с M_{max}. Эти элементы подвергаются простому растяжению или сжатию. Второе условие прочности (13.7) относится к элементу, расположенному у нейтрального слоя в сечении с Q_{max},— этот элемент испытывает чистый сдвиг.

Таким образом, производя принятую в обычной практике расчета проверку прочности по наибольшим нормальным и касательным напряжениям, мы на самом деле проверяем прочность материала балки лишь в трех указанных на рис. 191 элементах.

Нет никакой уверенности, вообще говоря, в том, что эти три элемента находятся в *наиболее опасном* состоянии. Поэтому мы должны научиться проверять прочность каждого элемента балки, взятого в любом сечении на любом расстоянии z от нейтральной оси. Только тогда мы сумеем среди этих элементов разыскать наиболее напряженный и сможем проверить его прочность.

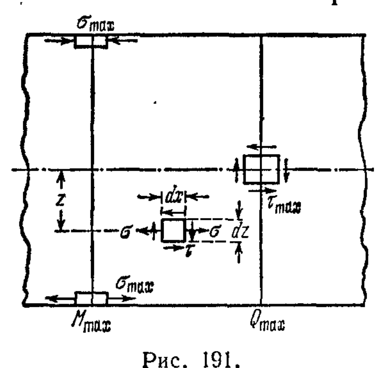


Рис. 191.

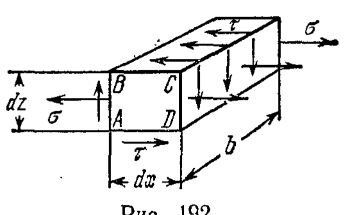


Рис. 192.

Возьмем какой-нибудь элемент материала (рис. 192) в произвольном сечении на расстоянии z от нейтрального слоя. На этот элемент будут действовать нормальное напряжение σ по граням, перпендикулярным к оси балки, и касательные напряжения τ по всем четырем боковым граням. Фасадные грани элемента будут свободны от напряжений.

Напряжения σ и τ выразятся следующими формулами:

$$\sigma = \frac{Mz}{J}, \quad \tau = \frac{QS(z)}{Jb},$$

где M — изгибающий момент и Q — поперечная сила в том сечении, где мы выделили элемент.

Возьмем случай, когда σ и τ положительны. Так как этот элемент подвергается сложному напряженному состоянию, то для его проверки придется применить теории прочности; вычисления надо начать с нахождения главных напряжений.

Так как по фасадной грани $ABCD$ элемента (рис. 192) и по параллельным ей не действуют касательные напряжения, то это будет одна из главных площадок; так как по ней отсутствуют и нормальные напряжения, то соответствующее ей главное напряжение равно нулю. Таким образом, мы имеем дело с *плоским* напряженным состоянием.

Нам теперь нужно найти оставшиеся два главных напряжения, зная нормальные и касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам, параллельным и перпендикулярным к оси балки (рис. 191). Подобную задачу мы уже решали в § 32 путем построения круга напряжений. Там этот прием был применен к более общему случаю напряженного состояния, когда по двум взаимно перпендикулярным площадкам с нормалями α и β действовали

напряжения σ_α, σ_β, τ_α, $\tau_\beta=-\tau_\alpha$. Условимся теперь относить значок α к грани нашего элемента, перпендикулярной к оси балки, а β — к грани, параллельной этой оси (рис. 193).

Отложим от точки O в положительном направлении величину $\sigma_\alpha=\sigma$ — отрезок OK_α; на перпендикуляре к оси σ в точке K_α отложим вверх отрезок $K_\alpha D_\alpha$, равный τ. Точка D_α лежит на круге

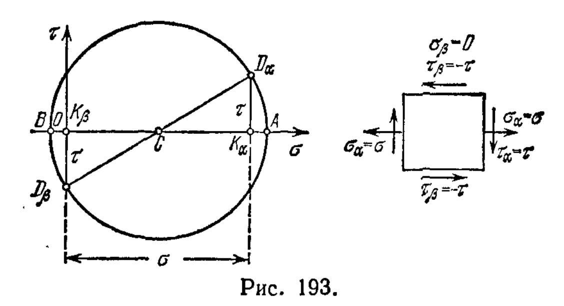


Рис. 193.

напряжений, соответствует площадке, перпендикулярной к оси балки.

Для площадки, параллельной оси балки, $\sigma_\beta=0$; значит, точка K_β совпадает с точкой O. Отрезок $K_\beta D_\beta$, отложенный вниз, изобразит касательное напряжение $\tau_\beta=-\tau$ и даст вторую точку круга D_β. Соединяя их, получаем центр круга — точку C — и радиусы CD_α и CD_β. Построение круга дает нам отрезки OA и OB, изображающие искомые главные напряжения. Из чертежа ясно, что эти напряжения — разных знаков. Поэтому нумерация главных напряжений должна быть выбрана такой:

$$\sigma_1=\overline{OA}>0; \quad \sigma_2=0; \quad \sigma_3=\overline{OB}<0.$$

Пользуясь данными в § 32 формулами (6.13), получим

$$\sigma_1=\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}=\frac{1}{2}\left[\sigma+\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right],$$

$$\sigma_3=\frac{\sigma}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}=\frac{1}{2}\left[\sigma-\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right],$$

$$\sigma_2=0.$$

Формулы для σ_1 и σ_3 могут быть сведены в одну:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_3\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left[\sigma\pm\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right]. \qquad (13.13)$$

Построение и вычисление мы провели, когда и σ и τ положительны. При отрицательном значении того или иного из этих напряжений следует изменить его знак в формулах (13.13). Соответственное изменение построений пришлось бы сделать и при графическом определении σ_1 и σ_3 с помощью круга напряжений.

Имея величину всех трех главных напряжений, мы можем составить расчетные условия по всем теориям прочности.

По первой теории — наибольших нормальных напряжений:

$$\sigma_1 \leqslant [\sigma], \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\left[\sigma+\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right] \leqslant [\sigma]. \qquad (13.14)$$

По второй теории — наибольших относительных удлинений:

$$[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)] \leqslant [\sigma].$$

Подставляя значения σ_1, σ_2, σ_3, находим

$$\left[\frac{1}{2}\left(\sigma+\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right)-\frac{1}{2}\mu\left(\sigma-\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right)\right] \leqslant [\sigma].$$

Принимая $\mu=0{,}3$, получаем

$$\left[0{,}35\sigma+0{,}65\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right] \leqslant [\sigma]. \qquad (13.15)$$

По третьей теории — наибольших касательных напряжений:

$$[\sigma_1-\sigma_3] \leqslant [\sigma], \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\left[\sigma+\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}-\sigma+\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right] \leqslant [\sigma];$$

окончательно

$$\sqrt{\sigma^2+4\tau^2} \leqslant [\sigma]. \qquad (13.16)$$

Наконец, по четвертой теории — потенциальной энергии формоизменения:

$$[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2] \leqslant 2[\sigma]^2,$$

откуда

$$\frac{1}{4}\left[\left(\sigma+\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right)^2+\left(\sigma-\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right)^2+\left(2\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right)^2\right] \leqslant 2[\sigma]^2.$$

После преобразований получаем

$$[\sigma^2+3\tau^2] \leqslant [\sigma]^2; \quad \sqrt{\sigma^2+3\tau^2} \leqslant [\sigma]. \qquad (13.17)$$

Теперь надо выяснить, *в каких точках балки* следует производить проверку прочности на главные напряжения.

Так как расчетное напряжение зависит и от σ и от τ, то проверке подлежит тот элемент материала балки, для которого σ и τ будут *одновременно* возможно большими; это осуществимо при наличии, скажем, двух таких условий:

1) изгибающий момент и поперечная сила достигают наибольшей величины в одном и том же сечении;

2) ширина балки резко меняется вблизи краев сечения (например, в двутавре или пустотелом прямоугольном профиле); эпюры напряжений для таких профилей (рис. 194) показывают, что на уровне перехода от полки к стенке (точки a и b) касательные и нормальные напряжения имеют величину, *близкую к максимальной*.

Указанные два условия, таким образом, определяют и необходимость дополнительной проверки прочности, и тот элемент, для которого эта проверка должна быть сделана; может случиться, что эти условия не имеют места; тогда ограничиваются выбором нескольких точек, могущих дать наиболее высокие значения расчетного напряжения. Что же касается выбора расчетной формулы, то наиболее правильным было бы применить теорию потенциальной энергии формоизменения (13.17).

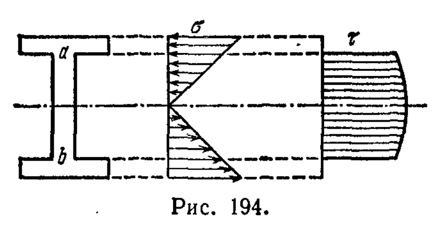


Рис. 194.

На практике, однако, при расчете балок до сих пор сохранилось применение теории наибольших нормальных напряжений (13.14), дающей часто более экономичные размеры.

Пример. Балка AB (рис. 195), лежащая на двух опорах, нагружена симметрично расположенными силами $P=6{,}4$ T, отстоящими от опор на $a=50$ *см*, допускаемое напряжение $[\sigma]=1400$ *кГ/см*^{2}. Подобрать двутавровое сечение и проверить прочность материала у места перехода от полки к стенке.

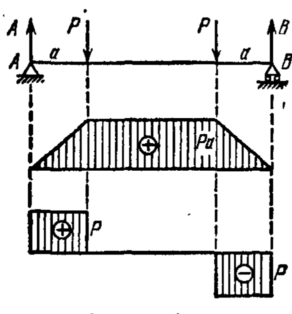


Рис. 195.

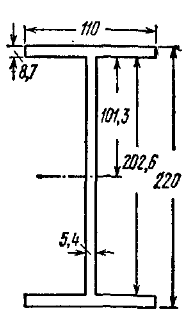


Рис. 196.

Наибольшие значения M и Q будут в одном сечении — под грузом:

$$M_{\max}=Pa=0{,}5\cdot 6{,}4=3{,}2\ Тм,$$
$$Q_{\max}=P=6{,}4\ T.$$

Подбираем сечение

$$W=\frac{M_{\max}}{[\sigma]}=\frac{320\,000}{1400}=229\ см^3.$$

Надо взять двутавровую балку № 22; $W=232$ *см*^{3}; $J=2550$ *см*^{4}. Размеры поперечного сечения балки показаны схематично на рис. 196. При выбранном профиле

$$\sigma_{\max}=\frac{320\,000}{232}=1380\ кГ/см^2.$$

Дополнительная проверка прочности должна быть сделана при $z=10{,}13$ *см*.

$$\sigma=\frac{320\,000\cdot 10{,}13}{2550}=1271 \text{ кГ/см}^2.$$

Статический момент полки равен

$$S_y^{\text{п}}=11\cdot 0{,}87\cdot 10{,}565=101 \text{ см}^3.$$

Касательные напряжения

$$\tau=\frac{6400\cdot 101}{0{,}54\cdot 2550}=469 \text{ кГ/см}^2.$$

Условие прочности по первой теории прочности (13.14)

$$\frac{1}{2}\left[1271+\sqrt{1271^2+4\cdot 469^2}\right]=1426 \text{ кГ/см}^2 > 1400 \text{ кГ/см}^2.$$

Условие прочности по четвертой теории прочности (13.17)

$$\sqrt{1271^2+3\cdot 469^2}=1510 \text{ кГ/см}^2 > 1400 \text{ кГ/см}^2.$$

Так как расчетные напряжения по четвертой теории прочности на 8% превышают допускаемые напряжения, размер сечения следует увеличить, приняв двутавр № 22а. Для этого профиля после пересчета получим: $\sigma_{max}=1260$ *кГ/см*^{2} и при $z=10{,}11$ *см* $\sigma=1158$ *кГ/см*^{2} и $\tau=442$ *кГ/см*^{2}. Расчетные напряжения: по первой теории прочности 1329 *кГ/см*^{2} и по четвертой теории прочности 1423 *кГ/см*^{2}.

§ 78. Направления главных напряжений

В предыдущем параграфе мы определили лишь величину главных напряжений для произвольно взятого элемента балки и не интересовались их направлением. С точки зрения проверки прочности материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, полученных результатов было достаточно. Для таких же материалов,

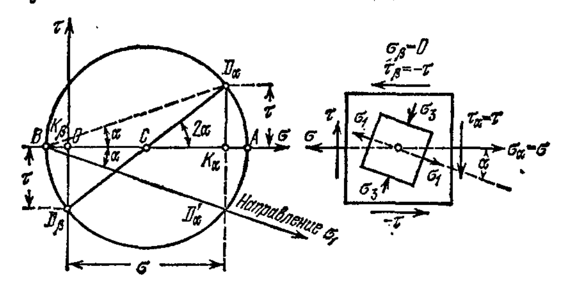


Рис. 197.

как железобетон, крайне существенно знать *направления* растягивающих напряжений в каждой точке, чтобы в этом направлении расположить стержни арматуры.

Определение положения главных напряжений может быть сделано при помощи круга напряжений (рис. 197). Пусть в рассматриваемом случае σ_α и τ_α по площадкам, перпендикулярным к оси балки,

будут положительны:

$$\sigma_\alpha = +\sigma = \frac{Mz}{J},$$

$$\tau_\alpha = +\tau = \frac{QS_y^0}{Jb}.$$

Строим круг, взаимное расположение линий действия напряжений σ_α и наибольшего (алгебраически) главного напряжения σ_1 совпа-

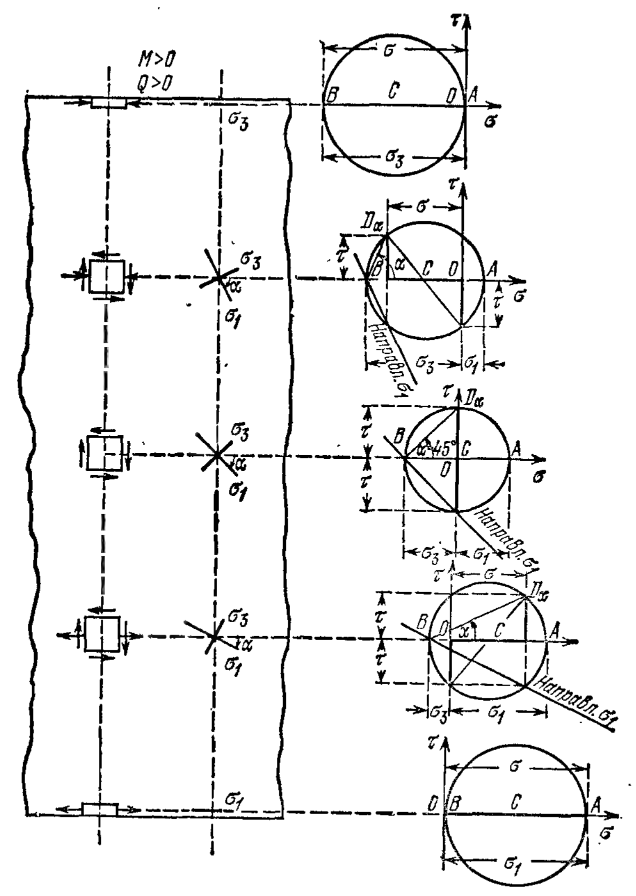


Рис. 198.

дает с относительным расположением на чертеже круга напряжений линии BD_α и оси абсцисс, составляющих между собой угол α (рис. 197). Чтобы на чертеже элемента построить линию действия σ_1, надо от направления σ_α отложить угол α *по часовой стрелке*.

При перемещении выбранного элемента в пределах сечения направление главных напряжений меняется. У краев балки одно из главных напряжений нуль, а другое направлено параллельно оси балки; у нейтрального слоя главные напряжения составляют углы 45° с осью балки.

На рис. 198 изображены круги напряжений и направления главных напряжений в различных точках сечения. Направление сжимающих напряжений показано на фасаде балки жирными линиями, растягивающих — тонкими. Принято, что изгибающий момент и поперечная сила в сечении положительны.

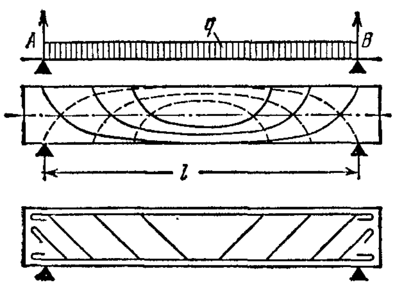


Рис. 199.

Получив направление главных напряжений в какой-либо точке проведенного сечения, продолжаем направление одного из них до пересечения с соседним сечением. В полученной точке определяем новое направление рассматриваемого главного напряжения и продолжаем его до пересечения со следующим сечением. Поступая таким образом, получим ломаную линию, которая в пределе обратится в кривую, касательная к которой совпадает с направлением рассматриваемого главного напряжения в точке касания. Эта кривая называется *траекторией главного напряжения.* Направление траекторий главных напряжений зависит от вида нагрузки и от условий опирания балки. Через каждую точку балки можно провести две траектории главных напряжений — растягивающих и сжимающих. На рис. 199 (вверху) траектории сжимающих напряжений показаны пунктиром, растягивающих — сплошными линиями.

В железобетонных балках надо располагать стальную арматуру так, чтобы она шла примерно в направлении траекторий главных растягивающих напряжений (рис. 199; внизу).

Теоретические исследования, касающиеся главных напряжений при изгибе и приводящие к современным расчетным формулам, впервые были применены к расчету мостовых балок Н. А. Белелюбским и опубликованы им в 1870—1876 гг. Главные напряжения он называл «косыми напряжениями».

Глава XIV

ЦЕНТР ИЗГИБА. СОСТАВНЫЕ БАЛКИ

§ 79. Касательные напряжения, параллельные нейтральной оси. Понятие о центре изгиба

А. Помимо рассмотренных в §§ 74—76 касательных напряжений, направленных в сечении балки параллельно поперечной силе Q и тем самым перпендикулярно нейтральной оси y, в тонкостенных сечениях возникают также касательные напряжения, параллельные оси y. В этом нетрудно убедиться, если, например, из двутавровой балки сечениями *1—1* и *2—2* выделить участок длиной dx, а затем

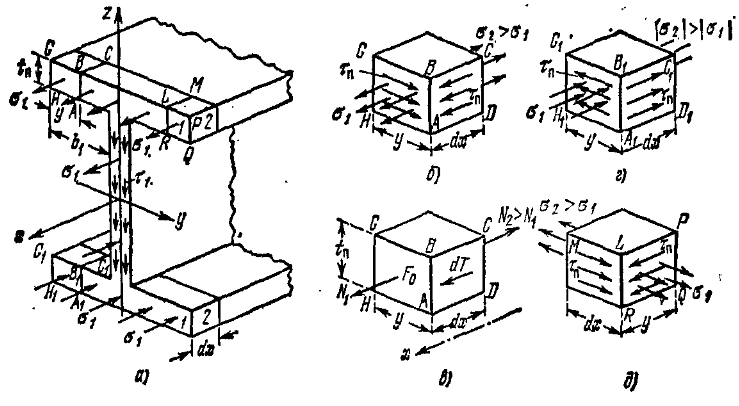


Рис. 200.

плоскостью $ABCD$, параллельной плоскости xz, условно отделить от полки двутавра параллелепипед со сторонами: $AH=y$, $AB=t_п$ и $BC=dx$, как показано на рис. 200, *а* и *б*.

Предположим, что изгибающий момент $M_1=M$ в сечении *1—1* меньше, чем изгибающий момент $M_2=M+dM$ в сечении *2—2*. Тогда и равнодействующая N_1 внутренних нормальных усилий, возникающих на передней ($ABGH$) грани параллелепипеда, окажется меньше равнодействующей N_2 нормальных усилий на задней грани этого параллелепипеда (рис. 200, *в*). Разница между величинами N_2 и N_1 (см. формулы (13.1) и (13.2)) вычисляется по формуле

$$dN=N_2-N_1=\frac{dM}{J_y}\cdot S_y^0, \qquad (14.1)$$

где S_y^0 — статический момент относительно нейтральной оси y площади передней $ABGH$ или такой же задней грани параллелепипеда, на которой суммируются внутренние нормальные усилия. Разница в величинах N_2 и N_1 может быть уравновешена лишь внутренними

касательными усилиями, действующими по грани $ABCD$, потому что верхняя, нижняя и левая боковая грани параллелепипеда, как принадлежащие наружной поверхности балки, свободны от сил, а на передней и задней его гранях не могут возникнуть какие-либо добавочные внутренние усилия, которые уравновесили бы разницу между N_2 и N_1 (рис. 200, *б* и *в*).

Таким образом, на грани $ABCD$ имеют место касательные напряжения $\tau_п$, которым у ребра AB по свойству парности отвечают равные им касательные напряжения $\tau_п$ на грани $ABGH$, т. е. в поперечном сечении балки (рис. 200, *б*). По малости толщины полки $t_п$ и длины dx выделенного участка балки эти касательные напряжения допустимо считать равномерно распределенными по площади грани $ABCD$; поэтому сумма возникших здесь внутренних касательных усилий будет

$$dT = \tau_п t_п dx.$$

Условие равновесия выделенного параллелепипеда запишем так:

$$\sum x = 0; \quad N_1 + dT - N_2 = dT - dN = 0,$$

или

$$\tau_п t_п \, dx = \frac{dM}{J_y} \cdot S_y^0,$$

откуда

$$\tau_п = \frac{Q \cdot S_y^0}{J_y t_п}. \qquad (14.2)$$

Итак, чтобы найти в тонкостенных сечениях касательные напряжения, параллельные нейтральной линии, также можно применить формулу Журавского (13.3), рассматривая стоящую в знаменателе величину b как ширину слоя, в котором определяется касательное напряжение, независимо от того, проводится ли условный разрез сечения параллельно или перпендикулярно нейтральной линии.

В данном случае (в предположении, что $N_2 > N_1$) в левой половине верхней полки касательные напряжения $\tau_п$ оказываются в поперечном сечении направленными слева направо. Нетрудно убедиться в том, что в левой половине нижней полки, где нормальные напряжения будут сжимающими и по-прежнему $|\sigma_2| > |\sigma_1|$, касательные напряжения $\tau_п$ имеют обратное направление (рис. 200, *г*); в правой половине верхней полки они направлены справа налево (рис. 200, *д*), а в правой половине нижней полки — слева направо.

В совокупности касательные усилия в полках и в стенке тонкостенного профиля образуют так называемый «поток» касательных усилий; для двутаврового сечения он изображен на рис. 201.

Составим выражение для напряжения $\tau_п$. В формулу (14.2) входит статический момент части площади полки, заштрихованной на рис. 201,

$$S_y^0 = F_0 z_{C_1} = y t_п \frac{h - t_п}{2}.$$

Поэтому

$$\tau_п = \frac{Q \cdot S_y^0}{J_y t_п} = \frac{Q(h - t_п) y_1}{2J_y}, \qquad (14.3)$$

т. е. касательное напряжение $\tau_п$ меняется по длине полки по линейному закону (координата y в формулу (14.3) входит в первой степени). Наибольшего значения это напряжение достигает при $y = b_1$:

$$\tau_{п\,max} = \frac{Q(h - t_п) b_1}{2J_y}. \qquad (14.4)$$

При $b_1 < y < b_1 + t_c$ в вертикальный разрез попадает вся стенка двутавра: нельзя считать, что по высоте h касательное напряжение распределено равномерно, поэтому недопустимо применять для его

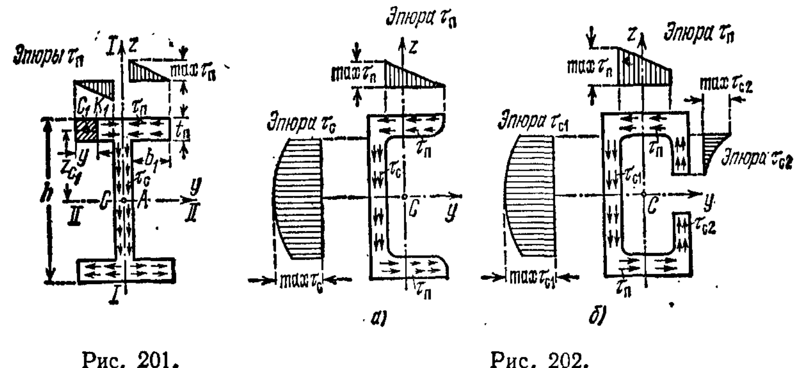


Рис. 201. Рис. 202.

вычисления формулу Журавского. Эпюра напряжения $\tau_п$ для двутаврового сечения изображена на рис. 201. Эпюры касательных напряжений в полках и в стенке корытного профиля приведены на рис. 202, *а*; для *С*-образного профиля — на рис. 202, *б*. В поперечном сечении каждого из этих профилей показан поток касательных усилий.

При вычислении касательного напряжения в полке замкнутого тонкостенного профиля, симметричного относительно линии нагружения (оси z), например в точке K полки полого прямоугольного сечения (рис. 203), условный разрез полки необходимо провести как через точку K, так и через симметрично (по отношению к линии нагружения) расположенную точку K_1. В числитель формулы (14.2) нужно ввести статический момент части полки между этими двумя разрезами (соответствующая часть площади на рис. 203 заштрихована), а в знаменатель — удвоенную (за счет двух разрезов) толщину полки. Формула для вычисления $\tau_п$ получается аналогичной формуле (14.3). Эпюры касательных напряжений в полке и в стенке, а также поток касательных усилий в профиле изображены на рис. 203.

Если стенка или полки тонкостенного профиля наклонены к плоскости нагружения под некоторым углом α, то при вычислении касательного напряжения по формулам (13.3) или (14.2) это обстоятельство должно быть учтено введением в знаменатель той и другой формулы множителя $\cos\alpha$. Действительно, допустим, что балка, поперечное сечение которой представляет равнобокий уголок, нагружена в плоскости симметрии zx (рис. 204). Тогда сумма проекций на

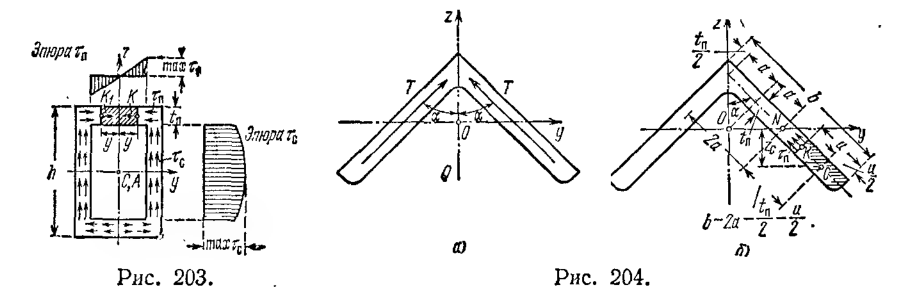


Рис. 203. Рис. 204.

ось z внутренних касательных усилий, замененных на рис. 204, *а* силами T, будет равна $2T\cos\alpha$. Так как эта сумма проекций внутренних усилий представляет поперечную силу Q, то

$$T=\frac{Q}{2\cos\alpha}.$$

Таким образом, для определения в некоторой точке K полки уголка (рис. 204, *б*) касательного напряжения $\tau_п$, которое можно считать равномерно распределенным по толщине $t_п$, следует воспользоваться формулой

$$\tau_п=\frac{QS_y^0}{J_y t_п\cos\alpha}=\frac{Qut_п z_C}{J_y t_п\cos\alpha}=\frac{Qu\left(b-2a-\frac{t_п}{2}-\frac{u}{2}\right)}{J_y},$$

где S_y^0 — статический момент заштрихованной части полки. Наибольшего значения касательное напряжение $\tau_п$ достигает в точке N на оси y при $u=u_{max}=b-2a-\frac{t_п}{2}$,

$$\tau_{п\,max}=\frac{Q}{2J_y}\left(b-2a-\frac{t_п}{2}\right)^2. \qquad (14.5)$$

Б. Рассматривая рис. 201—203, замечаем, что в сечении двутавра и полого прямоугольника при нагружении их в плоскости, совпадающей с главной центральной плоскостью инерции xy (или xz) и одновременно являющейся плоскостью симметрии балки, внутренние касательные усилия в сечении приводятся к равнодействующей, равной поперечной силе Q и направленной вдоль оси симметрии сечения (поток касательных усилий как бы уравновешен).

В сечениях же корытного и С-образного профиля (рис. 202, *а* и *б*), а также тавра (рис. 207), равнобокого и неравнобокого уголков (рис. 208 и 209), нагруженных тоже в плоскости, совпадающей с главной центральной плоскостью инерции xz, но не являющейся плоскостью симметрии балки, внутренние касательные усилия в сечении приводятся к упомянутой выше равнодействующей и паре сил вокруг продольной оси балки x. Это значит, что равная поперечной силе Q равнодействующая внутренних касательных усилий в сечении проходит не через центр тяжести C вдоль главной центральной оси инерции z, а параллельно этой оси через какую-то другую точку в плоскости поперечного сечения. Следовательно, кроме плоского изгиба, балка будет испытывать еще и кручение.

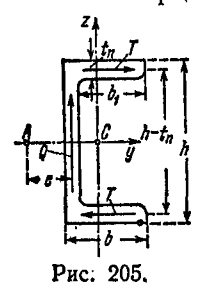


Рис. 205.

Точка, через которую проходит равнодействующая всех внутренних касательных усилий в сечении балки (по отношению к ней момент всех внутренних касательных усилий в сечении равен нулю), *называется центром изгиба* или центром жесткости, а параллельная оси x *линия, соединяющая все центры изгиба сечений балки, называется линией центров изгиба*. Очевидно, для того, *чтобы изгиб был плоским и не возникало кручения тонкостенной балки, плоскость действия внешних сил должна проходить через линию центров изгиба, параллельно одной из главных центральных плоскостей инерции балки.* Условие равновесия, требующее, чтобы центробежный момент инерции сечения относительно линии нагружения и перпендикулярной ей нейтральной линии равнялся нулю, при этом будет выполняться, т. е. изгиб окажется плоским; вместе с тем как момент внешних сил, так и момент внутренних касательных усилий относительно центра изгиба будут равны нулю, т. е. кручение балки не произойдет.

Выясним на примере корытного сечения, как определяется положение центра изгиба — точки A (рис. 205 и 206). Пренебрегая параллельными оси касательными напряжениями в полках, будем считать, что внутренние касательные усилия в стенке корытного профиля приводятся к равнодействующей, приблизительно равной поперечной силе Q и направленной вдоль средней линии стенки. В полках равнодействующие внутренних касательных усилий, параллельных нейтральной линии сечения, обозначим через T и будем считать их приложенными посредине толщины каждой полки. Имея ввиду, что касательное напряжение $\tau_п$ в полке меняется по линейному закону, причем наибольшее его значение по формуле (14.4) достигает

$$\tau_{п\,max} = \frac{Q(h-t_п)b_1}{2J_y},$$

можно записать следующее выражение для равнодействующей T:

$$T=\tau_{п.\,ср}F_п=\frac{\tau_{п\,max}+0}{2}t_пb_1=\frac{Q(h-t_п)b_1^2t_п}{4J_y}.$$

Условие равенства нулю момента всех внутренних касательных усилий в корытном сечении относительно центра изгиба примет такой вид:

$$Qe-T(h-t_п)=0,$$

откуда

$$e=\frac{T(h-t_п)}{Q}=\frac{(h-t_п)^2b_1^2t_п}{4J_y}. \qquad (14.6)$$

В более сложных случаях положение центра изгиба можно определить специальными приемами, излагаемыми в теории изгибно-крутильных деформаций тонкостенных стержней.

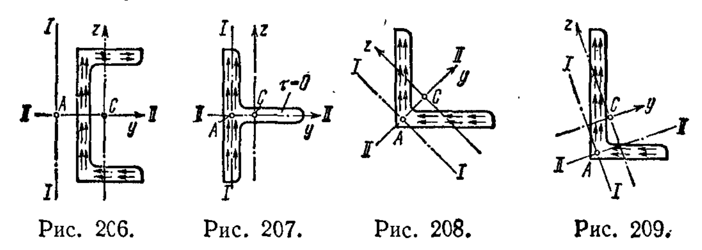


Рис. 206. Рис. 207. Рис. 208. Рис. 209.

Отметим здесь, что если сечение имеет две оси симметрии, центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения (рис. 201, 203); если сечение имеет одну ось симметрии, то центр изгиба лежит на этой оси (рис. 202, 207, 208); если сечение состоит из прямоугольников, средние линии которых пересекаются в одной точке, центр изгиба находится в этой же точке (рис. 207, 208, 209). На этих рисунках указано положение центра изгиба (точка A) и цифрами I и II отмечены направления, загружение вдоль которых приведет к плоскому изгибу балки без кручения.

§ 80. Клепаные и сварные балки

В примерах, рассмотренных в предыдущих параграфах и касавшихся подбора размеров сечений балок, мы имели такие величины требуемых моментов сопротивления двутавров, что всегда могли подобрать прокатный профиль. Наибольший наш прокатный профиль двутавра № 60 имеет момент сопротивления всегда лишь 2560 $см^3$.

На практике, однако, часто встречаются случаи, когда требуется значительно больший профиль. Тогда приходится применять составное сечение балки из листов и уголков, соединенных заклепками, или из листов, соединенных сваркой (сварными швами).

Клепаная балка состоит (рис. 210) из вертикального листа *1*, нескольких пар горизонтальных листов *2* и уголков *3*; уголки и листы соединены между собой заклепками. Сварная балка (рис. 211) состоит из вертикального и горизонтальных листов, соединенных сварными швами.

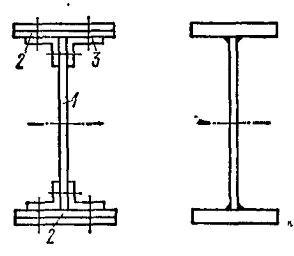


Рис. 210. Рис. 211.

Расчет сварных и клепаных балок изучается в курсе «Металлические конструкции». Там, в частности, даются указания, как назначать размеры балки, зная величину наибольшего изгибающего момента[1]). Ниже приводится пример проверочного расчета сварной балки.

Задана схема балки и действующей на нее нагрузки, а также эпюры изгибающих моментов и поперечных сил (рис. 212). Заданы и размеры поперечного сечения балки, показанные на рис. 213. Нужно произвести проверочный расчет, как самой балки в целом, так и сварных соединений.

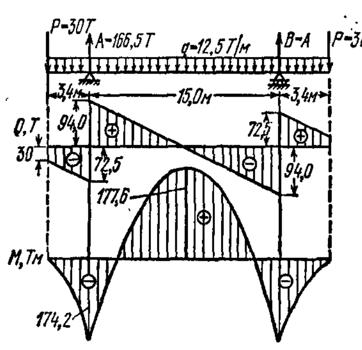



Рис. 212.

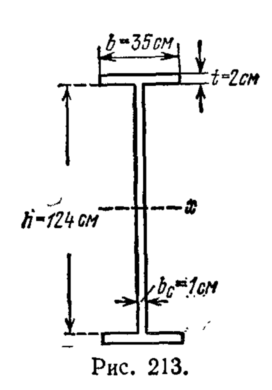


Рис. 213.

Подсчитаем момент инерции всего сечения, работающего как цельное, относительно главной оси x:

$$J_x = \frac{1\cdot 124^3}{12} + 2\cdot 35\cdot 2\cdot 63^2 = 159\,000 + 555\,600 = 714\,600 \text{ см}^4.$$

Момент сопротивления сечения

$$W_x = \frac{J_x}{z_{\max}} = \frac{714\,600}{64} = 11\,160 \text{ см}^3.$$

Наибольшее нормальное напряжение в балке в средине ее пролета

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{177{,}6\cdot 10^5}{11\,160} = 1592 \text{ кГ/см}^2,$$

чем меньше допускаемого, равного 1600 *кГ/см*².

---

[1]) Расчет клепаных и сварных балок изложен подробно в предыдущих изданиях книги. См. Беляев Н. М., Сопротивление материалов, изд. XIV, 1965 и более ранние издания.

Величина касательных напряжений на уровне верха (или низа) стенки

$$\tau_{п}=\frac{Q\cdot S_y^0}{J_x b_c}=\frac{94\cdot 10^3\cdot 35\cdot 2\cdot 63}{714\,600\cdot 1}=580\ кГ/см^2.$$

Эти касательные напряжения будут воспрнниматься парой сварных швов (по ту и другую сторону стенки) по расчетным сечеииям $I-I$ размером m каждое (см. рис. 214). Следовательно, прн вычислении касательных напряжеиий в швах нужно

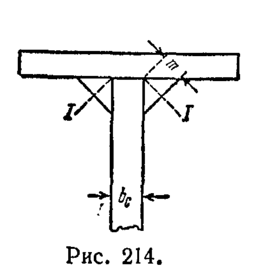


Рис. 214.

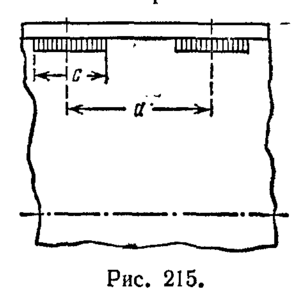


Рис. 215.

в знаменатель формулы вместо толщины стенкн b_c подставить расчетную толщнну двух швов $2m$. Нанменьшая допустимая расчетная толщина шва принимается равной 0,4 *см*. При этом касательные напряжения в швах будут равны

$$\tau_{ш}=\frac{QS_y^0}{J_x 2m}=\frac{94\cdot 10^3\cdot 35\cdot 2\cdot 63}{714\,600\cdot 2\cdot 0,4}=725\ кГ/см^2,$$

или, что то же самое,

$$\tau_{ш}=580\,\frac{b_c}{2m}=580\,\frac{1}{0,8}=725\ кГ/см^2.$$

Эти напряжения находятся в пределах допускаемых напряженнй на срез сварных швов.

Можно устраивать швы не сплошными, а прерывистыми (рнс. 215). Сдвнгающая сила будет собираться на длине a, а восприниматься швами на длине c. Следовательно, напряжения в прерывистых швах (сварных шпонках) будут при прочих равных условиях в a/c раз больше, чем в сплошных швах той же толщины. Сейчас имеет применение автоматическая сварка частей конструкций непрерывными швами. Поэтому устройство соединений прн помощи сварных шпонок постепенно прекращается. Кроме того, сварные шпонки обладают тем неприятным свойством, что в начале каждой шпонки н в ее конце образуется концентрация местных напряженнй, неучитываемая расчетными формулами.

Следует произвестн еще проверку прочности стенки по главным напряжениям на уровне низа сварного шва. Здесь будут действовать значительные нормальные напряжения (от $M=174{,}2$ *Тм*) и касательные напряжения лишь немногим меньшие 580 $кГ/см^2$. Сочетанне этих напряжений может привести к значительной величине главных напряжений в этом уровне, а также расчетных напряжений.

Отдел V

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В БАЛКАХ ПРИ ИЗГИБЕ

Глава XV

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

§ 81. Прогиб и поворот сечения балки

При действии внешних сил, расположенных в одной из главных плоскостей инерции балки, наблюдается искривление ее оси в *той же плоскости*, происходит так называемый плоский изгиб.

На рис. 216 изображена в искаженном масштабе искривленная ось балки, защемленной одним концом и нагруженной на другом

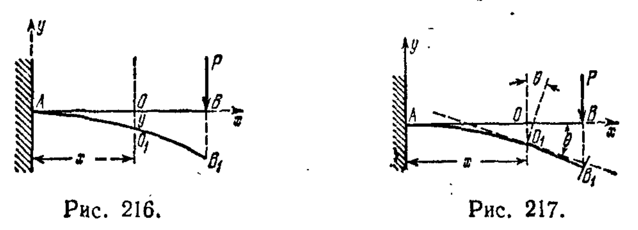


Рис. 216. Рис. 217.

конце сосредоточенной силой. Центра тяжести O какого-либо сечения с абсциссой x перемещается в точку O_1.

Перемещение OO_1 центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к оси балки, называется прогибом балки в этом сечении или прогибом этого сечения балки. Прогиб будем обозначать буквой y.

Строго говоря, так как ось балки, лежащая в нейтральном слое, не меняет при изгибе своей длины, то точка O_1 сместится несколько в сторону от перпендикуляра к оси балки. Однако обычно прогибы y малы по сравнению с длиной балки, и указанное смещение в сторону является значительно меньшей величиной, чем прогиб; поэтому ими пренебрегают.

При деформации балки сечение, оставаясь плоским, поворачивается по отношению к своему прежнему положению. На рис. 217 показаны сечения $O—O_1$ и $B—B_1$ до и после перемещения.

Угол θ, на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется углом поворота сечения. Для практических целей необходимо уметь вычислять прогибы и повороты для любого сечения балки.

Величина наибольшего прогиба может служить мерилом того, насколько искажается форма конструкции при действии внешних сил. Обычно с целью сохранения соединений частей балки от расшатывания и уменьшения колебаний под действием подвижной нагрузки ограничивают величину наибольшего прогиба балки под нагрузкой. Так для стальных балок в зависимости от назначения их ставят условием, чтобы прогиб не превосходил $\frac{1}{1000} \div \frac{1}{250}$ доли пролета.

Кроме того, знание деформаций балки нам потребуется при решении статически неопределимых задач, когда число опорных реакций превышает число уравнений статики. Дополнительные уравнения могут быть написаны лишь путем изучения деформаций конструкции. Для того чтобы полностью знать деформацию балки, необходимо уметь вычислить для каждого сечения его прогиб y и угол поворота θ. Оба они будут функциями от x — расстояния сечения от начала координат; между y и θ для каждого сечения имеется определенная зависимость.

Выберем систему координат, которой будем в дальнейшем пользоваться. Начало координат расположим в одной из точек первоначальной оси балки, которую всегда будем выбирать за ось x; ось y будем направлять перпендикулярно к первоначальной оси балки вверх. При таких условиях уравнение

$$y=f(x) \tag{15.1}$$

представит собой уравнение кривой, по которой изогнется ось балки под нагрузкой; это будет *уравнение изогнутой оси балки.*

Касательная к изогнутой оси балки (рис. 217) в точке O_1 составит с осью x угол, равный θ, т. е. углу поворота поперечного сечения относительно первоначального положения. С другой стороны, тангенс угла, образованного касательной к кривой $y=f(x)$ с осью x, как известно, равен

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{dy}{dx}. \tag{15.2}$$

Так как на практике прогибы балки обычно малы по сравнению с пролетом, то θ бывают очень малыми углами, обычно не больше 1°. Для таких углов можно считать, что тангенс угла равен углу, выраженному в радианах. Отсюда следует, что

$$\theta=\frac{dy}{dx}, \tag{15.3}$$

т. е. *угол поворота сечения равен первой производной по x от прогиба y в этом сечении.*

Таким образом, задача изучения деформации балки сводится к получению уравнения изогнутой оси $y=f(x)$; зная его, мы можем вычислить дифференцированием и угол поворота для любого сечения балки.

§ 82. Дифференциальное уравнение изогнутой оси

Для того чтобы получить y как функцию от x, надо установить зависимость деформации балки от внешних сил, изгибающих ее, от ее размеров и материала. Такая зависимость была нами получена уже раньше в § 63.

Используем формулу (11.10), полученную нами при рассмотрении чистого изгиба. Распространяя ее на общий случай изгиба,



т. е. пренебрегая влиянием поперечной силы на деформации балки, можем написать

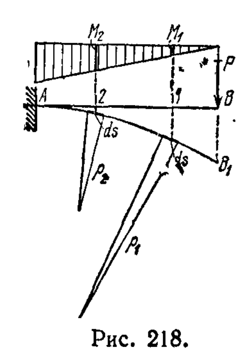


Рис. 218.

$$\frac{1}{\rho(x)}=\frac{M(x)}{EJ},$$

где $\rho(x)$ — радиус кривизны участка изогнутой оси балки между двумя смежными сечениями на расстоянии x от начала координат; $M(x)$ — изгибающий момент в том же сечении; EJ — жесткость балки. Влияние $Q(x)$ на деформации балки обычно невелико; метод его учета дан в § 108.

На рис. 218 изображено изменение радиусов кривизны по мере изменения изгибающего момента. Для получения уравнения изогнутой оси необходимо использовать математическую зависимость между радиусом кривизны оси и координатами ее точек x и y:

$$\frac{1}{\rho(x)}=\pm\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}. \tag{15.4}$$

Подставляя это значение для кривизны $1/\rho(x)$ в формулу (11.10), получаем дифференциальное уравнение, связывающее y, x, $M(x)$ и EJ:

$$\pm\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}=\frac{M(x)}{EJ}. \tag{15.5}$$

Это — так называемое *дифференциальное* уравнение изогнутой оси, или, как его часто называют, «дифференциальное уравнение упругой линии».

Для громадного большинства практически встречающихся задач величина $\frac{dy}{dx}$, представляющая собой угол поворота сечения балки, очень малая величина, квадратом которой можно пренебречь

по сравнению с единицей; тогда уравнение (15.5) упрощается:

$$\pm\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M(x)}{EJ}, \quad \text{или} \quad \pm EJ\frac{d^2y}{dx^2}=M(x). \tag{15.6}$$

Это уравнение называется *приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси балки.*

Правило знаков для изгибающего момента установлено независимо от направления координатных осей, вторая же производная, как известно, положительна, если в сторону положительной оси y обращена *вогнутость* кривой, и отрицательна — если *выпуклость* (рис. 219). Таким образом, знак изгибающего момента $M(x)$ не зависит от расположения координатных осей; знак же второй производной — зависит.

При направлении оси y вверх в уравнении (15.6) следует оставить знак $+$, а при направлении вниз знак $-$.

Условимся в дальнейшем всегда ось y направлять вверх и дифференциальное уравнение (15.6) писать в виде

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=M(x). \tag{15.7}$$

Знак изгибающего момента при этом будем ставить по прежним правилам.

Рис. 219.

Для получения из дифференциального уравнения изогнутой оси уравнения прогибов $y=f(x)$ необходимо произвести интегрирование уравнения (15.7). Выражение для $M(x)$ является функцией от x; поэтому, интегрируя, получаем

$$EJ\frac{dy}{dx}=\int M(x)\,dx+C;$$

интегрируя второй раз, имеем

$$EJy=\int dx\int M(x)\,dx+Cx+D.$$

Таким образом, мы получили уравнение углов поворота

$$\theta=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{EJ}\left[\int M(x)\,dx+C\right] \tag{15.8}$$

и уравнение прогибов

$$y=\frac{1}{EJ}\left[\int dx\int M(x)\,dx+Cx+D\right]. \tag{15.9}$$

В эти уравнения входят постоянные интегрирования C и D. Порядок вычисления этих постоянных будет показан на примерах.

Прежде чем перейти к практическим примерам, необходимо еще раз подчеркнуть, что уравнение (15.7) является *приближенным*; та ошибка, которую мы допустили, пренебрегая величиной $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ по сравнению с единицей, практически *мала* только в тех случаях, когда перемещения балок малы по сравнению с их размерами. Если же это условие не соблюдено и углы поворота сечений балок таковы, что квадратом их величины нельзя пренебречь по сравнению с единицей, то приходится обращаться к интегрированию уже полного уравнения (15.5).

Такие случаи могут быть при изучении деформаций тонких пружин, тонкой фанеры, вообще при изгибе гибких балок.

§ 83. Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси балки, защемленной одним концом

Рассмотрим балку, защемленную концом A и нагруженную на другом конце силой P и равномерно распределенной по всей длине нагрузкой q, что показано на рис. 220. Начало координат возьмем в точке A, ось y направим вверх, ось x — вправо. Напишем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

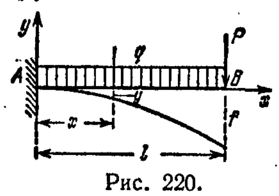


Рис. 220.

$$EJy''=M(x).$$

Величина изгибающего момента в произвольном сечении на расстоянии x от начала координат

$$M(x)=-P(l-x)-q\frac{(l-x)^2}{2}, \qquad (15.10)$$

$$EJy''=-P(l-x)-q\frac{(l-x)^2}{2}. \qquad (15.11)$$

Это уравнение интегрируем два раза:

$$EJy'=-P\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{q}{2}\left(l^2x-lx^2+\frac{x^3}{3}\right)+C, \qquad (15.12)$$

$$EJy=-P\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)-\frac{q}{2}\left(\frac{l^2x^2}{2}-\frac{lx^3}{3}+\frac{x^4}{12}\right)+Cx+D. \qquad (15.13)$$

Для определения C и D отыщем в балке сечения, в которых мы заранее знаем величины угла поворота и прогиба. Таким сечением является опорное сечение A: при $x=0$, $y'=0$ и $y=0$.

Подставляя эти значения сначала в уравнение (15.12), а затем в уравнение (15.13), получим $C=0$ и $D=0$. Как можно заключить из уравнений углов поворота и прогибов, произвольные постоянные C и D, деленные на жесткость балки EJ, дают значения соот-

ветственно угла поворота и прогиба сечения балки в начале координат. Постоянные C и D — размерные величины с размерностью: C — [сила·длина^2] и D — [сила·длина^3]. Постоянные интегрирования в нашем случае обратились в нуль, что является следствием выбора начала координат в защемленном конце балки. При построении эпюр мы отсчитывали x от свободного конца балки; здесь оказывается более выгодным для уменьшения вычислений при определении C и D отсчитывать x от защемленного конца, что несколько усложняет выражение изгибающего момента, но облегчает нахождение перемещений. Определив постоянные C и D, мы можем преобразовать выражения для угла поворота и прогиба таким образом, чтобы в скобках оставались лишь безразмерные дроби, что упрощает в дальнейшем вычисления перемещений

$$\theta=\frac{dy}{dx}=-\frac{Plx}{2EJ}\left(2-\frac{x}{l}\right)-\frac{ql^2x}{6EJ}\left(3-3\frac{x}{l}+\frac{x^2}{l^2}\right), \qquad (15.14)$$

$$y=-\frac{Plx^2}{6EJ}\left(3-\frac{x}{l}\right)-\frac{ql^2x^2}{24EJ}\left(6-4\frac{x}{l}+\frac{x^2}{l^2}\right). \qquad (15.15)$$

Пользуясь этими выражениями, найдем наибольшие значения угла поворота и прогиба; так как инженера интересует наибольшее по абсолютной величине значение перемещения, то следует отыскивать как аналитический максимум функции y при $\theta=\frac{dy}{dx}=0$, так и наибольшее значение функций на границе участка. В нашем случае наибольшего значения по абсолютной величине y достигает в точке B, где θ не обращается в нуль. Аналитический же максимум функции y равен нулю в точке A.

Прогибы, вычисляемые в отдельных точках, будем обозначать буквой f с индексом, указывающим место прогиба. Для рассматриваемого случая в точке B при $x=l$

$$f_B=-\frac{Pl^3}{3EJ}-\frac{ql^4}{8EJ}. \qquad (15.16)$$

Знак минус означает, что прогиб направлен вниз. Наибольший угол поворота сечения будет, очевидно, в том же сечении; он равен

$$\theta_B=-\frac{Pl^2}{2EJ}-\frac{ql^3}{6EJ}, \qquad (15.17)$$

знак минус обозначает, что сечение B повернулось по часовой стрелке.

Оба ответа показывают раздельно части перемещений, зависящие от нагрузки P и от нагрузки q. При отсутствии одной из нагрузок обращается в нуль соответствующая часть выражения для перемещения.

Для того чтобы оценить числовую величину перемещений в балке, примем $P=2$ *Т*, $q=0{,}5$ *Т/м*, $l=2$ *м*, $E=2\cdot10^6$ *кГ/см*^{2} и допускаемое нормальное напряжение при изгибе $[\sigma]=1400$ *кГ/см*^{2}. Подберем сечение двутавровой балки по сортаменту.

Из условия прочности

$$W=\frac{M_{\max}}{[\sigma]}=\frac{\left(2\cdot 2+0,5\frac{2\cdot 2}{2}\right)10^5}{1400}=357\ см^3.$$

В сортаменте двутавровых балок (см. приложение) находим двутавр № 27 для которого $W=371$ $см^3$, $J=5010$ $см^4$. Вычисляем перемещения

$$\theta_B=-\left(\frac{2\cdot 2^2}{2}+0,5\frac{2^3}{6}\right)\frac{10^7}{2\cdot 10^6\cdot 5010}=\frac{1}{215}\ рад,$$

$$f_B=-\left(\frac{2\cdot 2^3}{3}+0,5\frac{2^4}{8}\right)\frac{10^9}{2\cdot 10^6\cdot 5010}=-0,63\ см.$$

Максимальный прогиб составляет $(0,63/200)=1/320$ долю пролета, а квадрат наибольшего угла поворота $(1/215)^2=1/46\,000$, т. е. ничтожен по сравнению с единицей в формуле (15.5).

§ 84. Интегрирование дифференциального уравнения изогнутой оси балки на двух опорах

Разберем вычисление перемещений для балки, свободно лежащей на двух опорах и загруженной на всем пролете сплошной нагрузкой q (рис. 221). Начало координат выберем в левом опорном сечении, ось x направим вправо. В этой задаче, в отличие от предыдущей, для составления выражения $M(x)$ надо найти опорные реакции.

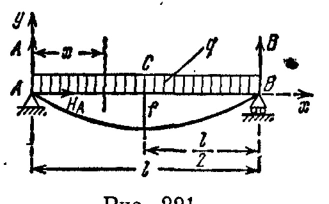


Рис. 221.

По симметрии

$$A=B=\frac{ql}{2},$$

а $H_A=0$. Последовательно вычисляем

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=M(x);\quad M(x)=+\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}=+\frac{q}{2}(lx-x^2),$$

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q}{2}(lx+x^2),$$

$$EJ\frac{dy}{dx}=\frac{q}{2}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)+C, \tag{15.18}$$

$$EJ_y=\frac{q}{2}\left[\frac{lx^3}{6}-\frac{x^4}{12}\right]+Cx+D. \tag{15.19}$$

Нам известны следующие значения прогибов:

на опоре A, т. е. при $x=0$ прогиб $y=0$;

на опоре B, т. е. при $x=l$ прогиб $y=0$.

Применяя формулу (15.19) сначала к сечению A, имеем

$$D=0;$$

применяя же ее к сечению B, получаем следующее уравнение:

$$0=\frac{q}{2}\left[\frac{l^4}{6}-\frac{l^4}{12}\right]+Cl,$$

откуда

$$C=-\frac{ql^3}{24}.$$

Формулы для y и $\frac{dy}{dx}$ принимают теперь вид

$$EJ\frac{dy}{dx}=\frac{q}{2}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)-\frac{ql^3}{24}=-\frac{ql^3}{24}\left[1-6\frac{x^2}{l^2}+4\frac{x^3}{l^3}\right], \quad (15.20)$$

$$EJy=\frac{q}{2}\left(\frac{lx^3}{6}-\frac{x^4}{12}\right)-\frac{ql^3}{24}x=-\frac{ql^3x}{24}\left[1-2\frac{x^2}{l^2}+\frac{x^3}{l^3}\right]. \quad (15.21)$$

Для отыскания наибольшего значения прогиба надо найти сечение, в котором $\theta=0$; по симметрии это будет среднее сечение; при подстановке в формулу (15.20) значения $\frac{x}{l}=\frac{1}{2}$ угол $\theta=\frac{dy}{dx}$ обращается в нуль; при этом

$$f_{\max}=-\frac{5ql^4}{384EJ}.$$

Наибольшие значения θ получаются для опорных сечений при $x=0$ и $x=l$:

$$\theta_{\max}=\mp\frac{ql^3}{24EJ}.$$

И в этом примере при определении произвольных постоянных интегрирования мы устанавливаем, что D/EJ есть прогиб балки в начале координат, а C/EJ — угол поворота опорного сечения A, совпадающего с началом координат.

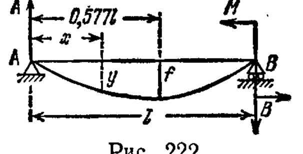


Рис. 222.

Во всех рассмотренных примерах, если мы направляем ось y вверх, а ось x вправо, то *отрицательное* значение θ соответствует вращению сечения *по часовой стрелке*, *положительное* — *против* часовой стрелки.

Рассмотрим еще один случай вычисления перемещений для балки, свободно лежащей на двух опорах. Нагрузим эту балку парой сил с моментом M, приложенной в правом опорном сечении (рис. 222). Реакции A и B образуют пару сил с тем же моментом M и равны

$$A=B=\frac{M}{l}.$$

Расположим начало координат на левой опоре; тогда получим

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=M(x)=+Ax=+\frac{M}{l}x,$$

$$EJ\frac{dy}{dx}=\frac{Mx^2}{l\cdot 2}+C, \qquad EJy=\frac{Mx^3}{l\cdot 6}+Cx+D.$$

Постоянные интегрирования определяются из условий, выражающих равенство нулю прогибов на опорах A и B:

при $x=0$ прогиб $y=0$, откуда $D=0$;

при $x=l$ прогиб $y=0$, откуда $C=-Ml/6$. Таким образом,

$$\theta=\frac{dy}{dx}=-\frac{Ml}{6EJ}\left[1-3\frac{x^2}{l^2}\right], \qquad (15.22)$$

$$y=-\frac{Mlx}{6EJ}\left[1-\frac{x^2}{l^2}\right].$$

Сечению с наибольшим прогибом соответствует $\frac{dy}{dx}=0$, поэтому

$$1-3\frac{x_0^2}{l^2}=0;$$

абсцисса этого сечения x_0 равна

$$x_0=\frac{l}{\sqrt{3}}=0,577l. \qquad (15.23)$$

Наибольший прогиб равен

$$f=-\frac{Ml\cdot l}{6\sqrt{3}EJ}\left[1-\frac{l^2}{3l^2}\right]=-\frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EJ}=-\frac{Ml^2}{15,6EJ},$$

прогиб же посредине пролета равен

$$f_{l/2}=-\frac{Ml}{12EJ}\left[1-\frac{l^2}{4l^2}\right]=-\frac{Ml^2}{16EJ}.$$

Разница с наибольшим прогибом составляет всего 2,5%; таким образом, даже при таком резко несимметричном случае нагрузки за наибольший прогиб *для балки на двух опорах можно* с достаточной *точностью принимать прогиб посредине пролета.*

§ 85. Метод уравнивания постоянных интегрирования дифференциальных уравнений при нескольких участках загружения балки

В разобранных ранее случаях имелся лишь один участок загружения балки; постоянных интегрирования было две: C и D. Каждый новый участок загружения добавляет еще две произвольные постоянные, а потому решение задачи усложняется, если не ввести некоторые правила, которые сводят число постоянных интегрирования к двум, независимо от числа участков загружения.

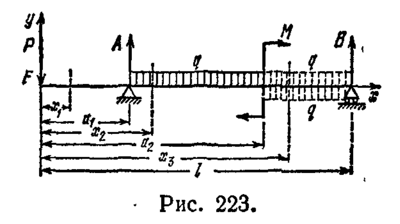


Рис. 223.

Рассмотрим балку с тремя участками загружения (рис. 223). Условимся *начало координат для всех участков брать в одной точке — в левом или в правом конце балки и рассматривать при составлении выражений изгибающего момента ту часть балки, в которой находится начало координат.*

Примем начало координат в точке F.

Напишем уравнение изогнутой оси первого участка балки и дважды его проинтегрируем:

$$EJy_1'' = -Px_1,$$

$$EJy_1' = -P\frac{x_1^2}{2} + C_1, \qquad (15.24)$$

$$EJy_1 = -P\frac{x_1^3}{6} + C_1x_1 + D_1. \qquad (15.25)$$

Выражения изгибающего момента второго участка надо составить так, чтобы в пограничном сечении (над опорой A) слагаемые уравнений EJy'', EJy' и EJy совпадали с аналогичными слагаемыми уравнений первого участка. Это произойдет, если *скобку* $(x-a)$, *являющуюся плечом нагрузки, отсутствовавшей на первом участке, интегрировать по* $d(x-a)$ *или, как говорят, не раскрывая скобок.* Поясним, что x — абсцисса текущего сечения рассматриваемого участка; a — абсцисса начала этого участка.

Запишем три уравнения второго участка:

$$EJy_2'' = -Px_2 + A(x_2 - a_1) - q\frac{(x_2 - a_1)^2}{2},$$

$$EJy_2' = -P\frac{x_2^2}{2} + A\frac{(x_2 - a_1)^2}{2} - q\frac{(x_2 - a_1)^3}{6} + C_2, \qquad (15.26)$$

$$EJy_2 = -P\frac{x_2^3}{6} + A\frac{(x^2 - a_1)^3}{6} - q\frac{(x_2 - a_1)^4}{24} + C_2x_2 + D_2. \qquad (15.27)$$

В сечении над опорой A углы поворота, вычисленные из уравнений (15.24) и (15.26), должны получаться одинаковыми, т. е. ось балки должна проходить над опорой A плавно. Должны быть также равны и прогибы на опоре, определяемые уравнениями (15.25) и (15.27). Иными словами, при $x_1 = x_2 = a_1$ $y_1' = y_2'$ и $y_1 = y_2$. Из этих условий находим $C_1 = C_2 = C$ и $D_1 = D_2 = D$.

Перейдем к третьему участку. Распределенная нагрузка на третьем участке отсутствует. Чтобы сохранить выражения изгибающего момента от распределенной нагрузки такими же, как на предыдущем участке, нужно продолжить распределенную нагрузку второго участка до конца балки и, чтобы компенсировать это добавление нагрузки, добавить такую же нагрузку другого знака. Равновесие балки от этого не нарушится, не изменятся и величины опорных реакций балки.

Чтобы новая нагрузка в виде сосредоточенного момента M не вызвала изменения в структуре формул всех трех уравнений третьего участка по сравнению со вторым, следует M умножить на скобку $(x-a)$ в нулевой степени, что не изменит ни размерности сил, ни условий равновесия.

Напишем теперь с учетом всего сказанного уравнение изогнутой оси третьего участка и дважды его проинтегрируем:

$$EJy_3'' = -Px_3 + A(x_3 - a_1) - q\frac{(x_3-a_1)^2}{2} + q\frac{(x_3-a_2)^2}{2} + M(x_3-a_2)^0,$$

$$EJy_3' = -P\frac{x_3^2}{2} + A\frac{(x_3-a_1)^2}{2} - q\frac{(x_3-a_1)^3}{6} + q\frac{(x_3-a_2)^3}{6} + M(x_3-a_2) + C_3, \quad (15.28)$$

$$EJy_3 = -P\frac{x_3^3}{6} + A\frac{(x_3-a_1)^3}{6} - q\frac{(x_3-a_1)^4}{24} + q\frac{(x_3-a_2)^4}{24} + M\frac{(x_3-a_2)^2}{2} + C_3x_3 + D_3. \quad (15.29)$$

В пограничном сечении (где приложен M) имеются следующие условия для уравнивания постоянных интегрирования: при $x_2=x_3=a_2$ $y_2'=y_3'$ и $y_2=y_3$. Подставляя первое из этих условий в уравнения (15.26) и (15.28), находим, что $C_2=C_3=C$. Подставив второе условие в уравнения (15.27) и (15.29), определим, что $D_2=D_3=D$.

Постоянные интегрирования сведены к двум: C и D. Для их определения служат условия: прогиб балки на опорах A и B равен нулю, т. е. при $x_1=a_1$ $y_1=0$ и при $x_3=l$ $y_3=0$. После подстановки этих условий в уравнения] (15.25) и (15.29) получим следующие два уравнения:

$$-P\frac{a_1^3}{6} + Ca_1 + D = 0, \quad (15.30)$$

$$-P\frac{l^3}{6} + A\frac{(l-a_1)^3}{6} - q\frac{(l-a_1)^4}{24} + q\frac{(l-a_2)^4}{24} + M\frac{(l-a_3)^2}{2} + Cl + D = 0. \quad (15.31)$$

Совместное решение уравнений (15.30) и (15.31) определит величину произвольных постоянных C и D.

Мы рассматривали все три участка и для каждого писали по три уравнения для того, чтобы показать, как привести постоянные интегрирования к двум: C и D. Решая теперь любую задачу, нет необходимости вновь писать все уравнения для каждого из участков; вполне достаточно написать три уравнения только для участка, наиболее удаленного от начала координат. Все слагаемые правой части уравнений будут относиться именно к этому участку. Здесь же следует отметить, какие слагаемые относятся к первым участкам. Одна из форм таких отметок показана в двух следующих

строчках:

$$EJy' = -P\frac{x^2}{2}\Big|_1 + A\frac{(x-a_1)^2}{2} - q\frac{(x-a_1)^3}{6}\Big|_2 +$$
$$+ q\frac{(x-a_2)^3}{6} + M(x-a_2)\Big|_3 + C, \quad (15.32)$$

$$EJy = -P\frac{x^3}{6}\Big|_1 + A\frac{(x-a_1)^3}{6} - q\frac{(x-a_1)^4}{24}\Big|_2 +$$
$$+ q\frac{(x-a_2)^4}{24} + M\frac{(x-a_2)^2}{2}\Big|_3 + Cx + D. \quad (15.33)$$

C и D относятся к каждому из участков. Иногда C, Cx и D помещают в начале правой стороны уравнений (15.32) и (15.33).

Метод уравнивания постоянных интегрирования был впервые предложен Клебшем.

§ 86. Метод начальных параметров при определении перемещений в балках

Если рассмотреть уравнения углов поворота (15.32) и прогибов (15.33), полученные в результате соблюдения правил метода Клебша, перечисленных в предыдущем параграфе, то можно заметить, что нагрузка в виде сосредоточенного момента M отразилась в этих уравнениях соответственно в форме

$$M(x-a) \quad \text{и} \quad M\frac{(x-a)^2}{2}.$$

Значение скобок было объяснено ранее в § 85. Напомним, что x — абсцисса текущего сечения рассматриваемого участка, а a — абсцисса начала этого участка.

Сосредоточенная сила P, а также реакция опоры A нашли отражение в тех же уравнениях в форме

$$P\frac{(x-a)^2}{2} \quad \text{и} \quad P\frac{(x-a)^3}{6}.$$

Равномерно распределенная нагрузка q вошла в те же уравнения в форме

$$q\frac{(x-a)^3}{6} \quad \text{и} \quad P\frac{(x-a)^4}{24}.$$

В § 83 упоминалось, что постоянные интегрирования C и D представляют собой увеличенные в EJ раз соответственно угол поворота сечения в начале координат (назовем его θ_0) и прогиб в том же месте (назовем его y_0). Можем записать $C=EJ\theta_0$ и $D=EJy_0$.

Учитывая, что при многих участках загружения может быть несколько сосредоточенных моментов M, несколько сосредоточенных

сил P, а также и распределенная нагрузка q может быть задана на нескольких участках, уравнения углов поворота и прогибов (15.32) и (15.33) можно записать в таком более общем виде:

$$EJy' = EJ\theta_0 + \sum M(x-a) + \sum P\frac{(x-a)^2}{2} + \sum q\frac{(x-a)^3}{6}, \qquad (15.34)$$

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 x + \sum M\frac{(x-a)^2}{2} + \sum P\frac{(x-a)^3}{6} + \sum q\frac{(x-a)^4}{24}. \qquad (15.35)$$

Такой метод составления уравнений перемещений *называется методом начальных параметров*, а сами *уравнения* этого метода *общими уравнениями метода начальных параметров.*

Этот метод впервые упоминается в работах профессора Н. П. Пузыревского и академика А. Н. Крылова.

Применение этого метода показано на примере в следующем параграфе.

§ 87. Балка на двух опорах, несимметрично загруженная силой

Напишем уравнения перемещений по методу начальных параметров (15.34) и (15.35) для балки, показанной на рис. 224;

$$EJy' = EJ\theta_0 + A\frac{x^2}{2} - P\frac{(x-a)^2}{2}, \qquad (15.36)$$

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 x + A\frac{x^3}{6} - P\frac{(x-a)^3}{6}. \qquad (15.37)$$

По первому условию (при $x=0$ $y_A=0$) уравнение (15.37) обращается в тождество: $0=0$. Второе условие (при $x=l$ $y_B=0$) преображает уравнение (15.37) в следующее:

Рис. 224.

$$EJ\theta_A l + A\frac{l^3}{6} - P\frac{(l-a)^3}{6} = 0.$$

Сделав подстановки: $A=\frac{Pb}{l}$ и $(l-a)=b$, получим для начального параметра — угла поворота на опоре A следующее выражение:

$$\theta_A = -\frac{Pb}{6EJl}(l^2-b^2).$$

Зная теперь величину угла поворота и прогиба в начале координат и учитывая указанные две подстановки, переписываем уравнения (15.36) и (15.37) в окончательном виде

$$EJy' = -\frac{Pb}{6l}(l^2-b^2) + \frac{Pbx^2}{2l} - \frac{P(x-a)^2}{2}, \qquad (15.38)$$

$$EJy = -\frac{Pbx}{6l}(l^2-b^2) + \frac{Pbx^3}{6l} - \frac{P(x-a)^3}{6}. \qquad (15.39)$$

Так как на рис. 224 принято, что $a>b$, то наибольший прогиб будет на первом участке, между серединой балки и точкой приложения силы P. Следовательно, последние слагаемые уравнений, содержащие множитель $(x-a)$, в дальнейшие вычисления нами включаться не будут, как относящиеся ко второму участку.

В сечении с наибольшим прогибом (при $x=x_C$) угол поворота равен нулю, следовательно,

$$EJy' = -\frac{Pb}{6l}(l^2-b^2)+\frac{Pbx_C^2}{2l}=0,$$

откуда

$$x_C=\sqrt{\frac{l^2-b^2}{3}}. \qquad (15.40)$$

Вычислим теперь величину максимального прогиба в этом сечении:

$$EJf_{max}=-\frac{Pb(l^2-b^2)\sqrt{l^2-b^2}}{6l\sqrt{3}}+\frac{Pb(l^2-b^2)\sqrt{l^2-b^2}}{6l\,3\sqrt{3}},$$

$$f_{max}=-\frac{Pb\sqrt{(l^2-b^2)^3}\sqrt{3}}{27EJl}=-\frac{Pbl^2\sqrt{3}\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{l^2}\right)^3}}{27EJ}. \qquad (15.41)$$

Если силу P поместить посредине пролета, т. е. принять $a=b=$ $=0,5\,l$, то величина прогиба под силой окажется равной

$$f_{l/2}=-\frac{Pl^3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}}{54EJ\cdot 8}=-\frac{Pl^3}{48EJ}. \qquad (15.42)$$

Если же силу P передвигать к правой опоре и приближать в пределе расстояние b к нулю, то при $b\to 0$

$$x_C=\frac{l}{\sqrt{3}}=0,577\,l.$$

Таким образом, при перемещении силы P от середины пролета до опоры B точка с наибольшим прогибом изменяет свою абсциссу всего лишь в пределах от $0,5\,l$ до $0,577\,l$ (рис. 225) (см. также формулу (15.23)).

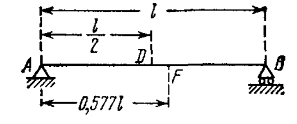


Рис. 225.

При расположении силы P по схеме рис. 224 величина прогиба посредине пролета равна

$$f_{l/2}=-\frac{Pb}{48EJ}(3l^2-4b^2). \qquad (15.43)$$

Подставив численные значения всех величин в формулы (15.41) и (15.43), можно убедиться, что разница между этими двумя прогибами крайне незначительна, что позволяет в практических подсчетах вычислять только величину прогиба посредине пролета и не отыскивать место и величину наибольшего прогиба. Это справедливо во всех случаях, когда эпюра изгибающего момента однозначна.

§ 88. Интегрирование дифференциального уравнения для балки с шарниром

В предыдущих примерах участки при составлении уравнения изогнутой оси соответствовали участкам эпюры изгибающих моментов. В сечении, где расположен шарнир, нарушается *плавность* оси балки. Выражение изгибающего момента по обе стороны шарнира будет одним и тем же, но для интегрирования уравнений изогнутой оси участок с шарниром придется разделить на два. В шарнире должны быть равны между собой лишь *прогибы* соединяемых частей; *углы же поворота* сечений, примыкающих к шарниру, будут различны. Поэтому уравнение изогнутой оси балки будет различным для участков балки, разделенных шарниром.

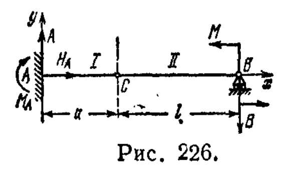


Рис. 226.

Рассмотрим балку, изображенную на рис. 226; в сечении C помещен шарнир; для простоты вычислений нагрузим балку только парой сил M в сечении B. Реакцию B легко определить, приравняв нулю сумму моментов относительно шарнира C всех сил, расположенных справа от шарнира (т. е. сил B и M). Получим $B=M/l$.

Реакция A определится из суммы проекций на вертикаль всех сил, действующих на балку ACB (т. е. сил A и B). Получим $A=M/l$. Реактивный момент M_A равен сумме моментов относительно точки A сил M и B:

$$M_A=-M\frac{a}{l}.$$

Начало координат выберем в точке A. Изгибающий момент в *любом* сечении балки между A и B выражается формулой

$$M(x)=\frac{M}{l}x-\frac{M}{l}a=\frac{M}{l}(x-a).$$

Для получения же уравнения изогнутой оси надо рассмотреть два участка AC и CB. Дифференциальные уравнения и их интегралы имеют вид:

Первый участок	Второй участок
$EJ\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{M}{l}(x-a),$	$EJ\frac{d^2y_2}{dx^2}=\frac{M}{l}(x-a),$
$EJ\frac{dy_1}{dx}=\frac{M}{l}\left(\frac{x^2}{2}-ax\right)+C_1,$	$EJ\frac{dy_2}{dx}=\frac{M}{l}\left(\frac{x^2}{2}-ax\right)+C_2,$
$EJy_1=\frac{M}{l}\left(\frac{x^3}{6}-\frac{ax^2}{2}\right)+$ $+C_1x+D_1.$	$EJy_2=\frac{M}{l}\left(\frac{x^3}{6}-\frac{ax^2}{2}\right)+$ $+C_2x+D_2.$

Для определения постоянных интегрирования имеем четыре условия:

сечение A: при $x=0$ $\quad y_1'=0$ и $y_1=0$;
сечение C: при $x=a$ $\quad y_1=y_2$;
сечение B: при $x=a+l$ $\quad y_2=0$.

Из первых двух получаем

$$C_1=0;\ D_1=0.$$

Из двух последних

$$\frac{M}{l}\left(\frac{a^3}{6}-\frac{a^3}{2}\right)=\frac{M}{l}\left(\frac{a^3}{6}-\frac{a^3}{2}\right)+C_2a+D_2,$$

$$\frac{M}{l}\left[\frac{(a+l)^3}{6}-\frac{a(a+l)^2}{2}\right]+C_2(a+l)+D_2=0.$$

Отсюда

$$C_2=-\frac{M(a+l)^2(l-2a)}{6l^2};\quad D_2=\frac{M(a+l)^2(l-2a)a}{6l^2}.$$

Для балки, показанной на рис. 227, наметим ход решения задачи на определение перемещений. Балка имеет шесть участков и, следовательно, при решении задачи мы получим двенадцать произвольных постоянных. Сечения раздела нагрузки, опоры и шарниры дадут нам необходимые двенадцать условий. Конец A дает два условия: угол поворота равен нулю и прогиб равен нулю. Правая опора — одно условие: прогиб равен нулю. Шарниры B и D по одному условию: прогибы левого и правого участков в сечениях шарниров равны между собой.

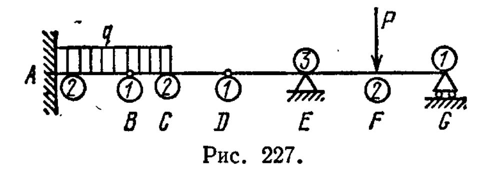


Рис. 227.

Сечения раздела нагрузки (сечение C, где обрывается распределенная нагрузка, и сечение F, где приложена сосредоточенная сила P) дадут по два уравнения: прогибы левого и правого участков в этих сечениях равны между собой и углы поворота тех же участков равны между собой. Шарнирная промежуточная опора E дает три условия: равенство прогибов между собой, равенство углов поворота между собой и равенство любого из прогибов в этом сечении нулю.

На рис. 227 в кружках указано количество уравнений в каждом рассмотренном сечении.

§ 89. Сложение действия сил

Закон Гука справедлив не только для материала, но и для всей балки в целом; прогибы и углы поворота прямо пропорциональны нагрузкам. Это — следствие линейной зависимости изгибающего момента от нагрузок, а кривизны — от изгибающего момента. Для балки, защемленной концом и нагруженной сплошной нагрузкой q и сосредоточенной силой P на свободном конце, изгибающий момент в сечении на расстоянии x от защемления выражается линейной *по отношению к нагрузкам* формулой

$$M(x)=-P(l-x)-q\frac{(l-x)^2}{2}; \qquad (15.10)$$

зависимость же кривизны от момента тоже линейна:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=M(x)=-\left[P(l-x)+q\frac{(l-x)^2}{2}\right]; \qquad (15.11)$$

поэтому после интегрирования по x получаем линейную зависимость прогиба от нагрузок:

$$y=-\frac{Plx^2}{6EJ}\left[3-\frac{x}{l}\right]-\frac{ql^2x^2}{24EJ}\left[6-4\frac{x}{l}+\frac{x^2}{l^2}\right].$$

Это обстоятельство позволяет в случае сложной нагрузки получать уравнение изогнутой оси как сумму ординат кривых, соответствующих частным нагрузкам. Особенно упрощается в некоторых случаях вычисление наибольшего прогиба.

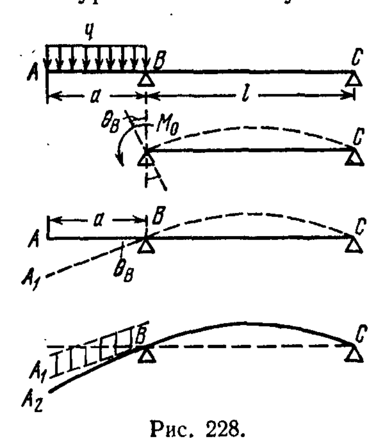


Рис. 228.

Рассмотрим применение метода сложения действия сил для определения перемещений конца консоли A балки ABC (рис. 228). Заменив влияние на участок BC нагрузки q, расположенной на консоли AB, моментом $M_0=-qa^2/2$, мы можем, пользуясь формулой § 84 (15.22), вычислить угол поворота сечения балки на опоре B:

$$\theta_B=\frac{M_0l}{3EJ}=\frac{qa^2l}{6EJ}.$$

Прямая ось консоли AB при повороте сечения B наклонится на тот же угол θ_B, и величина прогиба конца консоли A составит

$$f'_A=\overline{AA_1}=-\theta_B\cdot a=-\frac{M_0la}{3EJ}=-\frac{qla^3}{6EJ}.$$

Консоль AB под действием нагрузки q не останется прямой, а изогнется, заняв положение A_2B (не изменив, однако, угла поворота θ_B у точки B), и прогиб на конце консоли A при этом изгибе составит, как для балки, защемленной одним концом (см. § 83, формула (15.16)):

$$f''_A=\overline{A_1A_2}=-\frac{qa^4}{8EJ}.$$

Полный прогиб конца консоли A будет

$$f_A=f'_A+f''_A=-\frac{qla^3}{6EJ}-\frac{qa^4}{8EJ}=-\frac{qa^3}{24EJ}(4l+3a).$$

Определение перемещений балок с шарнирами может быть проведено также с применением метода сложения действия сил. Для это-

го балку нужно расчленить на несколько составляющих ее балок, рассмотреть их порознь и просуммировать вычисленные раздельно перемещения.

Так, например, схему балки рассмотренной в § 88 (рис. 229, *а*), можно заменить схемой рис. 229, *б*. В этой схеме «подвесная» балка CB опирается левым концом C на правый конец C «основной» балки AC. Действие шарнира C может быть заменено силами C (рис. 229, *в*, *г*).

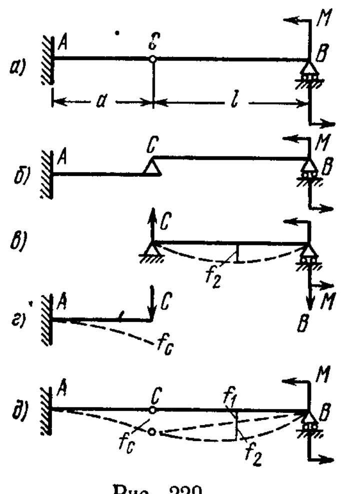


Рис. 229.

Определение величины силы C нужно произвести, рассмотрев равновесие балки CB; для этой балки сила C является силой *пассивной* — реакцией балки AC. На балку AC будет действовать той же величины *активная* сила C — давление балки CB на балку AC.

Прогиб балки CB, отдельно взятой, в любой точке определится рассмотрением схемы рис. 229, *в*. Прогиб балки AC определится рассмотрением схемы рис. 229, *г*. Обе эти схемы нами уже рассматривались ранее в §§ 83 и 84.

Деформация заданной балки ACB показана на рис. 229, *д*. Участок AC балки ACB имеет на всем протяжении те же прогибы, что и отдельно рассмотренная балка AC. Прогибы же участка CB балки ACB представят суммы двух прогибов: прогиба f_1, составляющего часть прогиба f_C (прямо пропорциональную удалению от точки B) и прогиба f_2, вычисленного для схемы балки CB (рис. 229, *в*).

§ 90. Дифференциальные зависимости при изгибе

В §§ 57 и 82 были получены дифференциальные зависимости для сплошной нагрузки $q(x)$, поперечной силы $Q(x)$, изгибающего момента $M(x)$, угла поворота сечения θ и прогиба y:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x); \quad \frac{dQ(x)}{dx} = q(x);$$

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = M(x); \quad \frac{dy}{dx} = \theta.$$

Эти зависимости, после некоторого преобразования, можно расположить последовательно:

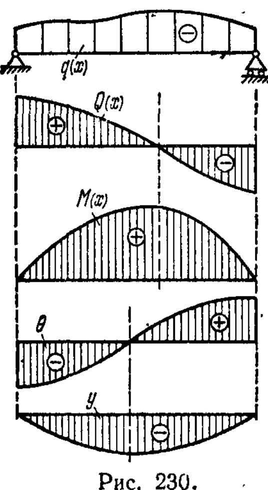


Рис. 230.

$$\frac{d}{dx}(EJy)=EJ\theta,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(EJy)=\frac{d}{dx}(EJ\theta)=M(x),$$

$$\frac{d^3}{dx^3}(EJy)=\frac{d^2}{dx^2}(EJ\theta)=\frac{d}{dx}M(x)=Q(x),$$

$$\frac{d^4}{dx^4}(EJy)=\frac{d^3}{dx^3}(EJ\theta)=\frac{d^2}{dx^2}M(x)=\frac{d}{dx}Q(x)=$$
$$=q(x).$$

Из этих уравнений видно, что, зная нагрузку $q(x)$ и устройство опор балки, можно *последовательным интегрированием* получить величины $Q(x)$, $M(x)$, $EJ\theta$ и EJy; обратно, зная уравнение изогнутой оси, можно путем *последовательного дифференцирования* по x из функции EJy получить $EJ\theta$, $M(x)$, $Q(x)$ и $q(x)$. Для графического изображения этих зависимостей условимся положительные значения всех перечисленных величин откладывать вверх, а отрицательные — вниз; положительное направление оси x примем вправо, поворот сечения по часовой стрелке — отрицательным, а против — положительным. На рис. 230 в качестве примера изображены графики изменения всех величин, характеризующих изгиб, для балки шарнирно-опертой и загруженной неравномерно распределенной нагрузкой $q(x)$ (отрицательной, направленной вниз).

Глава XVI

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

§ 91. Графоаналитический метод

Метод интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси дает уравнения прогибов и уравнения углов поворота, при помощи которых можно вычислить прогиб и угол поворота в любом сечении балки.

При решении целого ряда задач (статически неопределимые балки, вычисление наибольшего прогиба) достаточно уметь найти прогиб и угол поворота лишь для некоторых определенных сечений. В этих случаях уместно применение *графоаналитического метода.* Этот способ основан на сходстве дифференциальных зависимо-

стей, связывающих прогиб, изгибающий момент и интенсивность сплошной нагрузки.

Пусть мы имеем какую угодно балку с произвольной нагрузкой (рис. 231). Дифференциальным уравнением изогнутой оси этой балки является (§ 82)

$$\frac{d^2(EJy)}{dx^2}=M(x). \qquad (16.1)$$

Под нашей балкой изобразим вторую балку той же длины, нагруженную некоторой, пока неизвестной, сплошной нагрузкой q_f, положительное направление которой принято вверх; устройство опор этой балки тоже оставим пока неопределенным; отметим лишь, что опорные реакции будут уравновешивать нагрузку q_f. Эту вторую балку назовем воображаемой, фиктивной; все величины, относящиеся к ней, будем обозначать значком f. Для этой воображаемой балки вычислим величину изгибающего момента M_f в каждом сечении тоже путем интегрирования, пользуясь дифференциальным уравнением, связывающим изгибающий момент и интенсивность сплошной нагрузки (§§ 57 и 90):

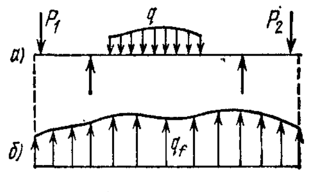


Рис. 231.

$$\frac{d^2M_f}{dx^2}=q_f. \qquad (16.2)$$

Проведем сопоставление уравнений (16.1) и (16.2). Если принять

$$q_f=M(x),$$

т. е. загрузить фиктивную балку фиктивной нагрузкой, меняющейся по закону изгибающего момента действительной балки, то

$$\frac{d^2(EJy)}{dx^2}=\frac{d^2M_f}{dx^2}.$$

Если при интегрировании обеих сторон уравнения добиться равенства произвольных постоянных левой и правой частей уравнения, т. е. $C_л=C_п$ и $D_л=D_п$, то получим

$$\frac{d(EJy)}{dx}=\frac{dM_f}{dx}, \quad EJy=M_f.$$

Учитывая, что $\frac{dM_f}{dx}=Q_f$ и решая эти выражения относительно y и θ, получим формулы

$$y=\frac{M_f}{EJ}, \qquad (16.3)$$

$$\theta=\frac{Q_f}{EJ}. \qquad (16.4)$$

Прогиб сечения действительной балки (от заданной нагрузки) *равен изгибающему моменту в том же сечении фиктивной балки*

(от фиктивной нагрузки), *деленному на жесткость действительной балки.*

Угол поворота действительной балки (от заданной нагрузки) *равен поперечной силе в том же сечении фиктивной балки* (от фиктивной нагрузки), *деленной на жесткость действительной балки.*

В аналитическом способе определения перемещений произвольные постоянные находились по условиям на границах, т. е. по условиям равенства нулю прогибов в опорных сечениях и равенства перемещений между собой в сечениях, общих для двух смежных участков балки.

Таблица 13

Условия образования фиктивных балок

Действительная балка		Фиктивная балка	
Наименование опоры	Условия для y и θ	Требуемые условия для M_f и Q_f	Отвечающее этим условиям опирание фиктивной балки
Шарнирная концевая опора (прогиба нет; поворот сечения возможен)	$y=0$ $\theta\neq 0$	$M_f=0$ $Q_f\neq 0$	Шарнирная концевая опора (момента нет; возможна опорная реакция)
Защемленный конец балки (нет прогиба и нет поворота)	$y=0$ $\theta=0$	$M_f=0$ $Q_f=0$	Свободный конец балки (отсутствуют и сосредоточенная сила и момент)
Свободный конец балки (возможны и прогиб и поворот сечения)	$y\neq 0$ $\theta\neq 0$	$M_f\neq 0$ $Q_f\neq 0$	Защемленный конец балки (имеются момент защемления и реакция)
Промежуточная опора (прогиба нет; поворот сечения возможен)	$y=0$ $\theta\neq 0$	$M_f=0$ $Q_f\neq 0$	Промежуточный шарнир (момента нет; шарнир передает давление)
Промежуточный шарнир (возможны и прогиб и поворот сечения)	$y\neq 0$ $\theta\neq 0$	$M_f\neq 0$ $Q_f\neq 0$	Промежуточная опора (в опорном сечении возможны и момент и реакция)

В рассматриваемом способе добиться равенства между собой произвольных постоянных при интегрировании уравнений (16.1) и (16.2) можно путем такого закрепления концов (или промежуточных сечений) фиктивной балки, которое удовлетворяло бы следующим условиям, непосредственно вытекающим из выражений (16.3) и (16.4):

1) если прогиб действительной балки f равен нулю, то в том же сечении фиктивной балки фиктивный изгибающий момент должен быть равен нулю;

2) если угол поворота действительной балки θ равен нулю, то в том же сечении фиктивной балки фиктивная поперечная сила должна быть равна нулю;

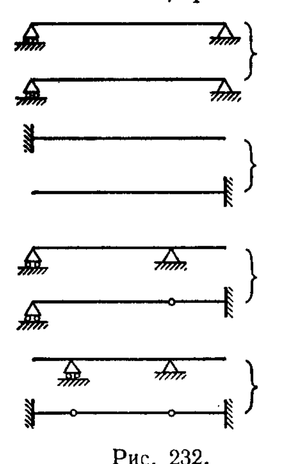


Рис. 232.

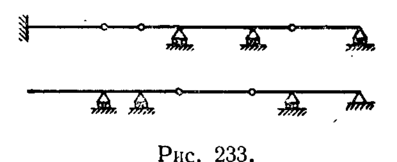


Рис. 233.

3) если прогиб или угол поворота действительной балки не равен нулю, то соответствующие им M_f или Q_f также не должны быть равны нулю.

В таблице 13 приводятся условия для всех случаев опирания действительной балки с указанием соответствующих этим условиям закреплений тех же сечений фиктивной балки. Действительная и фиктивная балки, связанные условиями этой таблицы, называются сопряженными. На рис. 232 для наиболее распространенных статически определимых балок показаны сочетания действительных и фиктивных балок. В каждой паре сопряженных балок любая может быть принята за действительную, тогда вторая из них будет фиктивной, что легко можно проверить, обратившись к таблице 13.

Для многопролетных балок с шарнирами выбор сопряженной балки можно проследить по рис. 233.

Следует заметить, что статически определимой действительной балке всегда соответствует статически определимая фиктивная балка.

Таким образом, для того чтобы найти прогиб y или угол θ поворота какого-либо сечения заданной (действительной) балки, нужно последовательно выполнять следующие операции:

а) вычертить схему заданной балки с заданной нагрузкой;

б) построить эпюру изгибающего момента $M(x)$;

в) принять нулевую линию эпюры $M(x)$ за ось фиктивной балки, а эпюру $M(x)$ за фиктивную нагрузку q_f; при положительных зна-

чениях изгибающего момента ординаты нагрузки q_f направить вверх, при отрицательных — вниз;

г) показать опоры фиктивной балки в соответствии с условиями таблицы 13 и рис. 232 или 233;

д) подсчитать величину опорных реакций фиктивной балки от фиктивной нагрузки (т. е. фиктивных опорных реакций); для балок, защемленных одним концом, этого можно не делать;

е) подсчитать величину изгибающего момента M_f в сечении фиктивной балки с той же абсциссой, что и сечение, где отыскивается прогиб f;

ж) подсчитать величину поперечной силы Q_f в сечении фиктивной балки с той же абсциссой, что и сечение, где отыскивается угол поворота θ;

з) определить f и θ по формулам (16.3) и (16.4).

Графоаналитический метод определения перемещений освобождает нас от необходимости нахождения произвольных постоянных в каждом частном случае и сразу при использовании данных таблицы 13 и рис. 232 или 233 дает решение, согласованное с определенными начальными условиями.

Фиктивные моменты имеют размерность [сила·длина^3]; фиктивные поперечные силы — [сила·длина^2]; интенсивность фиктивной нагрузки измеряется в единицах — [сила·длина].

§ 92. Примеры определения перемещений графоаналитическим методом

Найдем прогиб сечения B балки AB, показанной на рис. 234. Эпюра моментов имеет вид треугольника с наибольшей ординатой в сечении A, равной $-Pl$. Ось абсцисс эпюры моментов примем за ось фиктивной балки; превратим эпюру в фиктивную нагрузку: для этого на ординатах поставим стрелки, направленные вниз, так как ординаты эпюры моментов отрицательны.

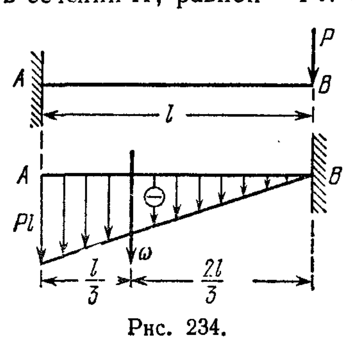


Рис. 234.

Следуя указаниям таблицы 13, покажем защемленный конец в точке B фиктивной балки и свободный конец в точке A.

Далее надо вычислить изгибающий момент в сечении B фиктивной балки. Момент треугольной нагрузки относительно точки B равен произведению площади ω нагрузки на расстояние ее центра тяжести от точки B:

$$M_{fB} = -\frac{1}{2} Pl \cdot l \cdot \frac{2}{3} l = -\frac{Pl^3}{3}.$$

Деля это выражение на EJ, получаем прогиб в точке B:

$$f_B = -\frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Величина прогиба совпала с результатом, полученным в § 83.

Поперечная сила в сечении B фиктивной балки численно равна площади всей треугольной нагрузки

$$Q_f = -\frac{1}{2}Pl\cdot l = -\frac{Pl^2}{2},$$

а угол поворота сечения B действительной балки равен

$$\theta_B = \frac{Q_f}{EJ} = -\frac{Pl^2}{2EJ}.$$

Определим для балки на двух опорах, загруженной посредине пролета силой P (рис. 235), прогиб в точке приложения силы.

Эпюра изгибающего момента для действительной балки изобразится треугольником с ординатой в сечении приложения силы $+\frac{Pl}{4}$; превращаем эпюру в фиктивную нагрузку, направляя стрелки в этом случае вверх, так как ординаты эпюры изгибающего момента положительны.

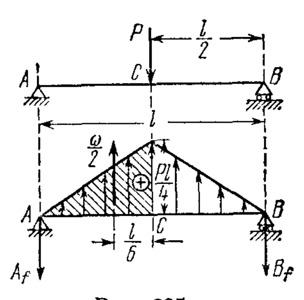


Рис. 235.

Устройство опор фиктивной балки определим по данным таблицы 13 из условий закрепления действительной балки. Реакции опор фиктивной балки по симметрии будут равны между собой, а каждая равна половине всей нагрузки:

$$A_f = B_f = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{Pl}{4}l = \frac{Pl^2}{16}.$$

Изгибающий момент в сечении C равен моменту реакции (со знаком минус) плюс момент половины треугольной нагрузки $\left(\text{с плечом } \frac{l}{6}\right)$:

$$M_{fC} = -A_f\cdot\frac{l}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{Pl}{4}\cdot l\cdot\frac{l}{6} = -\frac{Pl^2}{16}\cdot\frac{l}{2} + \frac{Pl^2}{16}\cdot\frac{l}{6} = -\frac{Pl^3}{48}.$$

Отсюда

$$f_C = -\frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Угол поворота сечения на левой опоре будет равен

$$\theta_A = \frac{Q_{fA}}{EJ} = -\frac{A_f}{EJ} = -\frac{Pl^2}{16EJ},$$

так как поперечная сила в опорном сечении равна опорной реакции (в нашем случае со знаком минус, поскольку R_{Af} направлена вниз).

Для опоры B

$$\theta_B = +\frac{Pl^2}{16EJ}.$$

Как видно из рассмотренных примеров, при выбранных условиях для знака фиктивных нагрузок, изгибающих моментов и поперечных сил знак минус в формуле для прогибов соответствует, как и раньше, направлению вниз, а в формуле для углов поворота — вращению по часовой стрелке; знак плюс соответствует обратным направлениям.

Найдем графоаналитическим методом прогибы посредине пролета и на концах консолей для балки, показанной на рис. 236.

Эпюра изгибающих моментов имеет вид трапеции с наибольшими ординатами

Рис. 236.

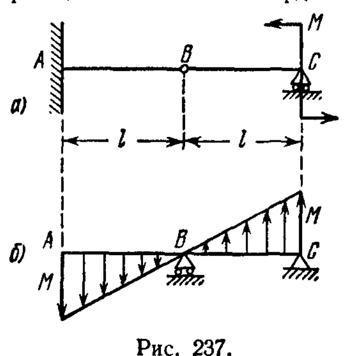


Рис. 237.

$M=-Pa$. Превращаем эпюру в грузовую площадь, направляя нагрузку вниз. Фиктивная балка будет состоять из двух балок, защемленных концом и поддерживающих подвесную балку AB. Прогиб посредине пролета (точка F) равен фиктивному моменту в этой точке от равномерно распределенной нагрузки, деленному на жесткость:

$$f_F=\frac{q_f l^2}{8EJ}=\frac{Pal^2}{8EJ}.$$

Прогиб в точке C найдем, вычисляя фиктивный момент в этом сечении; он будет вызываться треугольной нагрузкой, расположенной на балке CA, и реакцией подвесной балки $A_f=Pal/2$ (рис. 236):

$$M_{fC}=-A_f a-\frac{Pa\cdot a}{2}\frac{2}{3}a=-\frac{Pa^2 l}{2}-\frac{Pa^3}{3}.$$

Отсюда прогиб сечения C:

$$f_C=\frac{M_{fC}}{EJ}=-\frac{Pa^2}{6EJ}(3l+2a).$$

В последнем примере найдем прогиб сечения B для балки, изображенной на рис. 237.

Построим эпюру изгибающих моментов. В сечении C момент равен $+M$; в точке B он равен нулю. На всем протяжении балки момент меняется по закону прямой. Превращаем эпюру M в фиктивную нагрузку и устраиваем фиктивную балку в соответствии с таблицей 13. Рассматривая консоль AB, находим фиктивный

момент в точке B:

$$M_{fB} = -\frac{1}{2}Ml\cdot\frac{2}{3}l = -\frac{Ml^2}{3};$$

соответствующий прогиб равен

$$f_B = -\frac{Ml^2}{3EJ}.$$

§ 93. Графоаналитический метод при криволинейных эпюрах изгибающего момента

Криволинейное очертание эпюр изгибающего момента от равномерно распределенной нагрузки q представляет собой квадратную параболу.

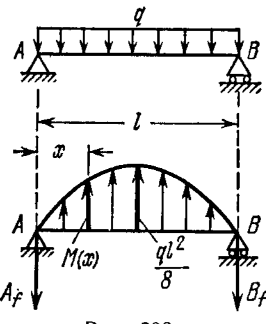


Рис. 238.

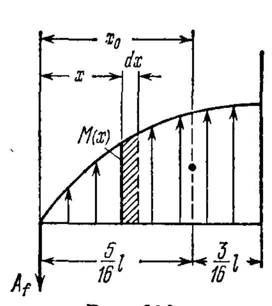


Рис. 239.

Выпуклая парабола (рис. 238) присуща балке на двух опорах. Ординаты этой параболы равны

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}.$$

Площадь такой параболы можно найти из выражения

$$\omega = \int_0^l M(x)\,dx = \int_0^l \left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right)dx = \frac{ql^3}{12}.$$

Эта же площадь может быть подсчитана, как 2/3 площади описанного прямоугольника:

$$\omega = \frac{2}{3}\cdot\frac{ql^2}{8}\cdot l = \frac{ql^3}{12}.$$

Абсцисса x_0 центра тяжести половины площади параболы (рис. 239) находится следующим вычислением:

$$x_0 = \frac{\int_0^{l/2} x\cdot M(x)\cdot dx}{\frac{\omega}{2}} = \frac{\frac{5}{384}ql^4}{\frac{1}{24}ql^3} = \frac{5}{16}l.$$

Расстояние от центра тяжести половины параболы до середины всей параболы

$$\frac{l}{2}-x_0=\frac{3}{16}l.$$

Вогнутая парабола — эпюра изгибающего момента для балки, защемленной одним концом (рис. 240). Текущая ордината этой параболы $M(x)=-qx^2/2$.

Площадь параболы определяется следующим вычислением:

$$-\omega=\int_0^l M(x)\,dx=\int_0^l \frac{qx^2}{2}\,dx=\frac{ql^3}{6}.$$

Эта же площадь равна одной трети площади описанного прямоугольника

$$\omega=\frac{1}{3}\cdot\frac{ql^2}{2}\cdot l=\frac{ql^3}{6}.$$

Ордината центра тяжести параболы x_0 находится следующими подсчетами:

$$x_0=\frac{\int_0^l xM(x)\,dx}{\omega}=\frac{\frac{1}{8}ql^4}{\frac{1}{6}ql^3}=\frac{3}{4}l.$$

Расстояние от центра тяжести параболы до ее наибольшей ординаты (до защемления балки) равно одной четверти пролета.

Пользуясь этими данными, решим следующие примеры.

Найдем величину прогиба посредине балки, показанной на рис. 238. Площадь эпюры изгибающего момента принимается за фиктивную нагрузку. Эпюра положительная — стрелки фиктивной нагрузки направляем вверх. Фиктивные опорные реакции будут

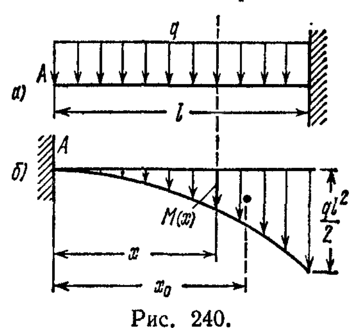


Рис. 240.

$$A_f=B_f=\frac{\omega}{2}=\frac{ql^3}{24}.$$

Эти реакции направляем вниз (рис. 238).

Фиктивный изгибающий момент в середине пролета равен сумме статических моментов фиктивных сил, расположенных по одну сторону от среднего сечения балки, допустим — по левую сторону (рис. 238); слева расположены фиктивные силы: A_f и левая половина эпюры. Плечо A_f равно половине пролета балки, плечо же половины параболы равно $3l/8$. Следовательно, фиктивный изгибающий момент в

середине пролета

$$M_f = -A_f \cdot \frac{l}{2} + \frac{\omega}{2} \cdot \frac{3}{16} l = -\frac{ql^3}{24} \cdot \frac{l}{2} + \frac{ql^3}{24} \cdot \frac{3}{16} l = -\frac{5}{384} ql^4,$$

а прогиб посредине пролета равен

$$f_{l/2} = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}.$$

Рассмотрим балку, защемленную одним концом и загруженную равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 240, *а*). Определим величину прогиба свободного конца балки. Эпюра действительных изгибающих моментов и схема фиктивной балки показаны на рис. 240, *б*.

Изгибающий момент в защемлении A фиктивной балки равен произведению площади ω всей эпюры на расстояние до ее центра тяжести, т. е.

$$M_f = \omega \cdot x_0 = \frac{ql^3}{6} \cdot \frac{3}{4} l = -\frac{ql^4}{8},$$

а прогиб сечения A

$$f_A = -\frac{ql^4}{8EJ}.$$

Рассмотрим одноконсольную балку ABC, показанную на рис. 241, *а*. Применив прием расчленения эпюр и метод сложения результатов действия сил, определим прогиб и угол поворота сечения C. Балка загружена по всей длине равномерно распределенной нагрузкой.

Возможный вид эпюры изгибающего момента показан на рис. 241, *б*. Заменяем эту эпюру ее составляющими: от нагрузки на пролете AB (рис. 241, *в*) и от нагрузки на консоли BC (рис. 241, *г*). Ординаты двух последних эпюр могут быть взяты из ранее решенных примеров. Характерные ординаты приведены на рис. 241, *в* и *г*. На рис. 241, *д* показана фиктивная балка.

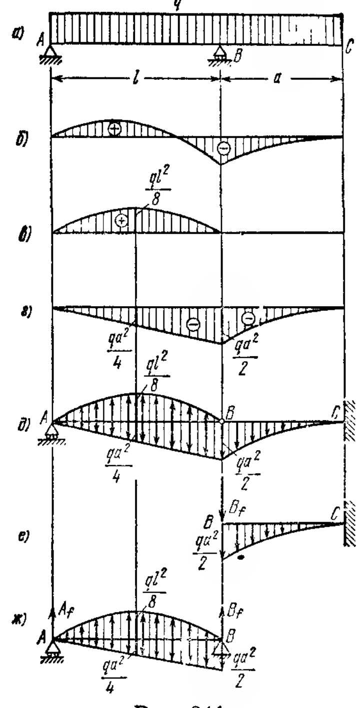


Рис. 241.

Выделим фиктивную балку BC: на нее действуют давление B_f от подвесной балки AB и нагрузка параболой с наибольшей ординатой $qa^2/2$ (рис. 241, *е*).

Из рассмотрения фиктивной балки AB, взяв сумму моментов всех фиктивных сил относительно опоры A, находим (рис. 241, *ж*), что

$$B_f = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{qa^2}{2} l - \frac{1}{2} \frac{ql^3}{12} = \frac{1}{6} qa^2 l - \frac{ql^3}{24}.$$

Возвращаясь к рис. 241, *е*, вычисляем

$$Q_{fC} = -B_f - \frac{1}{3} \cdot \frac{qa^2}{2} \cdot a = -\frac{1}{6} qa^2 l + \frac{ql^3}{24} - \frac{qa^3}{6},$$

$$M_{fC} = -B_f \cdot a - \frac{1}{3} \cdot \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot \frac{3}{4} a = -\frac{1}{6} qa^3 l + \frac{qal^3}{24} - \frac{qa^4}{8}.$$

Искомые деформации в сечении C будут

$$\theta_C = \frac{Q_{fC}}{EJ} = -\frac{q}{24EJ}(4a^2l - l^3 + 4a^3),$$

$$f_C = \frac{M_{fc}}{EJ} = -\frac{qa}{24EJ}(4a^2l - l^3 + 3a^3).$$

Глава XVII

БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

§ 94. Подбор сечений балок равного сопротивления

Все предыдущие расчеты отиосились к балкам постоянного сечения. На практике мы имеем часто дело с балками, поперечные размеры которых меняются по длине либо постепенно, либо резко.

Ниже рассмотрено несколько примеров подбора сечения и определения деформаций балок переменного профиля.

Так как изгибающие моменты обычно меняются по длине балки, то, подбирая ее сечение по наибольшему изгибающему моменту, мы получаем излишний запас материала во всех сечениях балки, кроме того, которому соответствует M_{max}. Для экономии материала, а также для увеличения в нужных случаях гибкости балок применяют *балки равного сопротивления.* Под этим названием подразумевают балки, у которых во всех сечениях *наибольшее* нормальное напряжение одинаково и равно *допускаемому* (или не превышает его).

Условие, определяющее форму такой балки, имеет вид

$$\sigma_{max} = \frac{M(x)}{W(x)} = [\sigma] \tag{17.1}$$

и

$$W(x) = \frac{M(x)}{[\sigma]}. \tag{17.2}$$

Здесь $M(x)$ и $W(x)$ — изгибающий момент и момент сопротивления в любом сечении балки; $W(x)$ для каждого сечения балки должен меняться пропорционально изгибающему моменту.

Условия (17.1) и (17.2) справедливы и для сечения с наибольшим изгибающим моментом; если обозначить W_0 — момент сопротивления балки в сечении с наибольшим изгибающим моментом M_{max}, то можно написать

$$\frac{M_{max}}{W_0} = \frac{M(x)}{W(x)} = [\sigma]. \tag{17.3}$$

Покажем ход вычислений на примере. Рассмотрим балку пролетом l, защемленную концом A и нагруженную на другом конце си-

лой P (рис. 242 и 243). Выберем сечение этой балки в виде прямоугольника; задачу о надлежащем изменении момента сопротивления можно решать, меняя высоту или ширину балки или тот и другой размер вместе.

Пусть высота балки будет постоянной $h=h_0$, а ширина переменной — $b(x)$. Момент сопротивления в сечении на расстоянии x от свободного конца будет $W(x)=b(x)\,h^2/6$, а изгибающий момент $M=-Px$; момент сопротивления опорного сечения $W_0=b_0h^2/6$, а

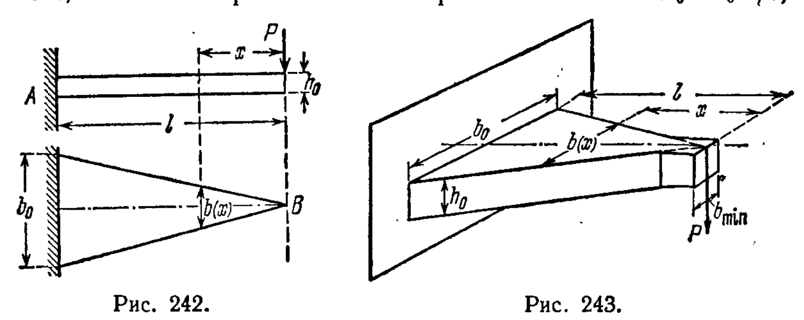


Рис. 242. Рис. 243.

наибольший изгибающий момент в опорном сечении $M_{max}=|Pl|$. В расчете имеют значения лишь абсолютные величины $M(x)$ и M_{max}. По формуле (17.3) получаем

$$\frac{Pl\cdot 6}{b_0h^2}=\frac{Px\cdot 6}{b(x)\,h^2}, \quad \text{откуда} \quad b(x)=b_0\frac{x}{l}, \tag{17.4}$$

т. е. ширина меняется по линейному закону в зависимости от x. При $x=l$ ширина равна b_0.

Вид балки в фасаде и плане показан на рис. 242. Такое очертание балки получается, если учитывать ее прочность только по отношению к нормальным напряжениям; ширина $b(x)$ в сечении B обращается в нуль.

Однако необходимо обеспечить прочность и по отношению к касательным напряжениям. Наименьшая ширина балки, требуемая этим условием, определится из уравнения

$$\tau_{max}=\frac{3}{2}\cdot\frac{Q_{max}}{hb_{min}}=[\tau]$$

или, так как $Q_{max}=P$,

$$b_{min}=\frac{3P}{2h[\tau]}.$$

Исправленное очертание балки показано на рис. 243.

§ 95. Практические примеры балок равного сопротивления

Только что рассмотренный пример имеет применение на практике при проектировании рессор. Рессору, пренебрегая ее достаточно слабой кривизной, можно рассматривать как балку на двух опорах (рис. 244, *а*), нагруженную силой P посредине пролета и реакциями $P/2$ по концам.

Рис. 244.

Запроектируем этот стержень как балку равного сопротивления с постоянной высотой h_0 и переменной шириной $b(x)$; по симметрии достаточно ограничиться рассмотрением одной половины пролета.

Моменты сопротивления $W(x)$ и W_0 будут выражаться так же, как и в первом примере. Наибольший изгибающий момент посредине пролета равен

$$M_{max}=\frac{Pl}{4}.$$

Изгибающий момент в любом сечении

$$M(x)=\frac{Px}{2}.$$

Решая задачу, как и в первом примере, получим

$$b(x)=b_0\frac{2x}{l}. \qquad (17.5)$$

Ширина балки, необходимая для обеспечения сопротивления поперечной силе ($P/2$), определяется формулой

$$b_{min}=\frac{3}{4}\frac{P}{h_0[\tau]}.$$

Вид рессоры в фасаде и плане показан на том же рис. 244, *б* и *в*. Подобная конструкция рессоры была бы крайне неудобной на практике; поэтому ей придают несколько другую форму, не меняя характера ее работы. Представим себе, что в плане лист рессоры разделен на узкие полоски, как показано на рис. 244, *г*. Если мы расположим эти полоски не рядом друг с другом, а одну над другой, то, если пренебречь трением между ними, работа балки не изме-

нится, а рессора получит вид, изображенный в плане на рис. 244, *д* и в фасаде — на рис. 244, *е*.

Конечно, на практике каждый лист рессоры, 1-й, 2-й и т. д., изготовляют цельным, а не состоящим из двух половинок.

Балки переменного сечения применяются и в машиностроении; например, валы часто конструируются как балки равного сопротивления.

§ 96. Определение перемещений в балках переменного сечения

При определении прогибов и углов поворота для балок с переменным сечением надлежит иметь в виду, что жесткость такой балки является функцией от x. Поэтому дифференциальное уравнение изогнутой оси принимает вид

$$EJ(x)\frac{d^2y}{dx^2}=M(x),$$

где $J(x)$ — переменный момент инерции сечений балки.

До интегрирования этого уравнения можно выразить $J(x)$ надлежащей подстановкой через J, т. е. через момент инерции того сечения, где действует M_{max}; после этого вычисления производятся так же, как и для балок постоянного сечения (§ 82).

Покажем это на примере, разобранном выше. Определим прогиб балки равного сопротивления (рис. 242), защемленной одним концом, нагруженной на другом конце силой P и имеющей постоянную высоту. Начало координат выберем на свободном конце балки. Тогда

$$M(x)=-Px;\quad J(x)=\frac{b(x)h^3}{12}=\frac{b_0h^3}{12}\frac{x}{l}=J\frac{x}{l},\tag{17.6}$$

$$EJ\frac{x}{l}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=-Px.$$

Дифференциальное уравнение принимает вид

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{Pxl}{x}=-Pl.\tag{17.7}$$

Интегрируем два раза:

$$EJ\frac{dy}{dx}=-Plx+C;\quad EJy=-Pl\frac{x^2}{2}+Cx+D.$$

Для определения постоянных интегрирования имеем условия: в точке A при $x=l$ прогиб $y=0$ и угол поворота $\frac{dy}{dx}=0$, или

$$0=-Pl^2+C\quad \text{и}\quad 0=-\frac{Pl^3}{2}+Cl+D;$$

отсюда

$$C=Pl^2 \quad \text{и} \quad D=-\frac{Pl^3}{2}.$$

Выражения для y и θ принимают вид

$$\theta=\frac{dy}{dx}=-\frac{Pl}{EJ}x+\frac{Pl^2}{EJ}=\frac{Pl^2}{EJ}\left(1-\frac{x}{l}\right),$$

$$y=-\frac{Plx^2}{2EJ}+\frac{Pl^2x}{EJ}-\frac{Pl^3}{2EJ}=-\frac{Pl^3}{2EJ}\left(1-2\frac{x}{l}+\frac{x^2}{l^2}\right).$$

Наибольший прогиб на свободном конце балки B получится при $x=0$; он равен

$$f_{max}=-\frac{Pl^3}{2EJ}.$$

Если бы мы всю балку сделали постоянного сечения с моментом инерции J, то наибольший прогиб был бы

$$f_{max}=-\frac{Pl^3}{3EJ},$$

т. е. в 1,5 раза меньше.

Таким образом, балки переменного сечения обладают большей гибкостью по сравнению с балками постоянной жесткости при одинаковой с ними прочности. Именно поэтому, а не только ради экономии материала, они и применяются в таких конструкциях, как рессоры.

Уравнение (17.7) показывает, что в рассмотренном примере кривизна балки постоянна, т. е. ось балки должна изогнуться по *дуге круга*. Между тем в результате интегрирования мы получили *уравнение параболы;* предлагаем учащимся объяснить, почему это произошло.

Применение графоаналитического метода определения перемещений к балкам переменного сечения также не представляет затруднений. Вместо того чтобы для вычислений f и θ делить на жесткость EJ изгибающий момент и поперечную силу в фиктивной балке, можно за фиктивную нагрузку принять эпюру моментов для основной балки, разделив ее ординаты на EJ. Тогда

$$q'_f=\frac{M(x)}{EJ} \quad \text{и} \quad f=M'_f, \quad \theta=Q'_f.$$

Обобщая этот способ на балки переменного сечения, полагаем

$$q'_f=\frac{M(x)}{EJ(x)};$$

загружаем этой нагрузкой фиктивную балку и получаем искомые прогибы и углы поворота как изгибающие моменты и поперечные силы в сечениях фитивной балки.

Для рассмотренного выше примера $q'_f=-Pxl/(EJx)=-Pl/(EJ)$, т. е. фиктивная балка должна быть загружена сплошной уже не треугольной, а равномерно распределенной нагрузкой (рис. 245). Прогиб сечения B, равный изгибающему

моменту в защемлении фиктивной балки, выразится формулой

$$f=M_f'=\frac{q_f' l^2}{2}=-\frac{Pl^3}{2EJ}.$$

Тот же результат мы получили бы, предполагая, что наша балка имеет постоянную жесткость EJ, а ее эпюра изгибающих моментов преобразована путем

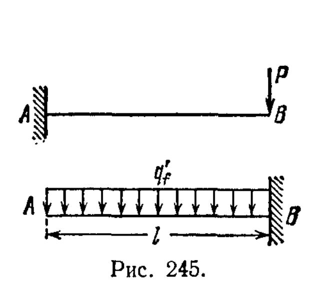


Рис. 245.

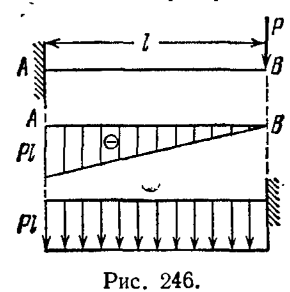


Рис. 246.

умножения каждой ординаты на отношение $J/J(x)$; преобразованная эпюра моментов имела бы ординаты

$$-Px\frac{J}{J(x)}=-Px\frac{Jl}{Jx}=-Pl$$

(рис. 246); тогда по общему правилу графоаналитического метода

$$M_f=-Pl\cdot l\frac{l}{2}=-\frac{Pl^3}{2} \quad \text{и} \quad y=-\frac{Pl^3}{2EJ}.$$

Таким образом, определение прогибов балки переменного сечения можно привести к той же операции для балки *постоянной жесткости*, но *с преобразованной* умножением на $J/J(x)$ эпюрой моментов.

Определим графоаналитически прогиб под грузом P для балки, свободно лежащей на двух опорах и нагруженной посредине пролета сосредоточенным грузом P (рис. 247, *а*). Момент инерции сечений левой половины балки равен J, правой $0,5\,J$. Преобразуем эпюру моментов (рис. 247, *б*), умножая ординаты правой половины на отношение $J/(0,5J)=2$; фиктивная балка с преобразованной нагрузкой изображена на рис. 247, *в*. Левая фиктивная реакция равна

$$A_f=\frac{1}{2}\cdot\frac{Pl}{4}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{Pl}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{Pl^2}{12};$$

фиктивный изгибающий момент в сечении C и прогиб точки C соответственно будут

$$M_{fC}=-A_f\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\frac{l}{2}\cdot\frac{Pl}{4}\frac{l}{6}=$$

$$=-\frac{Pl^3}{24}+\frac{Pl^3}{96}=-\frac{Pl^3}{32},$$

$$f_C=-\frac{Pl^3}{32EJ}.$$

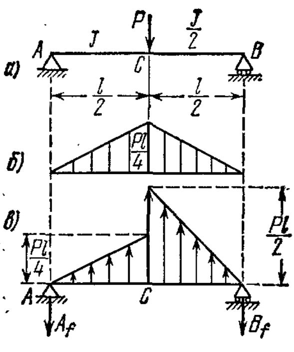


Рис. 247.

Определим прогиб балки, защемленной одним концом и загруженной сосредоточенной силой P на другом конце (рис. 248, *а*). Одна половина балки имеет

сечение бо́льших размеров, причем $J_2 > J_1$. Преобразуя эпюру изгибающего момента (рис. 248, *б*) и фиктивную нагрузку, мы должны ординаты левой части эпюры увеличить в J_2/J_1 раз (рис. 248, *в*).

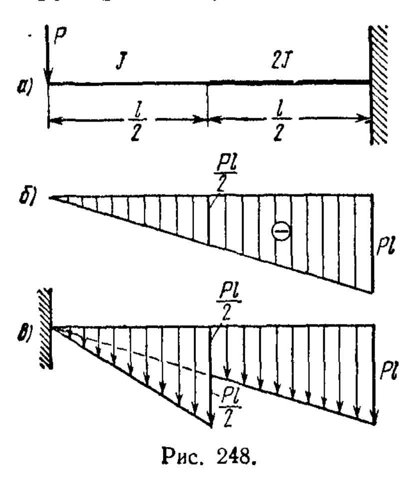


Рис. 248.

Прогиб под силой P определится следующим подсчетом (при $J_2 = 2J_1$):

$$M_f = -\frac{1}{2}P\,\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{l}{2} - Pl\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{2}{3}\,l = -\frac{3}{8}Pl^3,$$

$$f_P = -\frac{3Pl^3}{8EJ_2}.$$

Отдел VI

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

Глава XVIII

ПРИМЕНЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

§ 97. Постановка вопроса

Кроме рассмотренных способов вычисления прогибов и углов поворота сечений балок существует более общий метод, пригодный для определения деформаций любых упругих конструкций. Он основан на применении *закона сохранения энергии.*

При статическом растяжении или сжатии упругого стержня происходит превращение потенциальной энергии из одного вида в другой; часть *потенциальной* энергии действующего на стержень груза полностью переходит в потенциальную энергию деформации стержня. Действительно, если мы будем нагружать стержень путем постепенного подвешивания к его нижнему концу очень малых грузов dP (рис. 249), то при добавлении каждого такого груза подвешенная уже часть нагрузки опустится и ее потенциальная энергия уменьшится, а потенциальная энергия деформации стержня соответственно увеличится.

Рис. 249.

Это явление имеет место при любом виде деформации всякой упругой конструкции при статической нагрузке; такую конструкцию можно рассматривать как своеобразную машину, преобразующую один вид потенциальной энергии в другой.

Мы условились (§ 2) называть «статической» такую нагрузку, которая возрастает постепенно и таким образом, что *ускорениями* элементов конструкции можно пренебречь; передача давлений (сил) от одной части конструкции на другую не меняет *характера движения* этих частей, т. е. их скорость остается постоянной и ускорение отсутствует.

При этих условиях деформация конструкции не будет сопровождаться изменением кинетической энергии системы и будет иметь место лишь преобразование потенциальной энергии из одного вида в другой. При этом мы пренебрегаем магнитными, электрическими и тепловыми явлениями, сопровождающими упругие статические деформации тела лишь в очень слабой мере.

Так как характер движения всех элементов конструкции с течением времени не меняется, то в каждый момент времени будет иметь место *равновесие* как для каждой части конструкции в целом под действием внешних сил и реакций, так и для каждого *элемента* этой части под действием внешних сил и напряжений, приложенных к этому элементу. Деформации конструкции, напряжения в ее частях и реакции, передающиеся от одной части на другую, успевают следовать за ростом нагрузки.

Таким образом, можно сказать, что *полное преобразование одного вида потенциальной энергии в другой имеет место, если деформация происходит без нарушения равновесия системы.* Мерой энергии, превратившейся в другой вид, является *величина работы,* произведенной силами, действующими на конструкцию.

Обозначим величину накопленной потенциальной энергии деформации через U, а уменьшение потенциальной энергии внешних нагрузок U_p. Тогда величина U_p измеряется *положительной* работой этих нагрузок A_p; с другой стороны, накоплению потенциальной энергии деформации U соответствует *отрицательная* работа внутренних, междучастичных сил A, так как перемещения точек тела при деформации происходят в обратном по отношению к внутренним силам направлении.

Закон сохранения энергии при деформациях *упругих* систем принимает вид

$$U_p = U; \tag{18.1}$$

заменяя в этой формуле величины U_p и U *численно* равными им значениями работ A_p и $-A$, получаем иную формулировку этого закона:

$$A_p = -A, \quad \text{или} \quad A_p + A = 0. \tag{18.2}$$

Эта формулировка закона сохранения энергии совпадает с так называемым «началом» возможных перемещений в *применении к упругим системам;* равенство (18.2) выражает ту мысль, что при перемещениях *без нарушения равновесия* сумма работ всех сил, приложенных к точкам тела, равна нулю.

Таким образом, *начало возможных перемещений в применении к упругим системам является следствием закона сохранения энергии.*

Из формулы (18.1) следует, что потенциальная энергия деформации U *численно* равна работе внешних сил A_p, проделанной ими при этой деформации:

$$U = A_p. \tag{18.3}$$

Совершенно неправильным является истолкование этого равенства, иногда встречающееся в учебниках по строительной механике: «работа внешних сил при деформации стержня переходит в потенциальную энергию деформации»; переходить в потенциальную энер-

гию деформации может только другой вид энергии; как правило, это потенциальная энергия внешних нагрузок. Величина же работы, производимой при этом внешними силами, является лишь числовой мерой превратившейся части энергии.

§ 98. Потенциальная энергия в простейших случаях действия нагрузок

Ранее были даны формулы для вычисления величины потенциальной энергии при растяжении и сжатии (§ 10), при сдвиге (§ 36), при кручении (§ 52) и при чистом изгибе (§ 63, п. г).

Поместим все формулы, упомянутые выше, в таблицу 14.

Таблица 14

Потенциальная энергия деформации в простейших случаях

Вид деформации	Потенциальная энергия деформации
Растяжение или сжатие	$\frac{1}{2}P\Delta l=\frac{P^2l}{2EF}=\frac{\Delta l^2EF}{2l}$
Сдвиг	$\frac{1}{2}Q\Delta s=\frac{Q^2a}{2GF}=\frac{\Delta s^2GF}{2a}$
Кручение	$\frac{1}{2}M_к\varphi=\frac{M^2l}{2GJ_p}=\frac{\varphi^2GJ_p}{2l}$
Чистый изгиб	$\frac{1}{2}M\theta=\frac{M^2l}{2EJ}=\frac{\theta^2EJ}{2l}$

Рассмотрим содержание ее правой части. Первый столбец формул показывает, что потенциальная энергия деформации равна половине произведения силы или момента пары сил на перемещение того сечения, где эта сила или соответственно пара сил приложены. Условимся называть термином *обобщенная сила* любую нагрузку, вызывающую деформацию, т. е. и сосредоточенную силу, и момент пары сил. Перемещение же, соответствующее этой обобщенной силе, будем называть *обобщенным перемещением. Соответствие* заключается в том, что речь идет о перемещении сечения, где приложена сила, причем о таком перемещении, произведение которого на эту силу дает величину работы. Для сосредоточенной силы это будет линейное перемещение по направлению действия силы: удлинение, прогиб; для пары сил угол поворота по направлению действия момента пары. Формулы первого столбца можно обобщить так: *потенциальная энергия деформации численно равна половине произведения обобщенной силы на обобщенное перемещение.*

Второй столбец формул показывает, что потенциальная энергия деформации является функцией второй степени от независимых внешних сил. Потенциальная энергия всегда положительна.

Третий столбец показывает, что величина потенциальной энергии является функцией второй степени от конечных значений обобщенных перемещений — удлинений, углов поворота, прогибов — и ими вполне определяется.

Хотя эти формулы получены в предположении статического возрастания нагрузки при сохранении равновесия в течение всего процесса загружения, однако они сохраняют силу и при любом способе приложения нагрузки, лишь бы значения сил и перемещений были связаны линейной зависимостью и относились к тому моменту, когда установилось равновесие конструкции.

§ 99. Потенциальная энергия при действии многих сил

Представим себе балку, находящуюся под действием нескольких сил P_1, P_2, P_3, ... Перемещения при деформации балки и месте приложения и по направлению каждой из этих сил обозначим через δ_1, δ_2, δ_3, ... На рис. 250 сплошной линией показана прямая ось балки, пунктиром — изогнутая ось. Будем предполагать, что выдержаны следующие условия: а) все силы приложены статически: их значения увеличиваются постепенно от нуля до конечного значения P_i; б) все деформации происходят в пределах упругости и связаны с внешними силами линейно; в) уменьшение потенциальной энергии положения внешних сил сопровождается увеличением потенциальной энергии деформации балки.

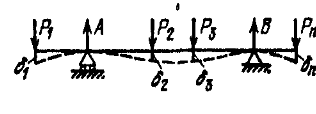


Рис. 250.

Любая из показанных на рис. 250 сил P_i ($i=1, 2, \ldots, n$) может быть принята за обобщенную силу, причем *под обобщенной силой* P_i *будем понимать* не только активную силу, а *уравновешенную систему сил* (включая и опорные реакции), *которая производит перемещение* δ_i в точке приложения силы по линии ее действия.

Все силы и перемещения связаны следующими зависимостями:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + a_{13}P_3 + \ldots, \\ \delta_2 &= a_{21}P_1 + a_{22}P_2 + a_{23}P_3 + \ldots, \\ \delta_3 &= a_{31}P_1 + a_{32}P_2 + a_{33}P_3 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (18.4)$$

Буквой a здесь обозначены *постоянные коэффициенты*, а *индексы* при ней имеют следующие значения: *первый* — порядковый номер перемещения или «место перемещения»; цифра 1, стоящая на первом

месте, обозначает, например, что перемещение происходит в месте приложения силы P_1; *второй* — порядковый номер силы, вызывающей перемещение, или «причину перемещения»; цифра 2, стоящая на втором месте, обозначает, что перемещение вызвано действием силы P_2.

Система уравнений (18.4) носит название *обобщенного закона Гука для деформируемого тела.* Основной смысл каждой строки закона Гука заключается в том, что любое перемещение представляет собой сумму перемещений в данной точке, вызванных действием каждой из сил P_i.

Обобщенный закон Гука (18.4) может быть назван *законом сложения действия сил,* а также *законом* (*принципом*) *независимости действия сил.* Мы уже неоднократно пользовались ранее этими законами при выводе расчетных формул сопротивления материалов, например формулы (6.18) в § 33.

Вычисление потенциальной энергии при действии многих сил следует производить по формуле Клапейрона:

$$U=A=\frac{1}{2}P_1\delta_1+\frac{1}{2}P_2\delta_2+\frac{1}{2}P_3\delta_3\ldots, \qquad (18.5)$$

где все буквенные обозначения те же, что и в формуле (18.4).

Словами теорему Клапейрона можно выразить так: *потенциальная энергия деформации, возникающая в упругой системе в результате действия нескольких обобщенных сил, равна половине суммы произведений обобщенных сил на обобщенные перемещения, образующиеся от совместного действия обобщенных сил.*

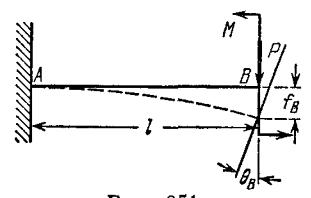


Рис. 251.

В заключение следует указать, что принципиально *за обобщенную силу допустимо принимать любую группу действующих силовых факторов, которая может быть охарактеризована каким-либо одним параметром.* Однако практически удобнее разбивать действующую на конструкцию сложную нагрузку на ряд простых обобщенных сил.

Рассмотрим частный пример. Балка, защемленная одним концом, нагружена на свободном конце сосредоточенной силой P и парой сил с моментом M (рис. 251). Вычислить величину потенциальной энергии деформации балки.

Напишем уравнение Клапейрона для вычисления потенциальной энергии в данном случае:

$$U=A=\frac{1}{2}(Pf_B+M\theta_B). \qquad (18.6)$$

Значение перемещений возьмем из ранее решенных задач или из справочника:

$$f_B=\frac{Pl^3}{3EJ}-\frac{Ml^2}{2EJ}; \quad \theta_B=\frac{Ml}{EJ}-\frac{Pl^2}{2EJ}. \qquad (18.7)$$

Знак минус обозначает, что направление перемещения не совпадает с направлением соответствующей силы. Подставляем значения перемещений в формулу Клапейрона:

$$U=A=\frac{1}{2}P\left(\frac{Pl^3}{3EJ}-\frac{Ml^2}{2EJ}\right)+\frac{1}{2}M\left(\frac{Ml}{EJ}-\frac{Pl^2}{2EJ}\right)=\frac{P^2l^3}{6EJ}+\frac{M^2l}{2EJ}-\frac{PMl^2}{2EJ}. \quad (18.8)$$

Следует обратить внимание на то, что при вычислении потенциальной энергии от действия нескольких сил нельзя вычислять потенциальную энергию от действия каждой из сил в отдельности, а затем суммировать эти вычисления.

§ 100. Вычисление потенциальной энергии при изгибе через внутренние усилия

В общем случае изгиба изгибающий момент $M(x)$ является величиной переменной. В любом сечении ему будет сопутствовать поперечная сила $Q(x)$. Поэтому рассматривать следует уже не всю балку в целом, а лишь бесконечно малый элемент балки длиной dx

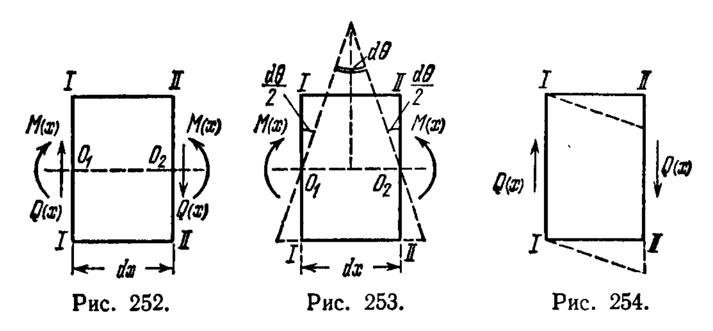


Рис. 252. Рис. 253. Рис. 254.

(рис. 252). Под действием изгибающих усилий сечения элемента поворачиваются и образуют между собой угол $d\theta$ (рис. 253). Касательные же усилия стремятся вызвать перекос элемента (рис. 254). Таким образом, перемещения от нормальных напряжений идут перпендикулярно к направлению касательных напряжений, и наоборот. Это позволяет *независимо* вычислять работу изгибающих и касательных усилий.

Обычно работа касательных усилий оказывается малой по сравнению с работой нормальных, поэтому мы пока ею будем пренебрегать. Элементарная работа нормальных усилий (как и в случае чистого изгиба) равна

$$dA_p=dU=\frac{1}{2}M(x)\,d\theta=\frac{1}{2}M(x)\frac{M(x)\,dx}{EJ}, \quad (18.9)$$

или

$$dU=\frac{M^2(x)\,dx}{2EJ}. \quad (18.10)$$

Вся потенциальная энергия изгиба получится суммированием по длине балки

$$U=\int\limits_l \frac{M^2(x)\,dx}{2EJ}=\frac{1}{2EJ}\int\limits_l M^2(x)\,dx. \qquad (18.11)$$

Рис. 255.

Знак предела интегрирования условно указывает, что интегрирование должно охватывать всю балку; в тех случаях, когда для $M(x)$ мы имеем несколько участков, интеграл (18.11) приходится разбивать на сумму интегралов.

Вычислим потенциальную энергию балки на двух опорах, нагруженной силой P (рис. 255). Эпюра моментов имеет два участка; поэтому

$$U=\int\limits_0^a \frac{M_1^2\,dx}{2EJ}+\int\limits_0^b \frac{M_2^2\,dx}{2EJ}, \qquad (18.12)$$

$$M_1=+Ax_1=+\frac{Pb}{l}x_1; \qquad M_2=+Bx_2=+\frac{Pa}{l}x_2,$$

$$U=\frac{1}{2EJ}\left[\int\limits_0^a\left(\frac{Pb}{l}\right)^2 x_1^2\,dx+\int\limits_0^b\left(\frac{Pa}{l}\right)^2 x_2^2\,dx\right]=\frac{P^2a^2b^2}{6EJl}.$$

§ 101. Теорема Кастильяно

Установим теперь метод определения перемещений, основанный на вычислении потенциальной энергии деформации. Поставим себе задачу нахождения перемещений точек упругой системы по направлению действия приложенных к этой системе внешних сил.

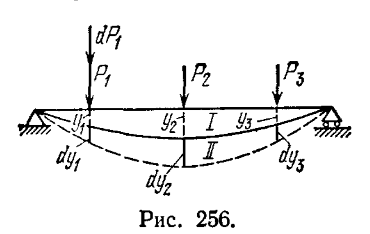


Рис. 256.

Будем решать эту задачу в несколько приемов; сначала рассмотрим более простой случай (рис. 256), когда на балку в сечениях *1, 2, 3*, . . . действуют только сосредоточенные силы $P_1, P_2, P_3, \ldots$ и т. д. Под действием этих сил балка прогнется по кривой *I* и останется в *равновесии*.

Прогибы сечений *1, 2, 3*, . . ., в которых приложены силы P_1, P_2, P_3, . . ., обозначим y_1, y_2, y_3, . . . и т. д. Найдем один из этих прогибов, например, y_1 — прогиб сечения, в котором приложена сила P_1.

Переведем балку, *не нарушая равновесия*, из положения *I* в смежное положение *II*, показанное на рис. 256 пунктиром. Это можно сде-

лать различными приемами: добавить новую нагрузку, увеличить уже приложенные и т. д.

Мы представим себе, что для перехода к смежному деформированному состоянию II к силе P_1 сделана бесконечно *малая* добавка dP_1 (рис. 256), чтобы при этом переходе не нарушать равновесия, будем считать, что эта добавка прикладывается статически, т. е. возрастает от нуля до окончательного значения медленно и постепенно.

При переходе от состояния I балки к состоянию II все нагрузки P опустятся, значит, их потенциальная энергия уменьшится. Так как равновесие не нарушалось, то уменьшение энергии нагрузок dU_P целиком преобразовалось в увеличение потенциальной энергии деформаций балки dU. Величина dU_P измеряется работой внешних сил при переходе балки из положения I в положение II:

$$dU = dA_P. \tag{18.13}$$

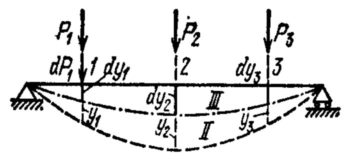


Рис. 257.

Изменение dU потенциальной энергии деформации, являющейся функцией сил P_1, P_2, P_3, ..., произошло за счет очень малого приращения одной из этих независимых переменных P_1; поэтому дифференциал такой сложной функции равен

$$dU = \frac{\partial U}{\partial P_1} dP_1. \tag{18.14}$$

Что касается величины dA_P, то эта работа в свою очередь является разностью работы нагрузок P для положений II и I:

$$dA_P = A_2 - A_1.$$

Работа A_1 при одновременном и постепенном возрастании сил P равна

$$A_1 = \frac{1}{2} P_1 y_1 + \frac{1}{2} P_2 y_2 + \frac{1}{2} P_3 y_3 + \ldots$$

При вычислении работы A_2 учтем, что ее величина всецело определяется *окончательной* формой деформированной балки (§ 100) и не зависит от порядка, в котором производилась нагрузка.

Предположим, что мы сначала нагрузили нашу балку грузом dP_1; балка очень немного прогнется (рис. 257, положение III), и прогибы ее в точках $1, 2, 3, \ldots$ будут dy_1, dy_2, dy_3, ... Работа статически приложенной нагрузки dP_1 будет равна $\frac{1}{2} dP_1 \, dy_1$. После этого начнем постепенно нагружать балку одновременно возрастающими грузами P_1, P_2, P_3, ...

К первоначальным прогибам dy_1, dy_2, dy_3, ... добавятся прогибы y_1, y_2, y_3, ... (рис. 257). При этой стадии нагружения силы P_1, P_2, P_3, ... произведут работу $\frac{1}{2} P_1 y_1 + \frac{1}{2} P_2 y_2 + \frac{1}{2} P_3 y_3 + \ldots = A_1$;

кроме того, произведет работу уже находящийся на балке груз dP_1; он пройдет путь y_1, и так как при втором этапе нагружения он *оставался постоянным*, то его работа равна dP_1y_1. Балка займет положение II, показанное на рис. 257 пунктиром.

Таким образом, полная работа, проделанная внешними нагрузками при переходе балки из *недеформированного* состояния в положение II, будет равна (рис. 257).

$$A_2=\frac{1}{2}dP_1\,dy_1+A_1+dP_1y_1.$$

Теперь вычислим

$$dU=dA_p=A_2-A_1=\frac{1}{2}dP_1\,dy_1+dP_1y_1.$$

Пренебрегая слагаемым второго порядка малости, получаем

$$dA_p=dP_1y_1. \tag{18.15}$$

Подставляя полученные значения dU (18.14) и dA_p (18.15) в уравнение (18.13), находим

$$dP_1y_1=\frac{\partial U}{\partial P_1}dP_1, \quad \text{или} \quad y_1=\frac{\partial U}{\partial P_1}. \tag{18.16}$$

Таким образом, в рассмотренном случае *прогиб точки приложения сосредоточенной силы P_1 равен частной производной потенциальной энергии деформации по этой силе.*

Полученный результат можно обобщить. Пусть на балку, помимо сосредоточенных сил P, действуют в разных сечениях еще пары сил M (рис. 258). Мы можем повторить предыдущие рассуждения, считая, что балка переводится из положения I в положение II путем добавки dM_1 к паре M_1. Весь ход рассуждений остается без изменений, надо будет лишь при вычислении работы моментов M_1, M_2, ... умножать их не на прогибы, а на углы поворота θ_1, θ_2, ... *тех сечений, где эти пары приложены.* Тогда dU будет равно $\frac{\partial U}{\partial M_1}dM_1$, dA_p станет $dM_1\theta_1$ и формула (18.16) примет вид

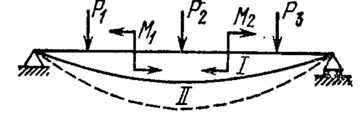


Рис. 258.

$$\theta_1=\frac{\partial U}{\partial M_1}. \tag{18.17}$$

Так как y_1 — это перемещение, *соответствующее силе* P_1, а θ_1 — перемещение, *соответствующее* силе M_1, то полученные нами результаты можно формулировать более широко: *производная потенциальной энергии деформации по обобщенной силе равна обобщенному перемещению.*

Изложенный в настоящем параграфе вывод носит название *теоремы Кастильяно.* Он был опубликован в 1875 г.

Заметим, что присутствие на балке сплошной нагрузки не меняет предыдущих выводов, так как всякую сплошную нагрузку можно рассматривать как состоящую из большого числа сосредоточенных сил.

Предыдущий вывод был сделан для балки, но совершенно ясно, что его можно повторить для любой конструкции, деформации которой следуют закону Гука.

Для случая изгиба нами была получена формула, связывающая величину потенциальной энергии U с изгибающими моментами:

$$U=\int\frac{M^2(x)\,dx}{2EJ}. \qquad (18.11)$$

Вычислим частную производную от U по одной из внешних сил, например P_1. Получаем

$$\frac{\partial U}{\partial P_1}=\frac{\partial}{\partial P_1}\left[\int\limits_l\frac{M^2(x)\,dx}{2EJ}\right].$$

Здесь мы имеем дело с так называемым дифференцированием определенного интеграла по параметру, так как $M(x)$ — функция и P_1 и x; интегрирование производится по x, а дифференцирование — по параметру P_1. Как известно, если пределы интеграла постоянны, то следует просто дифференцировать подынтегральную функцию.

Таким образом, прогиб в точке приложения сосредоточенной силы P_1 равен

$$y_1=\frac{\partial U}{\partial P_1}=\int\limits_l\frac{M(x)\,dx}{EJ}\frac{\partial M(x)}{\partial P_1}, \qquad (18.18)$$

а угол поворота сечения с парой M_1

$$\theta_1=\frac{\partial U}{\partial M_1}=\int\limits_l\frac{M(x)\,dx}{EJ}\frac{\partial M(x)}{\partial M_1}. \qquad (18.19)$$

Напомним, что знак предела l условно показывает, что интеграл должен быть распространен на всю длину балки.

§ 102. Примеры приложения теоремы Кастильяно

Определим (рис. 259) прогиб свободного конца B балки, защемленной другим концом A. Балка нагружена сосредоточенной силой, приложенной в точке B. В данном случае возможно *непосредственное* применение теоремы Кастильяно, так как отыскивается прогиб сечения, где приложена сосредоточенная сила P:

$$y_B=\frac{\partial U}{\partial P}=\int\frac{M(x)\,dx}{EJ}\frac{\partial M(x)}{\partial P}. \qquad (18.18)$$

Начало отсчета абсциссы x сечения можно выбирать произвольно, лишь бы формула для $M(x)$ была возможно проще. Отсчитывая x от точки B, получаем для

момента в *любом сечении* балки

$$M(x) = -Px \quad \text{и} \quad \frac{\partial M(x)}{\partial P} = -x.$$

Подставляя эти значения в формулу для y_B и интегрируя, чтобы охватить всю длину балки от 0 до l, получаем

$$y_B = \int_0^l \frac{(-Px)\,dx}{EJ}(-x) = \frac{P}{EJ}\int_0^l x^2\,dx = +\frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Получилась уже известная нам формула с той лишь разницей, что y_B оказался положительным. Мы определили перемещение, *соответствующее* той силе, по которой производилось дифференцирование. Соответствие заключается в том, что произведение из силы на соответствующее перемещение дает нам работу. Если

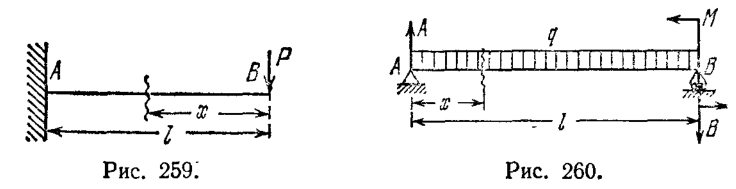


Рис. 259. Рис. 260.

перемещение имеет знак *плюс*, то работа будет тоже положительна, а это значит, что *направления перемещения и силы совпадают*. Если же прогиб или поворот сечения получаются со знаком минус, то их направление *противоположно* направлению соответствующей силы. Таким образом, в этой задаче прогиб точки B направлен вниз.

Рассмотрим пример, где для вычисления $M(x)$ необходимо определение реакций.

Найдем угол поворота опорного сечения B балки на двух опорах пролетом l (рис. 260), нагруженной парой сил M в этом опорном сечении и равномерно распределенной нагрузкой q.

Искомый угол поворота равен

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M} = \int \frac{M(x)\,dx}{EJ}\frac{\partial M(x)}{\partial M}. \tag{18.19}$$

Изгибающий момент (рис. 260) определяется уравнением

$$M(x) = +Ax - \frac{qx^2}{2}.$$

При нахождении производной от $M(x)$ по M надо в формуле для $M(x)$ оставить лишь *независимые* внешние силы, которые и учитываются теоремой Кастильяно. Поэтому реакция A *обязательно* должна быть выражена через M и q, в противном случае легко впасть в ошибку и при дифференцировании упустить из вида, что A — функция от M. Реакция равна

$$A = \frac{ql}{2} + \frac{M}{l};$$

тогда

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} + \frac{Mx}{l}.$$

Производная будет

$$\frac{\partial M(x)}{\partial M} = +\frac{x}{l}.$$

Пределы интегрирования определяются тем, что формула изгибающего момента годится на протяжении всей балки. Искомый угол поворота равен

$$\theta_B=\frac{\partial U}{\partial M}=\int_0^l \frac{1}{EJ}\left(\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}+\frac{Mx}{l}\right)\frac{x}{l}\,dx=\frac{ql^3}{24EJ}+\frac{Ml}{3EJ}.$$

В тех случаях, когда изгибающий момент на разных участках балки выражается различными функциями от x, необходимо и интегрирование разбить по участкам. Перемещение будет выражаться суммой интегралов, число которых равно числу участков балки. При решении подобных задач существенным является вопрос о назначении пределов интегрирования.

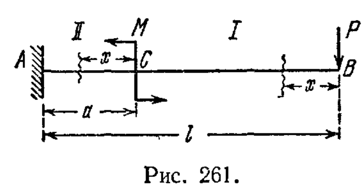


Рис. 261.

Возьмем в качестве примера балку длиной l, защемленную одним концом (рис. 261) и нагруженную моментом M в точке C на расстоянии a от опоры и силой P на свободном конце B. Найдем угол поворота сечения C.

Точка приложения момента M делит балку на два участка: первый BC и второй AC. Поэтому угол поворота сечения C будет равен

$$\theta_C=\frac{\partial U}{\partial M}=\int\frac{M_1\,dx}{EJ}\frac{\partial M_1}{\partial M}+\int\frac{M_2\,dx}{EJ}\frac{\partial M_2}{\partial M}.$$

Здесь M_1 и M_2— изгибающие моменты для сечений первого и второго участков. Пределы интегрирования можно будет установить лишь после того, как мы решим, от каких точек отсчитывать координату x каждого сечения для того и другого участков.

Для первого участка возьмем произвольное сечение на расстоянии x от конца B балки. Изгибающий момент в этом сечении равен

$$M_1=-Px \quad \text{и} \quad \frac{\partial M_1}{\partial M}=0;$$

пределы интегрирования для этого участка будут 0 и $l—a$.

При вычислении изгибающего момента в сечении второго участка можно продолжать отсчитывать x от точки B; тогда

$$M_2=-Px+M \quad \text{и} \quad \frac{\partial M_2}{\partial M}=+1;$$

пределы интегрирования будут $l—a$ и l. Но гораздо проще начать отсчитывать x для второго участка с тем расчетом, чтобы *нижний предел* интегрирования *был бы нуль*,— это упростит вычисления. Очевидно, за начало отсчетов тогда надо взять начало второго участка — точку C. В этом случае мы имеем

$$M_2=-P(x+l-a)+M \quad \text{и} \quad \frac{\partial M_2}{\partial M}=+1.$$

Пределами интегрирования будут 0 и a.

Останавливаясь на втором варианте, получаем

$$\theta_C=\int_0^{l-a}\frac{M_1\,dx}{EJ}\frac{\partial M_1}{\partial M}+\int_0^a\frac{M_2\,dx}{EJ}\frac{\partial M_2}{\partial M};$$

первый интеграл равен нулю и

$$\theta_C=\frac{1}{EJ}\int_0^a[-P(x+l-a)+M]\,dx=-\frac{P(2l-a)a}{2EJ}+\frac{Ma}{EJ}.$$

Искомый угол поворота является суммой двух слагаемых — одного, вызванного силой P и направленного по часовой стрелке (против направления M), и второго, определяемого моментом M и направленного против часовой стрелки.

§ 103. Прием введения добавочной силы

Возьмем балку пролетом l, защемленную концом A и нагруженную силой P на свободном конце B. Найдем угол поворота сечения B.

Непосредственно применить теорему Кастильяно нельзя, так как в этом сечении нет обобщенной силы, соответствующей углу поворота,— нет пары сил. Для того чтобы решить задачу, приложим в точке B дополнительно пару сил (рис. 262), направленную как угодно, хотя бы против часовой стрелки. При такой нагрузке мы можем найти угол поворота сечения B при помощи теоремы Кастильяно.

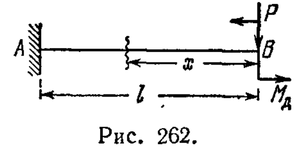


Рис. 262.

Этот угол выразится формулой, состоящей из двух слагаемых— одного, зависящего от P, а другого — от $M_д$. Эта формула будет верна при любых *числовых* значениях P и $M_д$ в том числе и при $M_д=0$; поэтому, полагая в полученном выражении $M_д=0$, получим значение угла поворота, вызванного *лишь* силой P. Проведем это вычисление:

$$\theta_B=\frac{\partial U}{\partial M_д}=\int\frac{M\,dx}{EJ}\frac{\partial M}{\partial M_д},$$

$$M=+M_д-Px \quad \text{и} \quad \frac{\partial M}{\partial M_д}=+1;$$

пределы интегрирования 0 и l; тогда

$$\theta_B=\frac{1}{EJ}\int_0^l(M_д-Px)(+1)\,dx; \qquad (18.20)$$

можно было бы произвести интегрирование и в полученном результате положить $M_д$ равным нулю. Однако результат не изменится, если мы приравняем $M_д$ нулю уже в формуле (18.20). Дополнительная сила нужна нам только для вычисления частной производной от изгибающего момента по этой дополнительной силе; после этого ее можно положить равной нулю.

Таким образом, угол поворота сечения B от силы P равен

$$\theta=\frac{1}{EJ}\int_0^l(-Px)\,dx=-\frac{Pl^2}{2EJ}.$$

Знак минус показывает, что этот поворот происходит *против* направления *пары* $M_д$, т. е. по часовой стрелке.

При вычислении *прогиба* такого сечения балки, где нет сосредоточенной силы, следует подобным же образом приложить в этом сечении добавочную силу $P_д$ и после составления формулы для прогиба дать этой силе частное значение, равное нулю.

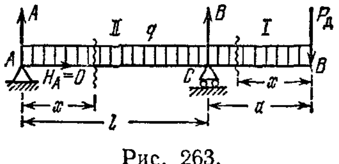


Рис. 263.

Найдем прогиб конца B консоли балки, изображенной на рис. 263. Балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой. Для вычисления прогиба точки B приложим в этом сечении дополнительную силу $P_д$. Балка имеет два участка: первый BC и второй CA. Поэтому прогиб точки B представится суммой двух интегралов:

$$y_B=\frac{\partial U}{\partial P_д}=\int\frac{M_1\,dx}{EJ}\frac{\partial M_1}{\partial P_д}+\int\frac{M_2\,dx}{EJ}\frac{\partial M_2}{\partial P_д}.$$

Реакции балки равны

$$A=-P_д\frac{a}{l}+\frac{q(l+a)(l-a)}{2l}=-P_д\frac{a}{l}+\frac{q(l^2-a^2)}{2l},$$

$$B=P_д\frac{a+l}{l}+\frac{q(l+a)^2}{2l}.$$

При определении реакций никогда не следует забывать о добавочной силе. Мы решаем усложненную задачу, где добавочная сила должна учитываться так же, как и все активные силы.

Отсчет координаты x для обоих участков показан на рис. 263.

Для первого участка имеем

$$M_1=-P_д x-\frac{qx^2}{2};\qquad \frac{\partial M_1}{\partial P_д}=-x;$$

пределы интегрирования: $x=0$ и $x=a$. Для второго участка

$$M_2=+Ax-\frac{qx^2}{2}=-P_д\frac{a}{l}x+\frac{q(l^2-a^2)}{2l}x-\frac{qx^2}{2};\qquad \frac{\partial M_2}{\partial P_д}=-\frac{a}{l}x;$$

пределы интегрирования: $x=0$ и $x=l$. Тогда

$$y_B=\frac{1}{EJ}\int_0^a\left(-P_д x-\frac{qx^2}{2}\right)(-x)\,dx+$$

$$+\frac{1}{EJ}\int_0^l\left[-P_д\frac{a}{l}x+\frac{q(l^2-a^2)}{2l}x-\frac{qx^2}{2}\right]\left(-\frac{a}{l}x\right)dx.$$

Полагая $P_д=0$, получаем

$$y_B=\frac{1}{EJ}\int_0^a\frac{qx^3}{2}\,dx-\frac{1}{EJ}\int_0^l\left[\frac{q(l^2-a^2)a}{2l^2}x^2-\frac{qx^3a}{2l}\right]dx=$$

$$=+\frac{qa^4}{8EJ}-\frac{qal}{24EJ}(l^2-4a^2).$$

Первое из слагаемых отражает влияние деформаций консоли, второе же — междуопорной части.

§ 104. Теорема о взаимности работ

Пользуясь понятием о потенциальной энергии, можно установить следующую зависимость между перемещениями в различных сечениях балки.

Если к балке, нагруженной силой P_1, приложить затем статически силу P_2 в сечении 2, то к прогибу точки приложения силы P_1 от этой же силы y_{11} прибавится (рис. 264) прогиб от силы P_2, равный y_{12}; первый значок у буквы y указывает точку, для которой вычисляется прогиб; второй — обозначает силу, вызывающую этот прогиб.

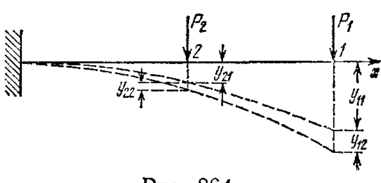


Рис. 264.

Полная работа внешних сил составится из трех частей: работы силы P_1 на вызванном ею прогибе y_{11}, т. е. $\frac{1}{2}P_1y_{11}$; работы силы P_2 на вызванном ею прогибе ее точки приложения y_{22}, т. е. $\frac{1}{2}P_2y_{22}$; наконец, работы силы P_1 на прогибе ее точки приложения от силы P_2, т. е. P_1y_{12}.

Таким образом, накопленная в стержне при действии обеих сил энергия будет равна

$$U=\frac{1}{2}P_1y_{11}+\frac{1}{2}P_2y_{22}+P_1y_{12}. \tag{18.21}$$

Это количество энергии деформации зависит лишь от конечных значений сил и прогибов и не зависит от *порядка* нагружения.

Если к балке, загруженной силой P_2, приложить затем силу P_1, то, повторив цепь вычислений, получим

$$U=\frac{1}{2}P_2y_{22}+\frac{1}{2}P_1y_{11}+P_2y_{21}. \tag{18.22}$$

Сравнивая оба значения U, получаем

$$P_1y_{12}=P_2y_{21}, \tag{18.23}$$

т. е. *работа силы P_1* (или *первой группы сил*) *на перемещениях, вызванных силой P_2 (второй группой сил), равна работе силы P_2 на перемещениях, вызванных силой P_1.*

Это и есть теорема о взаимности работ. Ее можно сформулировать и иначе: работа первой силы (P_1) при действии второй (P_2) равна работе второй силы при действии первой.

Если взять частный случай, когда $P_1=P_2$, то получим *теорему о взаимности перемещений*: $y_{12}=y_{21}$, т. е. прогиб точки *1*, вызванный силой, приложенной в точке *2*, равен прогибу в точке *2*, вызванной такой же силой, приложенной в точке *1*.

§ 105. Теорема Максвелла — Мора

Прогиб балки в точке приложения сосредоточенной силы P равен

$$y=\int_0^l \frac{M(x)\,dx}{EJ}\frac{\partial M(x)}{\partial P};\qquad(18.18)$$

аналогичное выражение мы имеем и для угла поворота с заменой производной $\frac{\partial M(x)}{\partial P}$ на $\frac{\partial M(x)}{\partial M}$. Выясним, что представляют собой эти производные.

Если на балке расположена какая угодно нагрузка из сосредоточенных сил P_1, P_2, P_3, . . ., моментов M_1, M_2, . . ., сплошных нагрузок q_1, q_2, . . ., то момент $M(x)$ в любом сечении такой балки выражается линейной функцией от нагрузок:

$$M(x)=a_1P_1+a_2P_2+\ldots+b_1M_1-b_2M_2+\ldots+c_1q_1+c_2q_2+\ldots\qquad(18.24)$$

Коэффициенты a_1, a_2, . . ., b_1, b_2, . . ., c_1, c_2, . . . являются функциями пролета балки, расстояний точек приложения сил и моментов от опор и абсциссы x взятого сечения. Пусть мы отыскиваем прогиб точки приложения силы P_1; тогда $\frac{\partial M(x)}{\partial P_1}=a_1$, так как P_2, P_3, . . ., M_1, M_2, . . ., q_1, q_2, . . ., a_1, a_2, . . ., b_1, b_2, . . ., c_1, c_2, . . . при этом дифференцировании постоянны. Но a_1 можно рассматривать, как численную величину момента M в любом сечении балки от действия так называемой единичной нагрузки, т. е. силы $P=1$; действительно, подставляя в формулу (18.24) вместо P_1 его частное значение, единицу, и приравнивая все остальные нагрузки нулю, получаем $M=a_1$.

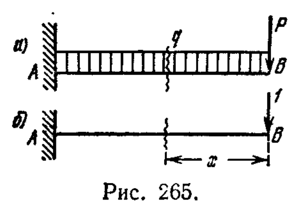


Рис. 265.

Например, для балки, изображенной на рис. 265, *а*, изгибающий момент равен

$$M(x)=-Px-\frac{qx^2}{2}.$$

Производная $\frac{\partial M(x)}{\partial P}=-x$, но это как раз и будет выражение изгибающего момента нашей балки, если мы ее нагрузим силой *1*, приложенной в той же точке B, где расположена сила P (рис. 265, *б*), и направленной в ту же сторону.

Аналогично, производная изгибающая момента $M(x)$ по моменту пары сил M_1 численно представляет собой изгибающий момент от пары с моментом, равным единице, приложенной в том же сечении, где имеется пара M_1, и направленной в ту же сторону.

Таким образом, *вычисление производных изгибающего момента можно заменить вычислением изгибающих моментов от единичной нагрузки*. Эти моменты мы будем обозначать буквой M^0.

Следовательно, для отыскания перемещения δ (прогиба или угла поворота) любого сечения балки, вне зависимости от того, приложена или не приложена в этом сечении соответствующая сила, необходимо найти выражение для изгибающего момента $M(x)$ от заданной нагрузки (будем его обозначать просто M) и момента M^0 от соответствующей единичной нагрузки, приложенной в сечении, где ищем перемещение δ; тогда это перемещение выразится формулой

$$\delta = \int_0^l \frac{MM^0}{EJ}\,dx. \tag{18.25}$$

Эта формула была предложена Максвеллом в 1864 г. и введена в практику расчета Мором в 1874 г.

Если в формуле (18.25) под δ подразумевается прогиб, то момент M^0 надо вычислять от сосредоточенной единичной силы, приложенной в той точке, где мы отыскиваем прогиб; при вычислении же угла поворота в качестве единичной нагрузки прикладывается пара сил с моментом, равным единице.

Для примера рис. 265 имеем

$$M = -Px - \frac{qx^2}{2} \qquad (\text{рис. } 265, a),$$

$$M^0 = -1\cdot x = -x \qquad (\text{рис. } 265, б),$$

$$y_P = \frac{1}{EJ}\int_0^l \left(-Px - \frac{qx^2}{2}\right)(-x)\,dx = \frac{Pl^3}{3EJ} + \frac{ql^4}{8EJ}.$$

Знак плюс означает, что направление перемещения совпадает с направлением единичной нагрузки, знак минус — наоборот.

Если при определении изгибающих моментов придется делить балку на участки, то соответственно и интеграл в формуле (18.25) распадется на сумму интегралов.

§ 106. Способ Верещагина

Пирле и А. Н. Верещагин, а еще ранее Мюллер-Бреслау предложили упрощение вычислений по формуле (18.25). Так как единичной нагрузкой бывает обычно либо сосредоточенная сила, любо пара сил, то эпюра M^0 оказывается ограниченной прямыми линиями. Поэтому вычисление $\int MM^0 dx$ при любом очертании эпюры M можно произвести следующим образом. Пусть эпюра M (рис. 266) имеет криволинейное очертание, а эпюра M^0 — прямолинейное. Произведение $M\,dx$ можно рассматривать как элемент $d\omega$ площади эпюры M, заштрихованный на рисунке.

Так как ордината M^0 равна $M^0 = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, то произведение $M\,dxM^0 = d\omega x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, а весь интеграл $\int MM^0\,dx = \mathrm{tg}\,\alpha \int d\omega x$ представляет собой статический момент площади эпюры M относительно точки A, умноженный на $\mathrm{tg}\,\alpha$. Но этот статический момент равен всей площади ω эпюры M, умноженной на расстояние от ее центра тяжести x_C до точки A. Таким образом,

$$\int MM^0\,dx = \omega x_C\,\mathrm{tg}\,\alpha;$$

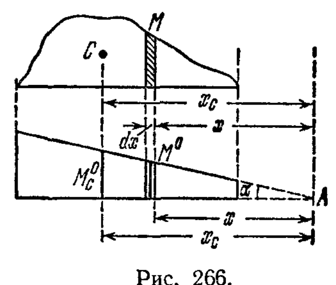


Рис. 266.

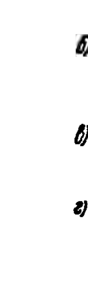


Рис. 267.

но величина $x_C\,\mathrm{tg}\,\alpha$ равна ординате M_C^0 эпюры M^0 под центром тяжести эпюры M. Отсюда

$$\int MM^0\,dx = \omega M_C^0,$$

и искомое перемещение равно

$$\delta = \frac{\omega M_C^0}{EJ}. \tag{18.26}$$

Таким образом, для определения перемещений δ надо вычислить ω — площадь эпюры M, умножить ее на ординату M_C^0 эпюры от единичной нагрузки под центром тяжести площади ω и разделить на жесткость балки.

Определим этим способом угол поворота сечения D балки, изображенной на рис. 267, *а*; балка загружена моментом M, приложенным в сечении B к консоли AB. Эпюра M показана на рис. 267, *б*. Прикладываем в сечении D единичную пару, выбирая ее направление произвольно (рис. 267, *в*). Эпюра моментов от единичной нагрузки показана на рис. 267, *г*. Так как момент M на участках DC и CB равен нулю, то остается лишь один интеграл для участка AB.

Площадь ω равна $+Ml$; ордината эпюры M^0 под центром тяжести площади ω равна $+\frac{l}{2b}$; отсюда искомый угол поворота θ_D

равен

$$\theta_D = \frac{1}{EJ}(+Ml)\left(+\frac{1}{2b}\right) = +\frac{Ml^2}{2bEJ}.$$

Знак плюс показывает, что вращение происходит по направлению единичной пары, т. е. по часовой стрелке.

§ 107. Определение перемещений в раме

Определим угол поворота θ в сечении C и горизонтальное перемещение Δ опоры D для рамы, показанной на рис. 268, a, пользуясь теоремой Мора.

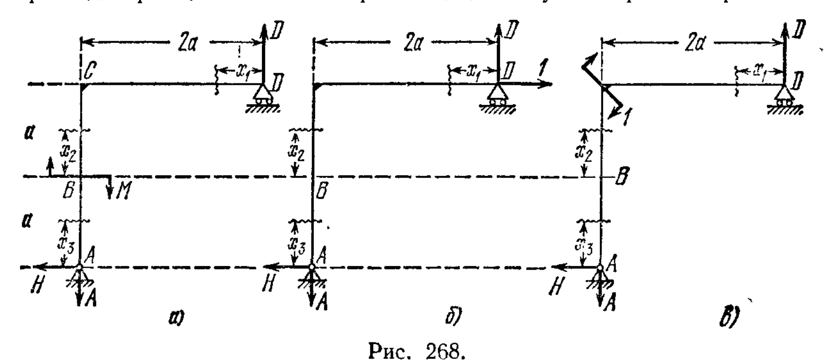


Рис. 268.

Определим опорные реакции и изгибающие моменты для трех состояний загружения, показанных на рис. 268, a, $б$ и $в$:

а) От заданной нагрузки

$$H=0;\quad D=\frac{M}{2a}=A;\quad M_1=+\frac{M}{2a}x_1;\quad M_2=+M;\quad M_3=0.$$

б) От единичной силы

$$H=1;\quad D=1=A;\quad M_1^0=+x_1;\quad M_2^0=a+x_2;\quad M_3^0=+x_3.$$

в) От единичного момента

$$H=0;\quad D=\frac{1}{2a}=A;\quad M_1^0=+\frac{x_1}{2a};\quad M_2^0=0;\quad M_3^0=0.$$

Вычислим деформации:

а) и б)

$$\Delta=\frac{1}{EJ}\left[\int_0^{2a} M_1M_1^0dx+\int_0^{a} M_2M_2^0dx+\int_0^{a} M_3M_3^0dx\right]=$$

$$=\frac{1}{EJ}\left[\int_0^{2a}\frac{M}{2a}x_1^2dx+\int_0^{a}M(a+x_2)\,dx\right]=\frac{17}{6}\,\frac{Ma^2}{EJ}.$$

а) и в)

$$\theta=\frac{1}{EJ}\left[\int_0^{2a} M_1M_1^0dx+\int_0^{a} M_2M_2^0dx+\int_0^{a} M_3M_3^0dx\right]=\frac{1}{EJ}\int_0^{2a}\frac{M}{2a}x_1\cdot\frac{x_1}{2a}\,dx=\frac{2Ma}{3EJ}.$$

При решении этой же задачи способом Верещагина нужно для трех схем загружения, показанных на рис. 268, построить эпюры изгибающего момента, что

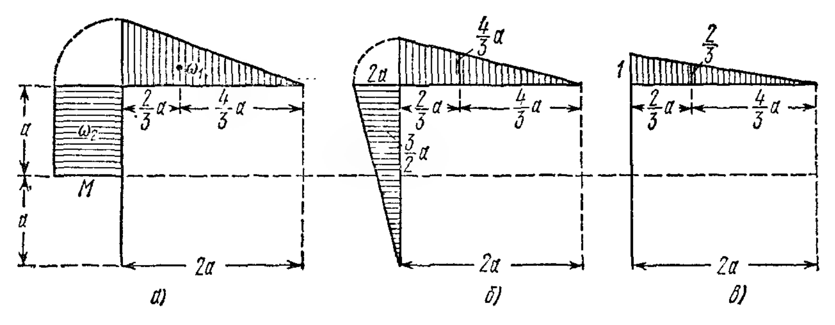


Рис. 269.

выполнено на рис. 269, *а*, *б* и *в*. По этому рисунку определены следующие данные:

$$\omega_1 = Ma; \qquad \omega_2 = Ma; \qquad \omega_3 = 0, \tag{а}$$

$$M^0_{C1} = \frac{4}{3}a; \qquad M^0_{C2} = \frac{3}{2}a, \tag{б}$$

$$M^0_{C1} = \frac{2}{3}; \qquad M^0_{C2} = 0; \qquad M^0_{C3} - 0. \tag{в}$$

Формула (18.26) при трех участках загружения примет вид

$$\delta = \frac{1}{EJ}\left(\omega_1 M^0_{C1} + \omega_2 M^0_{C2} + \omega_3 M^0_{C3}\right).$$

Искомые перемещения равны

$$\Delta = \frac{1}{EJ}\left(Ma \cdot \frac{4}{3}a + Ma \cdot \frac{3}{2}a\right) = \frac{17}{6}\frac{Ma^2}{EJ},$$

$$\theta = \frac{1}{EJ}Ma \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\frac{Ma}{EJ}.$$

§ 108. Прогибы балок от действия поперечной силы

При вычисления деформаций балок мы до сих пор учитывали лишь влияние изгибающих моментов. Но поперечные силы в свою очередь тоже вызывают прогибы. Задача учета поперечной силы при определении деформаций балок была решена русским профессором И. Г. Бубновым.

Рассмотрим балку, закрепленную одним концом и нагруженную на другом силой P. Под действием касательных напряжений два смежных сечения a_1b_1 и a_2b_2 (рис. 270, *а*), расположенных на расстоянии dx друг от друга, искривятся; наибольший перекос будет у нейтральной оси; элементы же, расположенные у верха и низа балки, не будут перекашиваться. Первоначальные плоскости сечений займут какие-то средние положения (пунктир $c_1O_1d_1$ и $c_2O_2d_2$), повернувшись относительно прежних на некоторый малый угол γ_0 (рис. 270, *б*). Так как в данном случае касательные напряжения во всех сечениях одинаковы, то все эти сечения повернутся на один и тот же угол γ_0 и балка под действием *только касательных* напряжений займет положение, показанное на рис. 270, *б*; конец B опустится по

отношению к опоре *А*. Деформация, производимая изгибающим моментом и заключающаяся во взаимном повороте смежиых поперечных сечений, на рисунке не показана.

Прогиб второго сечения по отношению к смежному первому будет по абсолютной величине равен отрезку O_2O_2', т. е.

$$|dy_Q| = O_2O_2'. \tag{18.27}$$

В более общем случае, когда поперечная сила $Q(x)$ не одинакова в различных сечениях балки, углы поворота γ_0 будут переменными; однако общая картина деформации сохранится, лишь dy_Q будут разными для различных элементов dx балки.

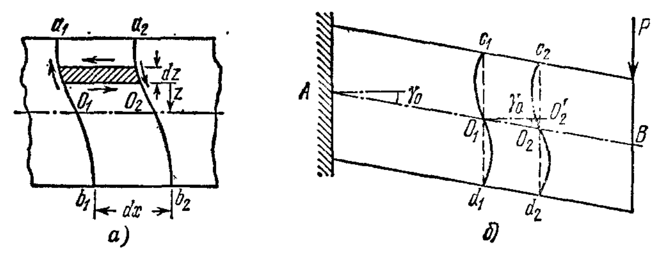


Рис. 270.

Абсолютную величину прогиба второго сечения по отношению к первому $|dy_Q|$ мы определим из условия, что при деформации балки от сдвига потенциальная энергия, накопленная в элементе длиной dx, равна работе сил, приложенных к этому элементу: $dU_Q = dA_P$.

Для рассматриваемой деформации балки такими силами будут касательные усилия, равные поперечной силе $Q(x)$; при постепенном возрастании нагрузки и деформаций балки работа этих сил на относительном перемещении $|dy_Q|$ равна

$$dA_P = \frac{1}{2} Q(x) |dy_Q|. \tag{18.28}$$

Так как касательные напряжения распределены неравномерно по сечению, то для вычисления потенциальной энергии, накопленной в балке при действии этих напряжений, применим дифференциальный путь.

Вырежем из балки прямоугольного сечения (или составленного из прямоугольников) на расстоянии x от начала координат и на расстоянии z от нейтральной оси (рис. 270, *а*) малый элемент размерами dx, dz, $b(z)$. По боковым граням элемента будут действовать, кроме нормальных, касательные напряжения

$$\tau = \frac{Q(x)\,S(z)}{Jb(z)}.$$

Потенциальная энергия сдвига для этого элемента выразится формулой

$$\frac{[b(z)\,dz\tau]^2\,dx}{2b(z)\,dzG} = \frac{1}{2G}\tau^2 b(z)\,dx\,dz.$$

Энергия в элементе балки длиной dx и высотой h будет равна

$$dU_Q = \int \frac{1}{2G}\tau^2 b(z)\,dz\,dx = \frac{1}{2G}\frac{Q^2(x)\,dx}{J^2}\int \frac{S^2(z)\,dz}{b(z)}.$$

Интегрирование производится по z, и пределы интеграла надо взять такими, чтобы охватить все сечение.

Выражение это можно представить в несколько ином виде, умножая и деля его на площадь сечения балки F:

$$dU_Q=\frac{Q^2(x)\,dx}{2GF}\,\frac{F}{J^2}\int\frac{S^2(z)\,dz}{b(z)}=\frac{kQ^2(x)\,dx}{2GF}, \tag{18.29}$$

где через k обозначена безразмерная величина, зависящая только от формы и размеров сечения балки, равная

$$k=\frac{F}{J^2}\int\frac{S^2(z)\,dz}{b(z)}. \tag{18.30}$$

Приравнивая значения dU_Q и dA_P, получаем

$$\frac{kQ^2(x)\,dx}{2GF}=\frac{1}{2}\,Q(x)\,|dy_Q|.$$

Отсюда

$$|dy_Q|=k\frac{Q(x)\,dx}{GF}.$$

Знак прогиба dy_Q определится тем, что (рис. 270, *б*) при переходе от левого сечения к правому ($dx>0$) и при положительной поперечной силе $Q(x)$ относительный прогиб dy_Q отрицателен, если направлять ось y вверх. Значит,

$$dy_Q=-\frac{kQ(x)}{GF}\,dx. \tag{18.31}$$

Полный прогиб любого сечения с абсциссой x получаем, интегрируя (18.31):

$$y_Q=-\int\frac{kQ(x)}{GF}\,dx+C_Q. \tag{18.32}$$

Постоянная интегрирования C_Q зависит от устройства опор балки. Так как $Q(x)=\frac{dM(x)}{dx}$, то

$$y_Q=-\frac{kM(x)}{GF}+C_Q, \tag{18.33}$$

т. е. прогибы балки от действия поперечной силы пропорциональны ординатам эпюры изгибающих моментов с обратным знаком; ординаты отсчитываются от определенной оси абсцисс.

Величина k может быть определена для каждого вида поперечного сечения балки. Для прямоугольника

$$S(z)=\frac{bh^2}{8}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right);\quad J=\frac{bh^3}{12};\quad b(z)=b;\quad F=bh.$$

Тогда

$$k=\frac{F}{J^2}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\frac{S^2(z)\,dz}{b(z)}=\frac{9}{2h}\int\limits_0^{h/2}\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right)dz=\frac{6}{5}.$$

Применим полученные результаты к определению прогибов балки длиной l, защемленной левым концом в точке A и нагруженной на свободном конце B сосредоточенной силой P.

Располагая начало координат в точке A, получаем

$$M(x) = -P(l-x) \quad \text{и} \quad y_Q = +\frac{kP(l-x)}{GF} + C_Q = \frac{6P(l-x)}{5GF} + C_Q.$$

При $x=0$ прогиб $y_Q=0$; следовательно, $C_Q = -6Pl/(5GF)$.

Прогиб y_Q равен

$$y_Q = -\frac{6Px}{5GF}.$$

Наибольший прогиб будет на конце балки в точке B (при $x=l$):

$$f_Q = -\frac{6Pl}{5GF}.$$

Полный прогиб точки B

$$f = -\frac{Pl^3}{3EJ} - \frac{6}{5}\frac{Pl}{GF} = -\frac{Pl^3}{3EJ}\left[1 + \frac{18EJ}{5l^2GF}\right].$$

Так как для прямоугольника $J/F = h^2/12$, то

$$f = -\frac{Pl^3}{3EJ}\left[1 + \frac{3h^2}{10l^2}\frac{E}{G}\right].$$

Прииимая отношение E/G равным для металлов 5/2, а для дерева 20, получаем

$$f = -\frac{Pl^3}{3EJ}\left[1 + \frac{3}{4}\frac{h^2}{l^2}\right] \quad \text{(металлы)},$$

$$f = -\frac{Pl^3}{3EJ}\left[1 + 6\frac{h^2}{l^2}\right] \quad \text{(дерево)}.$$

Таким образом, дополнительный прогиб, вызванный поперечной силой, зависит от $(h/l)^2$, поэтому для сравнительно коротких балок, особенно деревянных, он может достигнуть большой величины. Так, при $h/l = 1/4$ для дерева $1 + 6h^2/l^2 = 1{,}375$, т. е. прогиб от поперечной силы составляет 37,5% от прогиба, вызванного изгибающими моментами.

Надо отметить, что в ряде курсов величина коэффициента k считается равной 1,5, а не 1,2 (для прямоугольного сечения). Это получается, если предположить, что прогибы балки от поперечной силы определяются величииой относительного сдвига у нейтрального слоя, что неверно.

Еще следует отметить, что на некоторой длине балки у ее защемления (рис. 270) описанных деформаций сечений происходить не будет, но это лишь незначительно уменьшит расчетную величину прогиба.

Глава XIX
СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

§ 109. Общие понятия

До сих пор мы рассматривали только статически определимые балки, у которых три опорные реакции определялись из условий равновесия. Очень часто, по условиям работы конструкции, оказывается необходимым увеличить число опорных закреплений; тогда мы получаем так называемую *статически неопределимую балку*.

Например, для уменьшения пролета балки AB на двух опорах (рис. 271, *а*) можно поставить опору еще посредине (рис. 271, *б*). Для уменьшения перемещений балки, защемленной одним концом (рис. 272, *а*), можно подпереть ее свободный конец (рис. 272, *б*).

Для подбора сечения таких балок, так же как и в рассмотренных ранее задачах, необходимо построить обычным порядком эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, а стало быть, определить опорные реакции.

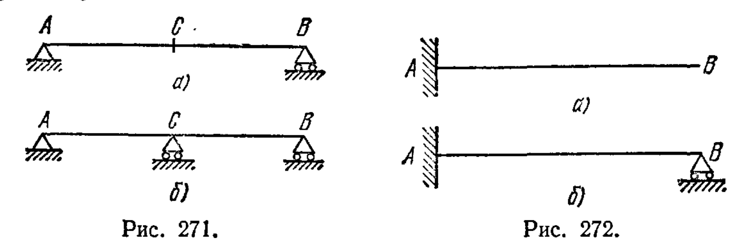


Рис. 271. Рис. 272.

Во всех подобных случаях число опорных реакций, которые могут возникнуть, превышает число уравнений статики.

Если число опорных реакций превышает число уравнений статики на единицу — задача называется один раз статически неопределимой.

При бо́льшем превышении задачи становятся дважды, трижды и более раз статически неопределимыми. В настоящей книге разобраны преимущественно случаи один раз статически неопределимых балок и рам, а также рассмотрены многократно статически неопределимые неразрезные балки.

Основным приемом раскрытия статической неопределимости балок является применение дифференциального уравнения изогнутой оси и его интегрирование, предложенное Луи Навье в 1826 г. Этот прием рассмотрен в следующем параграфе.

§ 110. Применение дефференциального уравнения изогнутой оси балки к раскрытию статической неопределимости

Добавление к статически определимой балке одной шарнирной опоры делает балку один раз статически неопределимой и одновременно создает одно новое условие для определения неизвестных — прогиб балки на опоре равен нулю. Поэтому после двукратного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси общее число уравнений и неизвестных оказывается одинаковым.

Рассмотрим балку, показанную на рис. 273. Напишем уравнения статики: $H_A=0$ (1); $A+B=ql$ (2); $Bl-q\frac{l^2}{2}+M_A=0$ (3). Одна реак-

ция определилась; осталось два уравнения (2) и (3) и три неизвестных опорных реакции: A, B и M_A. Следовательно, задача один раз статически неопределима.

Напишем теперь дифференциальное уравнение изогнутой оси балки и дважды его проинтегрируем:

$$EJy'' = Bx - q\frac{x^2}{2}, \tag{19.1}$$

$$EJy' = B\frac{x^2}{2} - q\frac{x^3}{6} + C, \tag{19.2}$$

$$EJy = B\frac{x^3}{6} - q\frac{x^4}{24} + Cx + D. \tag{19.3}$$

Число неизвестных за счет C и D увеличилось до пяти, но зато мы имеем возможность к двум уравнениям статики прибавить три

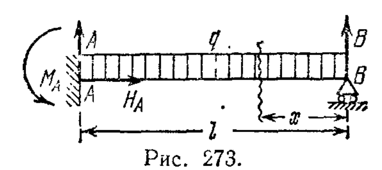


Рис. 273.

условия опирания балки: (1) при $x=0$ $y=0$; (2) при $x=l$ $y'=0$ и (3) при $x=l$ $y=0$.

Из (1) сразу находим, что $D=0$. Условия (2) и (3) подставляем соответственно в уравнения (19.2) и (19.3):

$$B\frac{l^2}{2} - q\frac{l^3}{6} + C = 0, \tag{19.4}$$

$$B\frac{l^3}{6} - q\frac{l^4}{24} + Cl = 0. \tag{19.5}$$

Сокращаем (19.5) на l и вычитаем (19.5) из (19.4):

$$B\frac{l^2}{2} - q\frac{l^3}{6} - B\frac{l^2}{6} + q\frac{l^3}{24} = 0.$$

Из этого уравнения находим

$$B = \frac{3}{8}ql. \tag{19.6}$$

Из уравнения статики (2) находим $A = \frac{5}{8}ql$. Затем из уравнения (3) определяем величину момента в защемлении $M_A = \frac{ql^2}{8}$. Все три положительных ответа для опорных реакций обозначают, что их направление на рис. 273 было указано правильно.

Подставив B в выражение (19.4), находим величину C:

$$C = -\frac{3}{8}ql\frac{l^2}{2} + q\frac{l^3}{6} = -\frac{ql^3}{48}.$$

Подставив B и C в уравнения (19.2) и (19.3), получим окончательные уравнения углов поворота и прогибов

$$EJy' = \frac{3}{16}qx^2l - q\frac{x^3}{6} - q\frac{l^3}{48}, \tag{19.7}$$

$$EJy = \frac{3}{48}qx^3l - q\frac{x^4}{24} - q\frac{l^3x}{48}. \tag{19.8}$$

Определив опорные реакции B, A и M_A, можно обычным путем построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента.

Пользуясь уравнениями (19.7) и (19.8), можно определить величину угла поворота и вертикального перемещения любого сечения балки так же, как это делалось в случаях статически определимых балок.

При нескольких участках загружения для раскрытия статической неопределимости следует пользоваться методом уравнивания произвольных постоянных (метод Клебша, § 85) или общими уравнениями метода начальных параметров (§ 86).

§ 111. Понятие о «лишней» неизвестной и об основной системе

Рассмотрев балку, изображенную на рис. 273, мы установили, что число уравнений статики было на единицу меньше числа неизвестных опорных реакций. Одна из реакций является, таким образом, добавочной или, как говорят, «лишней» неизвестной. Этот термин прочно укоренился в технической литературе; между тем принять его можно лишь условно. Действительно, добавочная реакция и соответствующее ей добавочное закрепление являются «лишними» только с точки зрения необходимости их для равновесия балки, как жесткого целого. С точки же зрения инженера добавочное закрепление во многих случаях не только не является лишним, а наоборот позволяет осуществить такую конструкцию, которая без него была бы невозможна.

В ряде приемов раскрытия статической неопределимости балок составляются условия, выражающие совместность перемещений в сечении, где приложена «лишняя» реакция. Эти условия, вместе с обычными уравнениями статики, дают возможность определить все неизвестные опорные реакции.

Как мы видели в § 110 для балки, показанной на рис. 273, на два уравнения статики приходилось три неизвестные опорные реакции A, B и M_A. За лишнюю неизвестную можно взять любую из них. Возьмем хотя бы за лишнюю неизвестную реакцию опоры B. В таком случае мы можем считать, что рассматриваемая балка (рис. 273) получилась из статически определимой балки AB, защемленной концом A (рис. 274), у которой потом поставили добавочную опору в сечении B.

Эта *статически определимая балка, которая получается из статически неопределимой при удалении «лишнего» опорного закрепления, называется основной системой.* Выбрав какую-либо из реакций за «лишнюю» неизвестную, мы тем самым выбираем основную систему.

Попробуем теперь превратить основную систему (рис. 274) в систему, полностью совпадающую с заданной статически неопределимой балкой (рис. 273). Для этого загрузим основную систему заданной сплошной нагрузкой q и в точке B приложим «лишнюю» реакцию B (рис. 275). Однако этого мало: в балке (рис. 275) точка B

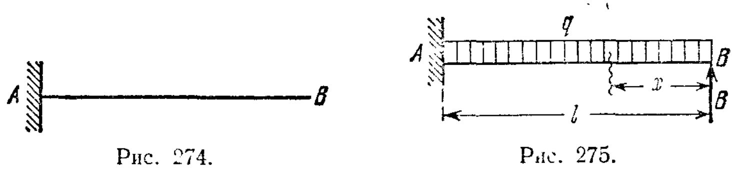


Рис. 274. Рис. 275.

может перемещаться по вертикали под действием нагрзуок q и B; между тем в нашей статически неопределимой балке (рис. 273) точка B не имеет этой возможности; она должна совпадать с опорным шарниром. Поэтому, чтобы привести к полному совпадению балки рис. 273 и 275, надо добавить условие, что прогиб точки B основной системы под действием нагрузок q и B должен быть равен нулю:

$$f_B = 0. \tag{19.9}$$

Это и будет добавочное уравнение, определяющее реакцию B. Оно является условием совместности перемещений: конец балки B непрерывно связан с опорным шарниром.

Решение этого добавочного уравнения возможно несколькими способами.

§ 112. Способ сравнения перемещений

Выполняя решение составленного в § 111 уравнения (19.9), названного *уравнением совместности перемещений*, можно рассуждать следующим образом.

Прогиб точки B основной системы под действием нагрузок q в B складывается из двух прогибов: одного f_{Bq}, вызванного лишь нагрузкой q, и другого f_{BB}, вызванного лишней неизвестной силой B. Таким образом,

$$f_B = f_{Bq} + f_{BB} = 0. \tag{19.10}$$

Остается вычислить эти прогибы. Для этого загрузим основную систему одной нагрузкой q (рис. 276, *а*). Тогда прогиб точки B будет равен

$$f_{Bq} = -\frac{ql^4}{8EJ}.$$

Затем нагрузим основную систему лишней неизвестной B (рис. 276, *б*). Прогиб точки B в этом случае равен

$$f_{BB} = + \frac{Bl^3}{3EJ}.$$

Подставляя эти значения прогибов в уравнение (19.10), получим

$$-\frac{ql^4}{8EJ} + \frac{Bl^3}{3EJ} = 0.$$

Отсюда $B = \frac{3}{8} ql$, т. е. той же величине, что мы получили ранее в § 110 (19.6).

В этом способе мы сначала даем возможность основной системе деформироваться под действием нагрузки q, а затем подбираем такую силу B, которая вернула бы точку B обратно. Таким образом, мы подбираем величину неизвестной дополнительной реакции B с тем расчетом, чтобы уравнять прогибы от нагрузки q и силы B. Этот способ и называют *способом сравнения перемещений*.

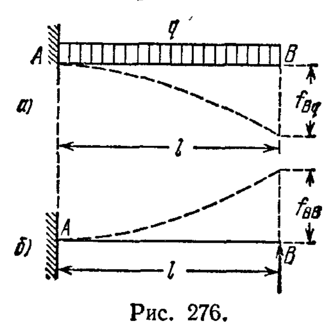


Рис. 276.

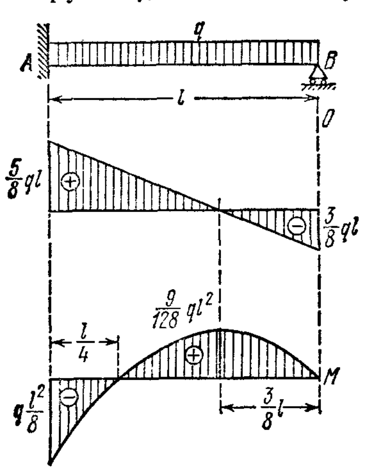


Рис. 277.

Остальные реакции (см. § 110):

$$A = \frac{5}{8} ql; \quad M_A = \frac{ql^2}{8}.$$

Выражение изгибающего момента получаем, рассматривая правую часть балки (рис. 275) и подставляя вместо B его значение (19.6):

$$M = \frac{3ql}{8} x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2}\left(\frac{3l}{4} - x\right).$$

Поперечная сила выражается формулой

$$Q = -B + qx = -q\left(\frac{3}{8} l - x\right).$$

Эпюры поперечной силы и изгибающего момента изображены на рис. 277. Сечение с наибольшим положительным изгибающим моментом соответствует абсциссе x_0, определяемой равенством

$$\frac{dM}{dx}=0, \text{ т. е. } \frac{3ql}{8}-qx_0=0, \text{ откуда } x_0=\frac{3}{8}l.$$

Соответствующая ордината эпюры изгибающего момента равна

$$M_{\max}=M_{x_0}=\frac{3ql}{8}\cdot\frac{3l}{8}-\frac{q\cdot 9l^2}{2\cdot 64}=+\frac{9}{128}ql^2.$$

§ 113. Применение теоремы Кастильяно, теоремы Мора и способа Верещагина

Раскрытие статической неопределимости для балки, рассмотренной в §§ 110—112, может быть произведено и при помощи теоремы Кастильяно (§ 101).

«Лишнюю» опорную реакцию B (рис. 278, *а*) заменяем *неизвестной силой* B, действующей вместе с заданной нагрузкой q на *основную статически определимую балку* AB (рис. 278, *б*).

Дифференцируя по силе B потенциальную энергию и вычисляя таким образом прогиб f_B, следует приравнять его нулю. Уравнение (19.9) примет следующий вид:

$$\int_0^l \frac{M\,dx}{EJ}\frac{\partial M}{\partial B}=0. \qquad (19.11)$$

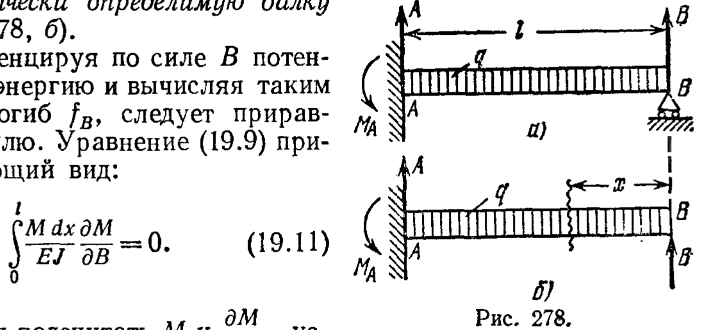


Рис. 278.

Остается подсчитать M и $\frac{\partial M}{\partial B}$, установить пределы интегрирования и вычислить интеграл. Имеем

$$M=Bx-\frac{qx^2}{2}; \qquad \frac{\partial M}{\partial B}=x. \qquad (19.12)$$

Будем считать, что жесткость балки EJ не меняется по ее длине; после сокращения на EJ уравнение (19.11) примет такой вид:

$$\int_0^l \left(Bx-\frac{qx^2}{2}\right)x\,dx=0, \qquad (19.13)$$

отсюда

$$B=\frac{3}{8}ql. \qquad (19.6)$$

Далее решение не отличается от описанного в способе сравнения перемещений (§ 112).

Определение перемещений в статически неопределимых балках, после раскрытия их статической неопределимости, ничем не отличается от решения такой же задачи для статически определимых балок. Если для определения перемещений потребовалось ввести добавочную силу (§ 103), то ее следует считать приложенной к основной схеме балки. В этом случае добавочная сила отразится только в основных реакциях, а «лишняя» неизвестная по-прежнему должна рассматриваться как активная сила.

При решении той же задачи (рис. 273) по способу Мора, кроме первого состояния загружения основной балки заданной нагрузкой и лишней неизвестной (рис. 279, *а*), следует показать ту же балку во втором состоянии загружения — силой P^0 (рис. 279, *б*). При принятых на рис. 279 обозначениях вычисления дадут

$$M = Bx - q\frac{x^2}{2}; \quad M^0 = x, \tag{19.14}$$

т. е. то же, что и при пользовании теоремой Кастильяно.

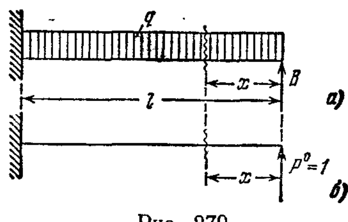


Рис. 279.

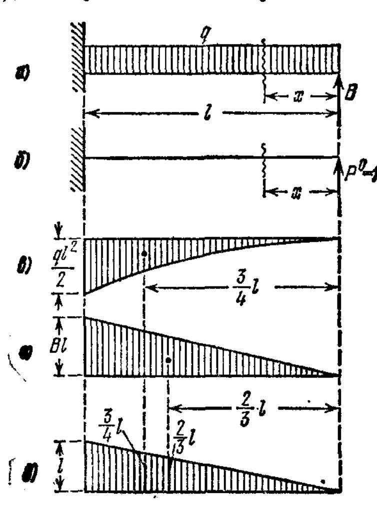


Рис. 280.

При решении той же задачи по способу Верещагина к двум схемам состояния загружения (рис. 280, *а* и *б*) следует построить эпюры моментов: от нагрузки q (рис. 280, *в*), от силы B (рис. 280, *г*) и от силы $P^0=1$ (рис. 280, *д*).

Величина моментных площадей:

от нагрузки q: $\omega_q = -\frac{1}{3}\frac{ql^2}{2}\cdot l = -\frac{ql^3}{6}$,

от нагрузки B: $\omega_B = \frac{1}{2}Bl\cdot l = B\frac{l^2}{2}$.

Ординаты эпюр единичной нагрузки:

для умножения на ω_q: $M_O^0 = \frac{3}{4}l$,

для умножения на ω_B: $M_O^0 = \frac{2}{3}l$.

Прогиб в точке B

$$f_B=\frac{1}{EJ}\left(\frac{Bl^2}{2}\cdot\frac{2}{3}l-\frac{ql^3}{6}\cdot\frac{3}{4}l\right)=0.$$

Отсюда

$$B=\frac{3}{8}ql. \qquad (19.6)$$

Далее решение идет, как указано в §§ 110 и 112.

§ 114. Пример расчета простейшей статически неопределимой рамы

Построить эпюру изгибающих моментов для рамы (рис. 281). Жесткость элементов рамы одинакова и постоянна по длине элементов. Обозначая реакции через A, H, M_A и C, составляем уравнения статики

$$H=P;\quad A+C=0;\quad Pa-Ca-M_A=0.$$

Лишних неизвестных одна; пусть это будет реакция C. Основная система с нагрузкой силой P и лишней неизвестной показана на рис. 282.

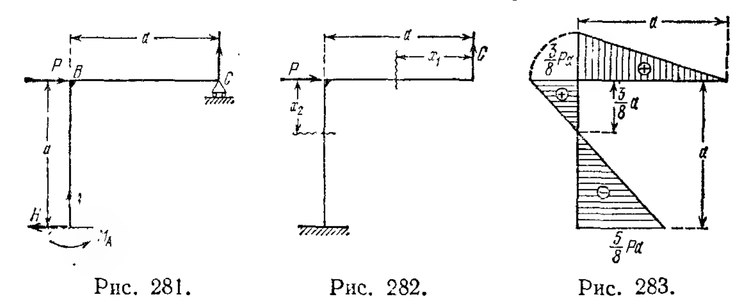


Рис. 281. Рис. 282. Рис. 283.

Применим теорему Кастильяно. В уравнении совместности деформаций

$$f_C=\frac{\partial U}{\partial C}=0;$$

потенциальная энергия U является суммой величин энергии для первого участка CB и второго BA. Уравнение $f_C=0$ принимает вид

$$\frac{1}{EJ}\int_0^a M_1\frac{\partial M_1}{\partial C}\,dx+\frac{1}{EJ}\int_0^a M_2\frac{\partial M_2}{\partial C}\,dx=0.$$

Вычисляем моменты и их производные:

$$M_1=+Cx_1;\quad \frac{\partial M_1}{\partial C}=x_1;\quad M_2=+Ca-Px_2;\quad \frac{\partial M_2}{\partial C}=+a.$$

Подставляя в уравнение совместности

$$\int_0^a Cx_1^2\,dx+\int_0^a (Ca-Px_2)\,a\,dx=0$$

и вычисляя интегралы, получаем

$$\frac{Ca^3}{3}+Ca^3-\frac{Pa^3}{2}=0 \qquad C=\frac{3}{8}P.$$

Изгибающие моменты будут: на первом участке $M_1=\frac{3}{8}Px_1$; на втором участке $M_2=\frac{3}{8}Pa-Px_2$. Эпюра моментов показана на рис. 283.

При решении того же примера способом Верещагина изобразим два состояния загружения: заданными силами и опорной реакцией C (рис. 284, *а*) и единичной

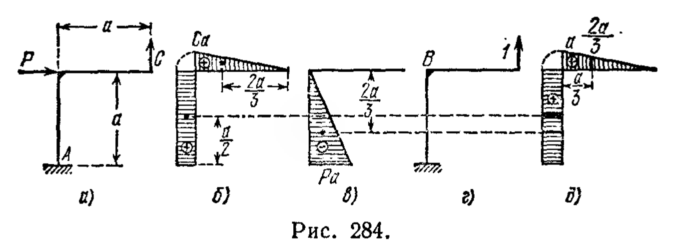


Рис. 284.

силой, действующей в направлении реакции C (рис. 284, *г*). Строим эпюры M и M^0. Площади эпюр первого состояния загружения (рис. 284, *б* и *в*):

$$\omega_1=+\frac{1}{2}Ca\cdot a=+\frac{Ca^2}{2},$$

$$\omega_2'=+Ca\cdot a=+Ca^2 \quad \text{и} \quad \omega_2''=-\frac{1}{2}Pa\cdot a=-\frac{Pa^2}{2}.$$

Ординаты единичных эпюр, соответствующие центрам тяжести эпюр первого состояния загружения (рис. 284, *б* и *в*):

$$M^0_{C_1}=+\frac{2}{3}a; \quad M^{0'}_{C_2}=+a; \quad M^{0''}_{C_2}=+a.$$

Условие совместности перемещений (после сокращения на EJ)

$$\frac{Ca^2}{2}\cdot\frac{2}{3}a+Ca^2\cdot a-\frac{Pa^2}{2}\cdot a=0,$$

откуда $C=\frac{3}{8}P$, как и в решении, показанном выше.

§ 115. Расчет неразрезных балок

Очень важным с практической точки зрения типом статически неопределимых конструкций является *неразрезная балка*, проходящая, не прерываясь, над рядом промежуточных опор, с которыми она соединена шарнирно. Крайние опоры могут быть или шарнирными или защемленными. Сначала мы разберем случай шарнирных опор. Одна из опор неразрезной балки делается обычно шарнирно-неподвижной, прочие — шарнирно-подвижными. Нумерацию опор и пролетов будем вести от левой руки к правой, обозначая крайнюю левую опору номером 0 и крайний левый пролет номером 1. Длины

пролетов будем обозначать буквой l с соответствующим номеру пролета значком. Сечения балки во всех пролетах будем считать одинаковыми и, следовательно, жесткость балки EJ — постоянной. На рис. 285 изображена неразрезная балка, указаны принятые обозначения и изображены возможные реакции опор. Как легко видеть, число лишних опорных реакций равно числу промежуточных опор.

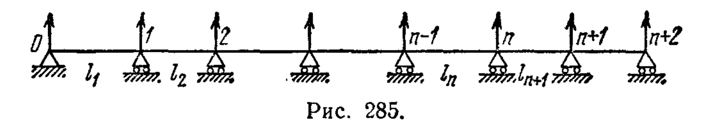


Рис. 285.

Применяя описанный выше прием решения задачи, следовало бы взять за дополнительные неизвестные реакции промежуточных опор, а за основную систему — балку, шарнирно-опертую в точках 0 и $n+2$. Дополнительными уравнениями служили бы условия равенства нулю прогибов в точках основной системы, соответствующих промежуточным опорам; в этом случае все неизвестные входили бы во все уравнения. Однако более простым и распространенным является другой способ, связанный с иным видом основной системы и дополнительных неизвестных; при этом способе в каждое из уравнений входит не больше трех неизвестных.

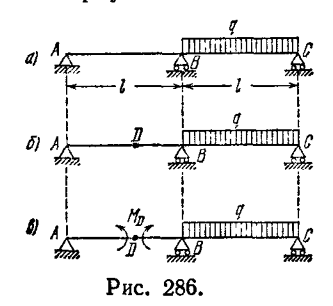


Рис. 286.

Операции выбора лишней неизвестной и основной системы неразрывно связаны друг с другом; основная статически определимая система получается из статически неопределимой путем отбрасывания опорных закреплений, вызывающих опорные реакции, принятые за лишние.

Можно поступить иначе: превратить каким-либо способом рассматриваемую статически неопределимую конструкцию в статически определимую, а затем посмотреть, какие усилия или реакции пришлось бы при этом отбросить. Эти величины и будут лишними неизвестными в нашей статически неопределимой системе.

Так, в двухпролетной неразрезной балке (рис. 286, *а*) можно принять за лишнюю неизвестную хотя бы реакцию средней опоры B; тогда основной системой будет балка на двух опорах A и C; но можно превратить рассматриваемую балку в статически определимую путем устройства дополнительного шарнира в точке D (рис. 286, *б*). Тогда получится основная система, состоящая из консольной балки CBD и подвесной AD. Постановка шарнира в сечении D требует, чтобы изгибающий момент, а значит, и вызываемые им нормальные напряжения в этом сечении были равны нулю. Таким образом, при

переходе к основной системе мы отбросили эти нормальные напряжения в сечении D, передающиеся от левой части на правую, и наоборот; они суммируются в пары сил, равные изгибающему моменту в сечении D; эти пары, вновь приложенные к основной системе, показаны на рис. 286, *в*.

Превращая нашу балку в статически определимую путем введения шарнира D, мы за лишнюю неизвестную выбираем не внешнюю силу — одну из опорных реакций, а величину изгибающего момента в этом сечении.

Положение сечения D может быть взято произвольно; вычисления получаются наиболее простыми, если совместить точку D с опорным сечением над промежуточной опорой — точкой B, т. е. взять за лишнюю неизвестную *опорный момент* в сечении B. Тогда основная система будет представлять собой две простые балки, шарнирно-опертые в точках A, B и C, имеющие общую опору в точке B.

Именно так и выбирают основную систему при расчете неразрезных балок. За лишние неизвестные выбирают величины опорных изгибающих моментов M_1, M_2, . . ., M_{n-1}, M_n, M_{n+1} над всеми промежуточными опорами.

При таком выборе лишних неизвестных уравнения для их определения упрощаются и могут быть составлены в общем виде при помощи *теоремы о трех моментах*.

§ 116. Теорема о трех моментах

Для вывода теоремы о трех моментах возьмем неразрезную балку с рядом пролетов различной длины l_1, l_2 и т. д. и с какими угодно вертикальными нагрузками (рис. 287, *а*). Сначала изобразим все реакции, которые могут быть в данном случае; из условий равновесия ясно, что горизонтальная реакция $H_0=0$.

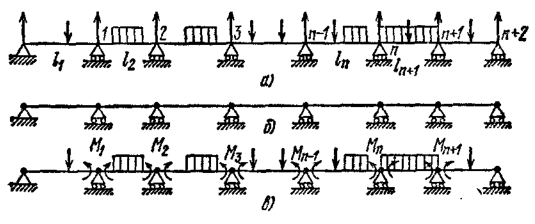


Рис. 287.

Для того чтобы получить основную систему (рис. 287, *б*), расположим в опорных сечениях шарниры. Добавочными неизвестными окажутся опорные моменты над промежуточными опорами M_1, M_2, M_3, . . . и т. д. Моменты над крайними опорами равны нулю. Загрузим основную систему внешними нагрузками и опорными моментами (рис. 287, *в*). Так как направление опорных моментов нам

неизвестно, то примем их положительными. При решении знак результата покажет, правильно ли наше предположение.

Теперь необходимо составить условие, вносящее то же ограничение на деформации основной системы, которое имеется в неразрезной балке. В основной системе обе стороны n-го опорного сечения, разделенные поставленным в балку шарниром (рис. 288), могут поворачиваться под нагрузкой независимо одна от другой. Угол поворота сечения на опоре n левого примыкающего к данной опоре пролета обозначим θ'_n, а угол поворота сечения на опоре n для правого примыкающего пролета назовем θ''_n. Эти *возможные* углы поворота опорных сечений смежных пролетов показаны на рис. 288. В неразрезной балке оба опорных сечения *совпадают*, представляют собой лишь *разные стороны* одного и того же опорного сечения, поэтому в этом случае условием совместности деформаций будет

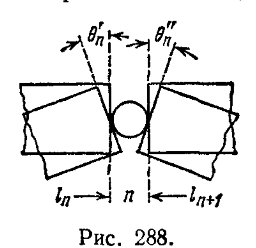


Рис. 288.

$$\theta'_n - \theta''_n = 0. \qquad (19.15)$$

Это и есть то ограничение, которое мы должны ввести для опорных сечений смежных балок над опорой n в нашей основной системе, загруженной внешними силами и опорными моментами. Такое условие мы можем составить для каждой из промежуточных опор и, значит, написать столько добавочных уравнений, сколько мы имеем неизвестных опорных моментов.

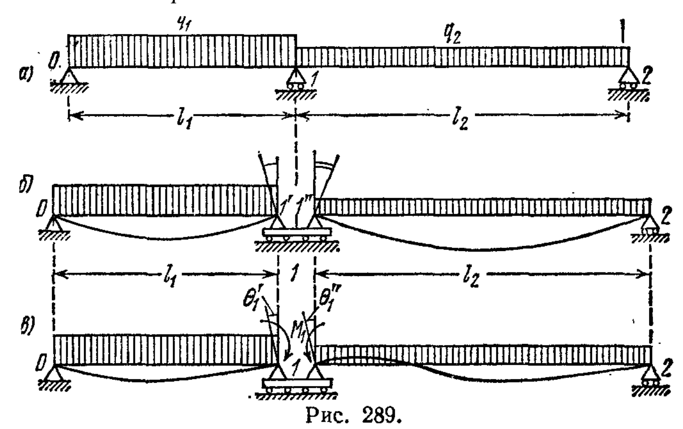


Рис. 289.

Поясним составление условия (19.15) примером. Возьмем двухпролетную неразрезную балку (рис. 289, а), загруженную различными сплошными нагрузками в обоих пролетах q_1 и q_2.

Основная система, нагруженная только внешней нагрузкой, показана на рис. 289, б. Для ясности чертежа оба смежных пролета представлены несколько раздвинутыми на опоре 1; на самом деле шарниры 1' и 1'' совпадают.

Обе стороны опорного сечения 1 повернутся, как показано на чертеже. В неразрезной балке деформации должны совпадать; этого можно добиться, загружая основную систему отрицательным опорным моментом M_1 (рис. 289, *в*) и подбирая его величину так, чтобы достигнуть этого совпадения; но отсюда и следует, что для указанного совпадения деформации основной системы должны удовлетворять условию

$$\theta_1' - \theta_1'' = 0. \qquad (19.15')$$

Следуя далее плану расчета статически неопределимой балки по методу сравнения перемещений и возвращаясь к схеме рис. 287, мы должны развернуть уравнение (19.15), вычислив величины перемещений, входящие в него.

Углы поворота сечений *в основной системе* на опоре n зависят от деформаций только двух смежных пролетов l_n и l_{n+1}. Выделим эти два пролета со всеми действующими на них нагрузками (рис. 290).

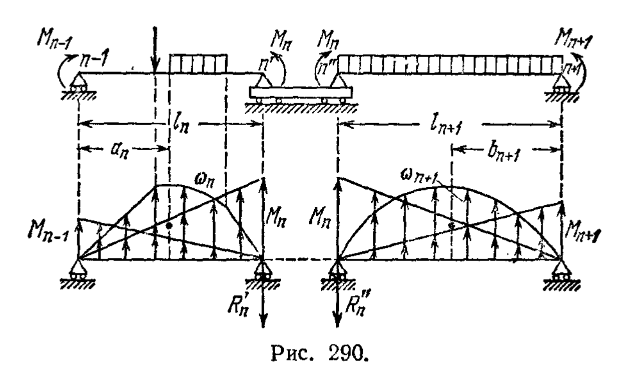


Рис. 290.

На пролет l_n действуют внешние силы, расположенные на нем, и опорные моменты M_{n-1} и M_n; на пролет l_{n+1} действуют помимо внешних нагрузок опорные моменты M_n и M_{n+1}. Для ясности чертежа оба смежных пролета представлены несколько раздвинутыми на опоре n; на самом деле шарниры n' и n'' совпадают.

Для вычисления углов θ_n' и θ_n'' воспользуемся графоаналитическим методом. Фиктивные балки, изображенные под чертежом рассматриваемых пролетов, представляют собой тоже балки шарнирно-опертые. Фиктивной нагрузкой левого пролета l_n служит:

а) эпюра изгибающего момента от внешних нагрузок с грузовой площадью ω_n и расстоянием центра тяжести этой площади от *левой* опоры a_n; так как эпюра положительна, то ставим на ординатах стрелки вверх; если ординаты этой эпюры будут отрицательными, то при вычислениях величину ω_n придется вводить с минусом;

б) треугольная эпюра изгибающего момента от положительного опорного момента M_{n-1};

в) треугольная эпюра изгибающего момента от положительного опорного момента M_n.

На правую фиктивную балку пролета l_{n+1} действуют нагрузки:

а) эпюра изгибающего момента от внешних сил с грузовой площадью ω_{n+1} и расстоянием центра тяжести от *правой* опоры b_{n+1};

б) треугольная эпюра изгибающего момента от положительного опорного момента M_n;

в) треугольная эпюра изгибающего момента от положительного опорного момента M_{n+1}.

Угол поворота опорного сечения n' левого пролета равен деленной на жесткость поперечной силе на этой опоре для соответствующей фиктивной балки:

$$\theta'_n = \frac{Q'_n}{EJ};$$

поперечная же сила в опорном сечении равна опорной реакции фиктивной балки R_n'.

Вычислим эту реакцию; грузовая площадь ω_n распределяется между опорами фиктивной балки по закону рычага, передавая на опору n' часть нагрузки, равную $\omega_n \frac{a_n}{l_n}$; треугольная нагрузка с наибольшей ординатой M_n передает на эту опору две трети своей величины, а треугольная нагрузка с ординатой M_{n-1} — одну треть. Таким образом,

$$R'_n = \omega_n \cdot \frac{a_n}{l_n} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} M_n l_n + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} M_{n-1} l_n =$$

$$= \omega_n \frac{a_n}{l_n} + \frac{1}{3} M_n l_n + \frac{1}{6} M_{n-1} l_n.$$

Фиктивная поперечная сила Q'_n равна этой реакции со знаком плюс:

$$Q'_n = R'_n.$$

Угол поворота θ'_n равен

$$\theta'_n = \frac{Q'_n}{EJ} = \frac{1}{6EJ}\left[6\omega_n \frac{a_n}{l_n} + 2M_n l_n + M_{n-1} l_n\right].$$

Подобным же образом получаем для правого пролета

$$R'_n = \omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} + \frac{1}{3} M_n l_{n+1} + \frac{1}{6} M_{n+1} l_{n+1}.$$

Поперечная сила в этом случае равна опорной реакции со знаком минус:

$$Q''_n = -R''_n,$$

а угол поворота θ''_n равен

$$\theta''_n = -\frac{1}{6EJ}\left[6\omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} + 2M_n l_{n+1} + M_{n+1} l_{n+1}\right].$$

Подставляя значения θ'_n и θ''_n в уравнение (19.15) и сокращая на $6EJ$, получаем

$$\left[6\omega_n \frac{a_n}{l_n} + 2M_n l_n + M_{n-1} l_n\right] + \\ + \left[6\omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} + 2M_n l_{n+1} + M_{n+1} l_{n+1}\right] = 0,$$

или

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -6\left[\frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}\right]. \quad (19.16)$$

Это и есть уравнение трех моментов.

Таких уравнений мы можем написать столько, сколько имеем промежуточных опор, т. е. сколько имеем неизвестных опорных моментов. После вычисления опорных моментов задача сводится к расчету ряда шарнирно-опертых балок, нагруженных уже известными опорными моментами и внешней нагрузкой.

В скобках в правой части уравнения (19.16) оказалась сумма фиктивных реакций на средней опоре от заданной нагрузки, расположенной на двух смежных пролетах. Следовательно, теорема о трех моментах (19.16) может быть записана короче так:

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -6R_n^{\text{ф}}. \quad (19.17)$$

Под $R_n^{\text{ф}}$ подразумевается при этом *фиктивная опорная реакция* средней опоры (n) от эпюр $M(x)$ *заданной нагрузки* на обоих смежных пролетах.

§ 117. Пример применения теоремы о трех моментах

Рассмотрим неразрезную трехпролетную балку постоянного сечения, загруженную, как показано на рис. 291, *а*. Перенумеруем опоры от левой руки к правой. Уравнение трех моментов следует написать два раза: для опоры *1* и для опоры *2*.

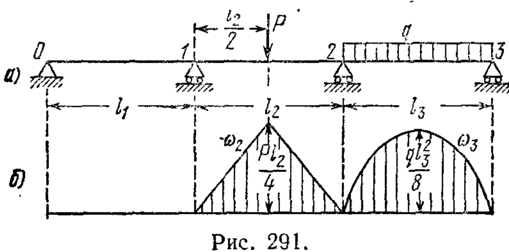


Рис. 291.

Нам понадобятся площади эпюр изгибающих моментов от внешней нагрузки для основной системы. Эти эпюры построены на рис. 291, *б*. Напишем уравнение трех моментов (19.17) для опоры *1*. Полагаем $n=1$; тогда

$$M_{n-1} = M_0 = 0; \quad \omega_n = \omega_1 = 0;$$

$$\omega_{n+1} = \omega_2 = +\frac{1}{2}\frac{Pl_2}{4} l_2 = +\frac{Pl_2^2}{8}; \quad b_{n+1} = b_2 = \frac{l_2}{2}.$$

Уравнение имеет вид

$$2M_1(l_1+l_2)+M_2 l_2=-\frac{3}{8}Pl_2^2. \qquad (19.18)$$

Переходим к опоре 2; полагаем $n=2$; тогда $M_{n+1}=M_3=0$;

$$\omega_n=\omega_2=+\frac{Pl_2^2}{8}; \quad \omega_{n+1}=\omega_3=+\frac{2}{3}l_3\cdot q\frac{l_3^2}{8}=+\frac{ql_3^3}{12};$$

$$a_n=a_2=\frac{l_2}{2}; \quad b_{n+1}=b_3=\frac{l_3}{2}.$$

Второе уравнение трех моментов получает форму

$$M_1 l_2+2M_2(l_2+l_3)=-\frac{3}{8}Pl_2^2-\frac{ql_3^3}{4}. \qquad (19.19)$$

Лишние неизвестные M_1 и M_2 определятся решением уравнений (19.18) и (19.19).

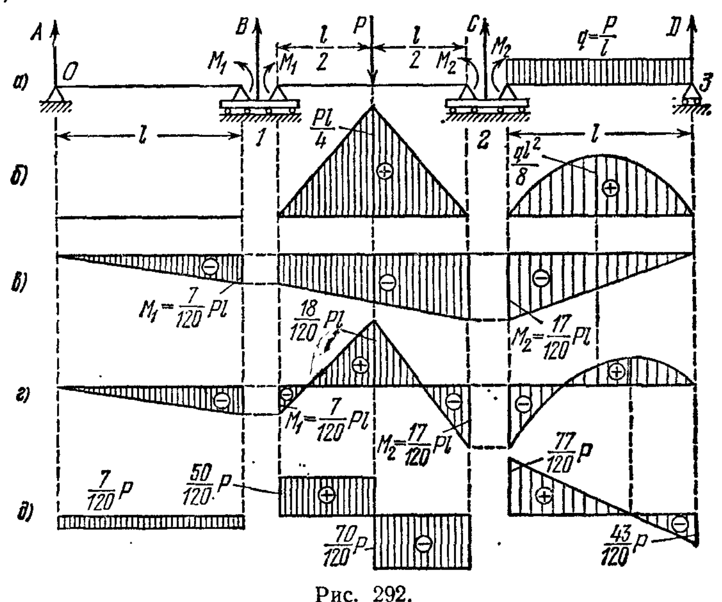


Рис. 292.

В частном случае, если принять $l_1=l_2=l_3=l$ и $ql=P$ (рис. 292), то $M_1=-\frac{7}{120}Pl$, а $M_2=-\frac{17}{120}Pl$.

Зная величины опорных моментов, можно легко построить эпюру моментов для неразрезной балки, не делая дополнительных вычислений. Для этого вычерчиваем в основной системе эпюры изгибающего момента от заданной нагрузки (рис. 292, *б*). Эпюры изгибающего момента от опорных моментов M_1 и M_2 показаны на рис. 292, *в*. Суммарная эпюра с характерными ординатами показана на рис. 292, *г*. Все построения можно производить и без раздвигания опорных сечений; в данном случае это сделано лишь в целях большей наглядности.

Вычисление опорных реакций можно производить для каждого пролета отдельно. Затем значения двух реакций на каждой промежуточной опоре, вычисленные раздельно, складываются алгебраически.

Можно вычислить опорные реакции и иначе.

Сумму моментов всех сил слева от опоры *1*, относительно этой опоры, приравниваем значению опорного момента M_1: $Al = M_1 = -\frac{7}{120}Pl$; находим $A = -\frac{7}{120}P$ (знак минус говорит о том, что реакция A направлена вниз). Рассмотрим теперь два левых пролета. Сумма моментов всех сил относительно опоры *2* равняется величине опорного момента M_2:

$$A2l + Bl - P\cdot 0{,}5l = M_2 = -\frac{17}{120}Pl.$$

Подставив уже известное нам значение A и произведя вычисления, находим $B = -\frac{57}{120}P$ (направлена вверх).

Затем рассмотрим крайний левый пролет

$$Dl - 0{,}5Pl = M_2 = -\frac{17}{120}Pl; \quad D = \frac{43}{120}P.$$

И рассмотрев, наконец, два правых пролета, определим C:

$$D2l - \frac{3}{2}Pl + Cl - \frac{1}{2}Pl = M_1 = -\frac{7}{120}P; \quad C = \frac{147}{120}P.$$

Затем произведем контроль правильности вычислений:

$$\sum y = 0; \quad A + B + C + D = 2P,$$

$$-\frac{7}{120}P + \frac{57}{120}P + \frac{147}{120}P + \frac{43}{120}P = 2P.$$

Устанавливаем, что подсчет верен. Зная все реакции, мы без каких-либо затруднений строим эпюры поперечной силы для всех участков балки (рис. 292, *д*).

§ 118. Неразрезные балки с консолями. Балки с защемленными концами.

Теорему о трех моментах легко распространить на те случаи, когда неразрезная балка имеет консоли или когда концы балки (один или оба) защемлены.

Рассмотрим двухпролетную балку с консолью на правом конце (рис. 293, *а*), которая работает при следующих данных:

$$l_1 = 6\ м; \quad l_2 = 5\ м; \quad a = 2\ м; \quad q = 4\ Т/м.$$

Опорный момент M_C следует считать известным и равным изгибающему моменту в сечении C от нагрузки, расположенной на консоли.

Таким образом, для составления уравнения трех моментов имеем

$$M_{n-1}=M_0=0;\quad M_n=M_1=?;\quad M_{n+1}=M_2=-\frac{qa^2}{2};\quad n=1;$$

$$\omega_1=0;\quad \omega_2=\frac{ql_2^3}{12}.$$

Уравнение имеет вид

$$2M_1(l_1+l_2)-\frac{qa^2}{2}\cdot l_2=-6\frac{ql_2^3}{12}\cdot\frac{1}{2}, \tag{19.20}$$

или

$$2M_1(l_1+l_2)=\frac{qa^2l_2}{2}-\frac{ql_2^3}{4},$$

откуда

$$M_1=-3{,}86\ Тм.$$

При определении опорных реакций рекомендуется рассмотреть отдельно балку AB и отдельно балку с консолью BCD.

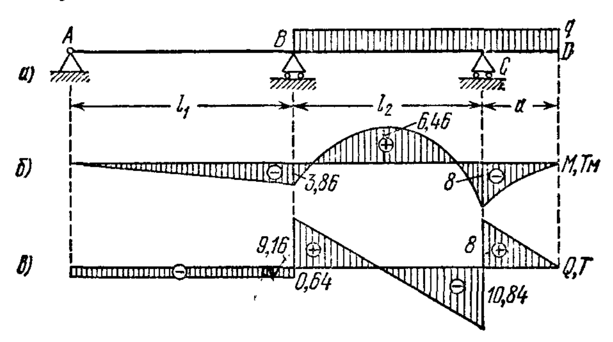


Рис. 293.

Эпюры изгибающего момента и поперечной силы построены на рис. 293, *б* и *в*.

Чтобы выяснить, как следует поступать при наличии защемленного конца балки, рассмотрим конструкцию такого защемления (рис. 294).

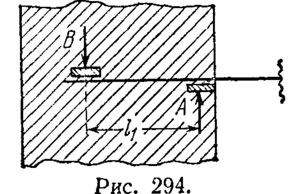


Рис. 294.

Защемленный конец можно рассматривать как подпертый снизу в точке A и сверху в точке B, или наоборот. Подобное защемление не будет абсолютно жестким, так как участок балки между точками A и B длиной l_1 имеет возможность несколько деформироваться, вследствие чего сечение балки, совпадающее с лицевой гранью стены, может поворачиваться. Чем короче будет участок l_1, чем больше его момент инерции

и чем неподатливее стена, тем более жестким будет защемление. Вполне защемленный конец балки мы получим, полагая в пределе l_1 равным нулю (или $J_1=\infty$). При расчете неразрезной балки с защемленным концом необходимо вместо защемления добавить еще пролет, составить уравнения трех моментов и перейти к пределу, полагая l_1 равным нулю (или $J_1=\infty$).

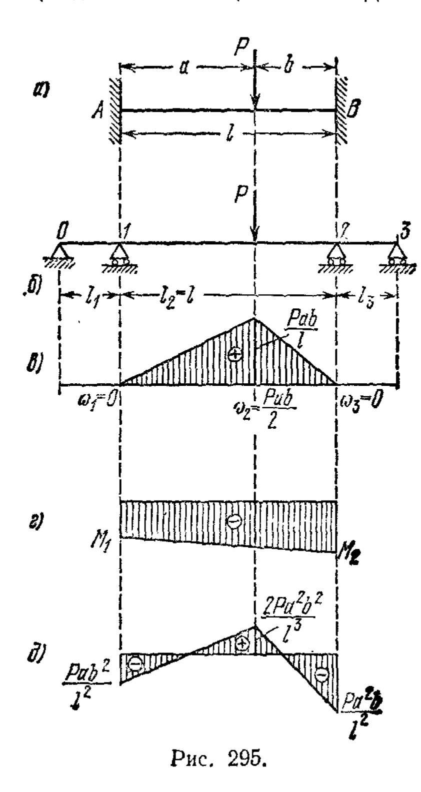


Рис. 295.

Рассмотрим балку с двумя защемленными концами, нагруженную силой P на расстояниях a и b от левой и правой опор (рис. 295, *а*). Предполагается, что опоры A и B не препятствуют продольным деформациям балки. Вместо защемленных концов добавляем слева и справа по пролету, и, таким образом, переходим к расчету трехпролетной неразрезной балки (рис. 295, *б*).

Данные к составлению уравнения трех моментов для опоры *1*:

$$M_{n-1}=M_0=0; \qquad \omega_n=\omega_1=0;$$

$$\omega_{n+1}\frac{b_{n+1}}{l_{n+1}}=\frac{Pab}{6}\left(1+\frac{b}{l_2}\right).$$

Уравнение получает вид

$$2M_1(l_1+l_2)+M_2l_2=$$
$$=-6\frac{Pab}{6}\left(1+\frac{b}{l_2}\right). \qquad (19.21)$$

Данные к уравнению трех моментов для опоры *2* ($n=2$):

$$M_{n+1}=M_3=0; \qquad \omega_n\frac{a_n}{l_n}=\frac{Pab}{6}\left(1+\frac{a}{l_2}\right); \qquad \omega_{n+1}=\omega_3=0.$$

Тогда

$$M_1l_2+2M_2(l_2+l_3)=-6\frac{Pab}{6}\left(1+\frac{a}{l_2}\right). \qquad (19.22)$$

Теперь в уравнениях трех моментов (19.21) и (19.22) положим $l_1=l_3=0$, а $l_2=l$; тогда получаем систему

$$2M_1l+M_2l=-Pab\left(1+\frac{b}{l}\right);$$

$$M_1l+2M_2l=-Pab\left(1+\frac{a}{l}\right).$$

Решая эту систему, находим

$$M_1 = -\frac{Pab^2}{l^2};$$

$$M_2 = -\frac{Pa^2b}{l^2}.$$

Момент под грузом M_P равен при $x=a$

$$M_P = P\frac{ab}{l} + \frac{M_1 b}{l} + \frac{M_2 a}{l} = \frac{2Pa^2b^2}{l^3}.$$

По этим данным построена на рис. 295, *д* эпюра изгибающих моментов.

Отдел VII

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Глава XX

КОСОЙ ИЗГИБ

§ 119. Основные понятия

До сих пор мы рассматривали задачи, где стержни конструкции испытывали одну из простейших деформаций: осевое растяжение или сжатие, кручение, плоский изгиб. На практике же большинство элементов конструкций и машин подвергается действиям сил, вызывающих одновременно не одну из указанных деформаций, а две и более.

Валы машин подвергаются действию кручения и изгиба; стержни ферм (стропильных, мостовых, крановых), помимо растяжения или сжатия, испытывают еще и изгиб, вызываемый устройством в узлах сварных или клепаных соединений взамен шарниров, предполагающихся при выполнении расчетов. Все такие случаи сопротивления стержней, когда мы имеем дело с комбинацией простейших деформаций, называются *сложным сопротивлением*.

При расчетах на сложное сопротивление обычно исходят из так называемого *принципа независимости действия сил*, т. е. предполагают, что влиянием деформаций, вызванных одной из приложенных к упругой системе нагрузок, на расположение, а следовательно, и на результаты действия остальных нагрузок можно пренебречь. Опыт показывает, что, пока деформации системы малы, этот принцип может быть использован (исключительные случаи, когда он вообще не применим, будут рассмотрены ниже); а поэтому для нахождения полных напряжений и деформаций, возникающих в упругой системе в результате действия на нее любой сложной системы нагрузок, можно применять способ сложения действия сил, т. е. геометрически суммировать напряжения и перемещения, соответствующие различным видам простейших деформаций.

Вначале рассмотрим решение частных задач сложного сопротивления, а затем и самый общий случай действия сил на упругую си- систему.

§ 120. Косой изгиб. Вычисление напряжений

Для вычисления нормальных напряжений при изгибе мы до сих пор пользовались формулой $\sigma = Mz/J_y$. Однако нормальные напряжения в каком-либо сечении балки полностью определяются по этой формуле только в случае плоского изгиба[1]), когда искривление оси балки происходит в плоскости действия сил и нейтральной осью является главная ось инерции поперечного сечения, перпендикулярная к плоскости нагрузки.

На практике часто встречаются случаи, когда плоскость действия сил, перпендикулярных к оси стержня, не совпадает ни с одной из двух плоскостей, проходящих через ось стержня и главные оси инерции поперечных сечений стержня. Опыт показывает, что изогнутая ось стержня при этом уже не будет лежать в плоскости действия сил, и мы будем иметь случай так называемого *косого изгиба.*

Обрешетины кровли обычно подвергаются нагрузкам, плоскость действия которых составляет довольно значительный угол с главными осями (рис. 296); довольно часто встречаются и случаи, когда

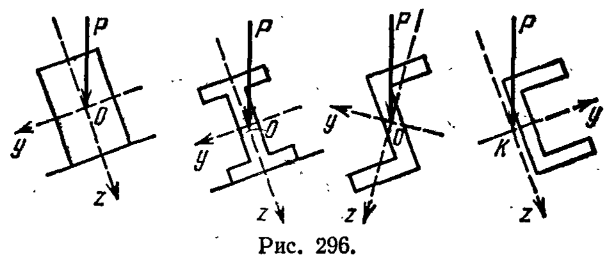


Рис. 296.

направление нагрузок лишь слегка отклоняется от главных осей инерции.

Покажем на примере метод проверки прочности и вычисления деформаций балок при косом изгибе.

Рассмотрим балку, защемленную одним концом и нагруженную на другом силой P, лежащей в плоскости торца балки и направленной под углом φ к главной оси Bz (рис. 297). Вторая главная ось By пойдет перпендикулярно к первой; направления этих осей выберем так, чтобы сила P проходила в первом квадранте координатной системы.

Для проверки прочности необходимо найти точку с наибольшим нормальным напряжением. Выведем сначала формулу для вычисления нормального напряжения в любой точке произвольного сечения, отстоящего на расстояние x от свободного конца балки.

---

[1]) Говоря более точно, это будет иметь место, когда все силы лежат в одной из главных плоскостей инерции стержня, проходящей через центр изгиба; в целом ряде случаев последний совпадает с центром тяжести поперечного сечения (§ 79).

Разложим силу P на составляющие P_z и P_y, направленные по *главным* осям инерции сечения Bz и By. Величины этих составляющих определяются формулами

$$P_z = P\cos\varphi \quad \text{и} \quad P_y = P\sin\varphi.$$

Таким образом, мы привели случай косого изгиба к комбинации двух плоских изгибов, вызванных силами P_z и P_y, расположенными

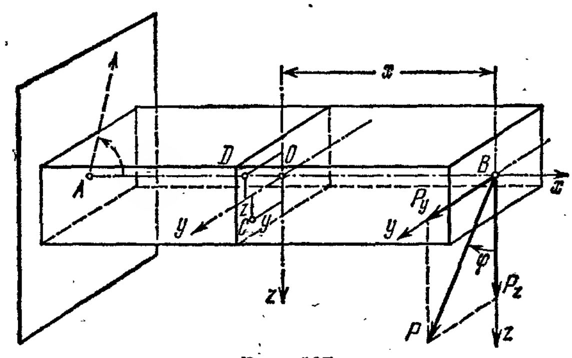
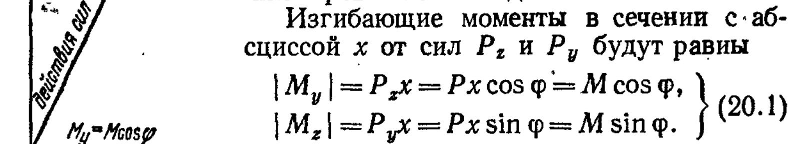


Рис. 297.

в главных плоскостях инерции балки. Суммируя напряжения и деформации, соответствующие каждому из этих изгибов, мы получим решение и для косого изгиба.



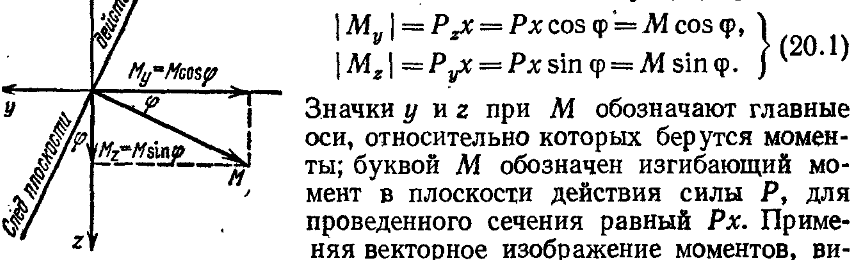


Рис. 298.

Изгибающие моменты в сечении с абсциссой x от сил P_z и P_y будут равны

$$\left.\begin{aligned} |M_y| &= P_z x = Px\cos\varphi = M\cos\varphi, \\ |M_z| &= P_y x = Px\sin\varphi = M\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (20.1)$$

Значки y и z при M обозначают главные оси, относительно которых берутся моменты; буквой M обозначен изгибающий момент в плоскости действия силы P, для проведенного сечения равный Px. Применяя векторное изображение моментов, видим, что для вычисления изгибающих моментов M_y и M_z можно было непосредственно разложить полный изгибающий момент M по главным осям (рис. 298).

Для установления знаков изгибающих моментов следовало бы ввести дополнительные условия, определяющие эти знаки в связи с переходом к пространственной задаче. Это и будет сделано ниже; сейчас же ограничимся лишь вычислением абсолютной величины изгибающих моментов, влияние же направления моментов на знаки напряжений учтем при вычислении последних.

Вычислим напряжения в какой-либо точке C (с координатами y и z), расположенной в первом квадранте (рис. 297). Мы имеем возможность вычислить для этой точки нормальные напряжения, вызванные отдельно моментами M_y и M_z, изгибающими балку в главных плоскостях xz и xy; в этом случае применимы формулы, полученные для плоского изгиба.

Нормальное напряжение в точке C от изгиба моментом M_y является сжимающим (отрицательным) и выражается формулой $-\frac{M_y \cdot z}{J_y} = -\frac{M \cdot z}{J_y}\cos\varphi$, где J_y — момент инерции относительно оси y, которая при изгибе моментом M_y будет нейтральной осью. Момент M_z вызывает в этой точке тоже сжимающее напряжение, равное $-\frac{M_z y}{J_z} = -\frac{My}{J_z}\sin\varphi$; J_z — момент инерции сечения относительно оси z. Полное напряжение в точке C находим как алгебраическую сумму полученных напряжений:

$$\sigma = -\frac{M_y z}{J_y} - \frac{M_z y}{J_z} = -M\left(\frac{z\cos\varphi}{J_y} + \frac{y\sin\varphi}{J_z}\right). \qquad (20.2)$$

В данном случае этой формулой можно пользоваться при вычислении напряжений в любой точке каждого сечения балки. Так как формула выведена для точки с положительными координатами y и z, то, подставляя в нее значения координат с соответствующими знаками, будем всегда получать по формуле (20.2) правильный знак напряжения.

Так, для точки D (рис. 297) координата y будет положительна, а z — отрицательна; в соответствии с этим первое слагаемое в формуле (20.2) представит собой положительное (растягивающее) напряжение, а второе — по-прежнему сжимающее.

Хотя формула (20.2) и получена из рассмотрения частного случая косого изгиба балки, защемленной одним концом и нагруженной на другом сосредоточенной силой P, однако, как нетрудно заметить, она является общей формулой для вычисления напряжений при косом изгибе. Для балок, иначе нагруженных и закрепленных, нужно лишь договориться о правиле знаков. Если положительное направление главных центральных осей инерции поперечного сечения балки всегда выбирать так, чтобы след плоскости действия сил в сечении проходил через первый квадрат, то знак перед правой частью формулы (20.2) необходимо назначить по тому действию, которое изгибающий момент M (или, что равноценно, его компоненты) оказывают на любую площадку первого квадранта (при растяжении ставить плюс, при сжатии — минус). Тогда для получения по формуле (20.2) правильного знака напряжения на любой другой площадке поперечного сечения достаточно учитывать знаки координат y и z.

Для нахождения наибольшего нормального напряжения надо отыскать опасное сечение балки и в нем наиболее напряженную точку. Из формулы (20.2) видно, что опасным сечением будет то, где изгибающий момент M достигнет наибольшей величины.

Для нахождения опасной точки учтем, что при *плоском* изгибе деформация, соответствующая нормальным напряжениям, сводится к относительному повороту сечений вокруг нейтральных осей. При косом изгибе, являющемся комбинацией двух плоских изгибов, мы имеем одновременный относительный поворот сечений вокруг двух осей, пересекающихся в центре тяжести сечения.

Из кинематики известно, что вращение фигуры вокруг двух пересекающихся осей может быть заменено вращением вокруг оси, проходящей через точку пересечения. Таким образом, и при косом изгибе мы в каждом сечении будем иметь линию, проходящую через центр тяжести, вокруг которой будет происходить поворот сечения при деформации балки. Эта ось и будет нейтральной; волокна, расположенные в ее плоскости, не будут удлиняться или укорачиваться, и нормальные напряжения в точках нейтральной оси будут равны нулю. При относительном повороте сечений наибольшую деформацию (растяжение или сжатие) испытывают волокна, наиболее удаленные от нейтральной оси.

Поэтому нахождение опасных точек при косом изгибе сводится к определению положения нейтральной оси и отысканию точек, наиболее далеко от нее отстоящих.

Уравнение нейтральной оси получим из условия, что нормальные напряжения в точках, лежащих на этой оси, равны нулю. Обозначим координаты этих точек y_0 и z_0; подставив эти величины вместо y и z в формулу (20.2), мы должны получить для σ значение, равное нулю:

$$0=-\frac{M\cos\varphi\cdot z_0}{J_y}-\frac{M\sin\varphi\cdot y_0}{J_z}.$$

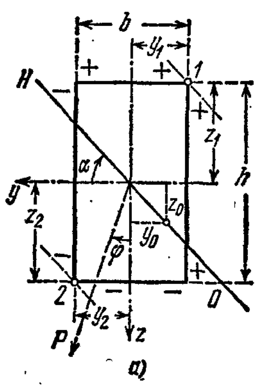
Сокращая на $-M$, имеем

$$\frac{\cos\varphi\cdot z_0}{J_y}+\frac{\sin\varphi\cdot y_0}{J_z}=0. \tag{20.3}$$

Это и есть уравнение нейтральной оси; она является прямой, проходящей через центр тяжести сечения (при $y_0=0$ и $z_0=0$).

На рис. 299 изображены два поперечных сечения балок; оси y и z являются главными осями инерции. В предположении, что балки нагружены по схеме рис. 297, на каждом сечении показана проекция силы P и для каждого квадранта сечения приведены знаки нормальных напряжений; знаки выше и ниже сечения относятся к напряжениям от изгиба моментов M_y, знаки справа и слева от сечения — к напряжениям от изгиба моментом M_z. Для балки, иным образом нагруженной и закрепленной (рис. 300), знаки напряжений соответственно будут другими.

На рис. 299 нанесено примерное расположение нейтральной оси. Так как она проходит через центр тяжести сечения, то для определения ее положения достаточно знать угол α, составленный ею с



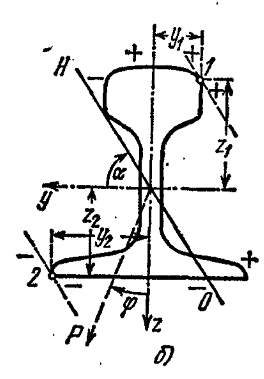


Рис. 299.

осью y. На рис. 299 видно, что тангенс этого угла равен абсолютной величине отношения z_0 к y_0:

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{z_0}{y_0}\right|.$$

Из уравнения (20.3) получаем

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{z_0}{y_0}\right|=\operatorname{tg}\varphi\frac{J_y}{J_z}. \qquad (20.4)$$

Таким образом, положение нейтральной оси не зависит от величины силы P, а лишь от угла наклона плоскости внешних сил к оси z и от формы сечения.

Вычислив по формуле (20.4) величину угла α, строим на чертеже нейтральную ось, а проводя к сечению касательные, параллельно ей, находим наиболее напряженные точки, как наиболее удаленные от нейтральной оси (точки 1 и 2 на рис. 299).

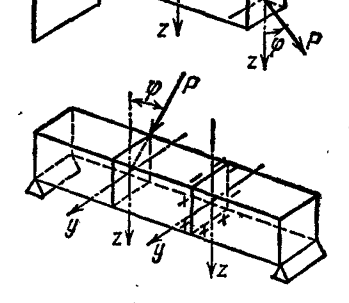


Рис. 300.

Подставляя в формулу (20.2) координаты этих точек (y_1 и z_1 или y_2 и z_2) с учетом их знаков, находим величины наибольшего растягивающего и наибольшего сжимающего напряжений. Условие прочности получает такой вид:

$$|\sigma_{max}|=M_{max}\left[\frac{\cos\varphi}{J_y}z_1+\frac{\sin\varphi}{J_z}y_1\right]\leqslant[\sigma], \qquad (20.5)$$

где y_1 и z_1 (или y_2 и z_2) — координаты точки (в системе главных центральных осей), наиболее удаленной от нейтральной оси.

Для поперечных сечений с выступающими углами, у которых обе главные оси инерции являются осями симметрии (прямоугольник; двутавр),

$$|y_1| = |y_2| = |y_{max}| \quad \text{и} \quad |z_1| = |z_2| = |z_{max}|,$$

формула (20.5) упрощается; для $\sigma_{(1,\ 2)}$ имеем

$$\sigma_{(1,\ 2)} = \pm M\left(\frac{\cos\varphi}{W_y} + \frac{\sin\varphi}{W_z}\right) = \pm\frac{M}{W_y}\left(\cos\varphi + \frac{W_y}{W_z}\sin\varphi\right). \quad (20.6)$$

Условие прочности для таких сечений принимает вид:

$$|\sigma_{max}| = \frac{M_{max}}{W_y}\left(\cos\varphi + \frac{W_y}{W_z}\sin\varphi\right) \leqslant [\sigma]. \quad (20.7)$$

При подборе сечений приходится задаваться отношением $\frac{W_y}{W_z}$ и, зная $[\sigma]$, M_{max} и угол φ, путем последовательных попыток искать значения W_y и W_z, удовлетворяющие условию прочности (20.7).

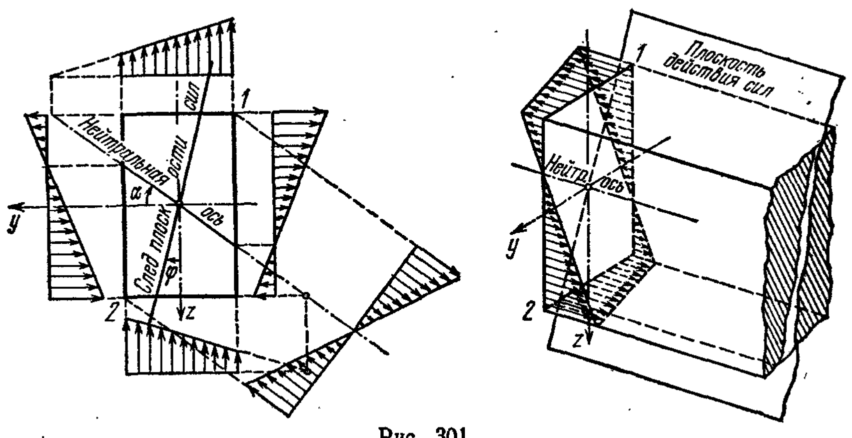


Рис. 301.

В случае несимметричных сечений, не имеющих выступающих углов, т. е. при использовании условия прочности (20.5), при каждой новой попытке подбора сечения необходимо предварительно вновь найти положение нейтральной линии и координаты наиболее удаленной точки (y_1 и z_1). В случае прямоугольного сечения $W_y/W_z = h/b$; поэтому, задаваясь отношением h/b, из условия (20.7) без затруднений можно найти величину W_y и размеры поперечного сечения.

На рис. 301 изображены эпюры распределения напряжений для балки прямоугольного сечения.

Уравнение (20.4) показывает, что углы α и φ не равны, т. е. нейтральная линия *не перпендикулярна* к плоскости внешних сил, как

это было при плоском изгибе. Эта перпендикулярность имеет место лишь при

$$J_y = J_z, \tag{20.8}$$

но в этом случае все оси главные и косой изгиб невозможен; в какой бы плоскости ни была расположена нагрузка, мы будем иметь дело с плоским изгибом. Это будет соблюдаться для сечений квадратного, круглого, являющихся правильными фигурами, и любых других, для которых будет выполнено условие (20.8).

Что касается касательных напряжений, то и их можно вычислить тем же приёмом, которым мы пользовались при вычислении нормальных; суммарное напряжение будет равно геометрической сумме касательных напряжений от изгиба в каждой из главных плоскостей. Практического значения определение этих напряжений обычно не имеет.

§ 121. Определение перемещений при косом изгибе

Для определения прогибов в различных сечениях балки при косом изгибе опять применим способ сложения действия сил. Возвращаясь к примеру, рассмотренному в предыдущем параграфе, находим сначала прогиб точки B (свободного конца балки) только от действия силы P_z; этот прогиб f_z будет направлен по оси z и равен

$$f_z = \frac{P_z l^3}{3EJ_y} = \frac{P\cos\varphi l^3}{3EJ_y},$$

где l — пролет балки. Аналогично прогиб точки B от одной силы P_y будет направлен по оси y и выразится формулой

$$f_y = \frac{P_y l^3}{3EJ_z} = \frac{P\sin\varphi l^3}{3EJ_z}.$$

Полный прогиб f конца балки будет представлять собой геометрическую сумму обоих этих прогибов; он равен

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}. \tag{20.9}$$

При этом

$$\frac{f_y}{f_z} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\frac{J_y}{J_z} = \operatorname{tg}\varphi\frac{J_y}{J_z} = \operatorname{tg}\alpha \tag{20.10}$$

и

$$f = \frac{f_y}{\sin\alpha} = \frac{f_z}{\cos\alpha}.$$

Отсюда следует, что угол, составленный полным прогибом f с осью z, равен углу α, т.е. прогиб f направлен *перпендикулярно к нейтральной оси.* Изгиб балки происходит не в плоскости действия внешних сил, а в плоскости, перпендикулярной к нейтральной оси (рис. 302).

Условимся принимать за ось y главную ось с наибольшим моментом инерции; тогда плоскость xOz будет плоскостью *наибольшей жесткости*, поскольку прогибы при изгибе балки в этой плоскости будут наименьшими. Так как при $J_y > J_z$, как в рассмотренных примерах, $\alpha > \varphi$, то *плоскость изгиба* отклоняется от плоскости наибольшей жесткости больше, чем *плоскость внешних сил.* Эта разница будет тем большей, чем больше отношение J_y/J_z. Значит, для узких и высоких сечений, у которых отношение главных моментов инерции может быть весьма велико, уже *небольшое отклонение* плоскости действия внешних сил от плоскости наибольшей жесткости вызывает весьма значительное отклонение плоскости изгиба балки.

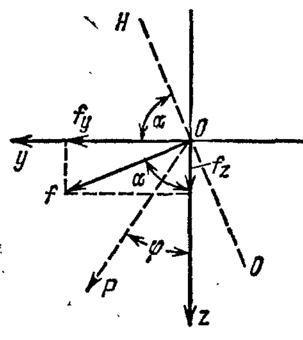


Рис. 302.

Пока для балки такого сечения внешние силы расположены в плоскости наибольшей жесткости xOz, прогибы будут лежать в той же плоскости и будут небольшими, так как момент инерции J_y будет значительным. Стоит дать плоскости внешних сил отклонение от оси Oz на небольшой угол φ, как сейчас же возникнут уже большие прогибы в направлении оси y, на которые очень часто конструктор и не рассчитывает. Прогибы же в направлении оси z будут оставаться почти без изменения. Для оценки этого явления рассмотрим числовой пример. Возьмем деревянную балку с сечением (рис. 297), имеющим высоту $h=20$ *см*, ширину $b=6$ *см*; тогда

$$J_y = \frac{20^3 \cdot 6}{12} = 4000 \text{ см}^4; \quad J_z = \frac{6^3 \cdot 20}{12} = 360 \text{ см}^4.$$

Отношение моментов инерции равно

$$\frac{J_y}{J_z} = \frac{4000}{360} \approx 11.$$

Тогда при отклонении плоскости действия внешних сил от оси z всего на 5° будем иметь

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi \frac{J_y}{J_z} = 0{,}0875 \cdot 11 = 0{,}963$$

и

$$\alpha \approx 44°.$$

Прогибы в направлении оси y будут почти равны прогибам в направлении оси z:

$$f_y = f_z \operatorname{tg} \alpha = 0{,}963 f_z.$$

Вместе с тем при отклонении силы от плоскости наибольшей жесткости произойдет и значительное повышение нормальных напряже-

ний. Так, в рассмотренном выше примере наибольшие нормальные напряжения (по сравнению со случаем плоского изгиба при $\varphi=0$) увеличатся в отношении (см. формулу (20.6))

$$\frac{\frac{M}{W_y}\left(\cos\varphi+\frac{W_y}{W_z}\sin\varphi\right)}{\frac{M}{W_y}}=\left(1+\frac{h}{b}\operatorname{tg}\varphi\right)\cos\varphi\approx\left(1+\frac{20}{6}0{,}0875\right)1=1{,}29.$$

На рис. 303 изображено относительное расположение плоскостей нагрузки, изгиба и нейтральной.

Балки, главные моменты инерции сечений которых начительно отличаются друг от друга, будут хорошо работать при изгибе в плос-

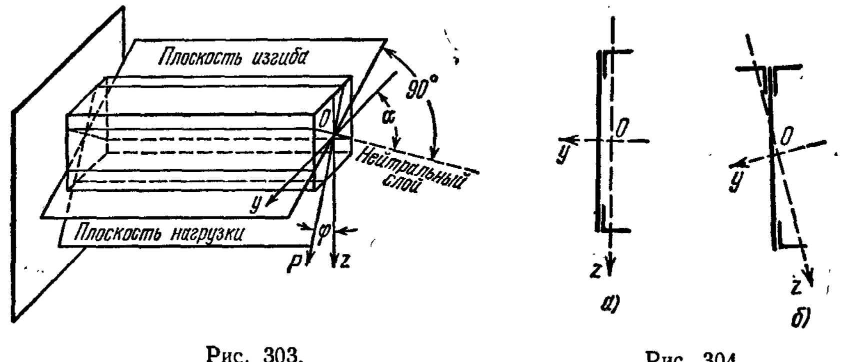


Рис. 303.

Рис. 304.

кости наибольшей жесткости (высокие прямоугольники, двутавры, швеллеры), но окажутся невыгодными при косом изгибе. Поэтому в тех случаях, когда трудно рассчитывать на достаточно точное совпадение плоскости внешних сил с главной плоскостью балки, конструктор должен избегать применения подобных сечений или принимать дополнительные конструктивные меры (постановка связей), чтобы воспрепятствовать боковым деформациям балок при наличии косого изгиба.

Особенно опасным может явиться неосторожное усиление существующих конструкций. Нам известен случай, когда балка швеллерного сечения из листа и двух уголков (рис. 304, *а*), работавшая на нагрузку, расположенную в плоскости xOz, была усилена приваркой дополнительного уголка (рис. 304, *б*). Это вызвало наклон главных осей к плоскости внешних сил и совершенно непредусмотренные деформации балки в боковом направлении.

Пример. Подобрать сечение деревянной обрешетины высотой h и шириной b и определить перемещение середины ее пролета; принято отношение $h/b=2$; пролет обрешетины (расстояние между стропильными фермами) равен $l=4$ *м*, а угол наклона кровли к горизонту 23°; нагрузка от снега и собственного веса перекрытия является равномерно распределенной с интенсивностью $q=400$ *кГ/м*. Об-

решетина устроена как балка, шарнирно-опертая по концам. Допускаемое напряжение равно 100 $кГ/см^2$, модуль упругости материала $E=10^5$ $кГ/см^2$.

Наибольший изгибающий момент M_{max} будет посредине пролета; он равен

$$M_{max}=\frac{ql^2}{8}=\frac{400\cdot 16}{8}=800 \text{ кГм}.$$

Так как угол φ равен углу наклона кровли, т. е. 25°, то из формулы (20.7) и условия $h/b=2$ следует, что

$$W_y=\frac{bh^2}{6}=\frac{h^3}{12}\geqslant\frac{M_{max}}{[\sigma]}\left(\cos\varphi+\frac{h}{b}\sin\varphi\right)=\frac{80\,000}{100}(0{,}906+2\cdot 0{,}423)=1402 \text{ см}^3.$$

Отсюда $h\geqslant\sqrt[3]{12\cdot 1402}=25{,}6\approx 26$ см и $b=13$ см.

Наибольший прогиб обрешетины будет посредине пролета. Моменты инерции сечения равны

$$J_y=\frac{bh^3}{12}=\frac{13\cdot 26^3}{12}=19\,050 \text{ см}^4;\quad J_z=\frac{b^3h}{12}=\frac{13^3\cdot 26}{12}=4760 \text{ см}^4.$$

Угол наклона нейтральной оси α определится условием

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\varphi\frac{J_y}{J_z}=\operatorname{tg}25^\circ\cdot\frac{19\,050}{4760}=1{,}865;$$

отсюда $\alpha=61°50'$ и угол, составленный плоскостью изгиба с плоскостью внешних сил, равен $\alpha-\varphi=61°50'-25°=36°50'$.

Прогиб в плоскости наибольшей жесткости равен

$$f_z=\frac{5ql^4\cos\varphi}{384J_yE}=\frac{5\cdot 4\cdot 4^4\cdot 10^8\cdot 0{,}906}{384\cdot 19\,050\cdot 10^5}=0{,}64 \text{ см}.$$

Полный прогиб равен

$$f=\frac{f_z}{\cos\alpha}=\frac{0{,}64}{0{,}472}=1{,}35 \text{ см}.$$

Прогиб в направлении оси y (параллельно стороне b) равен

$$f_y=f_z\operatorname{tg}\alpha=0{,}64\cdot 1{,}865=1{,}19 \text{ см}.$$

Таким образом, в рассмотренном случае прогиб в направлении оси Oy гораздо больше, чем в направлении оси Oz, и почти равен полному прогибу.

Глава XXI

СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И РАСТЯЖЕНИЯ ИЛИ СЖАТИЯ

§ 122. Изгиб балки при действии продольных и поперечных сил

На практике очень часто встречаются случаи совместной работы стержня на изгиб и на растяжение или сжатие. Подобного рода деформация может вызываться или совместным действием на балку продольных и поперечных сил, или только одними продольными силами.

Первый случай изображен на рис. 305. На балку AB действуют равномерно распределенная нагрузка q и продольные сжимающие силы P. Предположим, что прогибами балки по сравнению с размерами поперечного сечения можно пренебречь; тогда с достаточной для практики степенью точности можно считать, что и после деформации силы P будут вызывать лишь осевое сжатие балки.

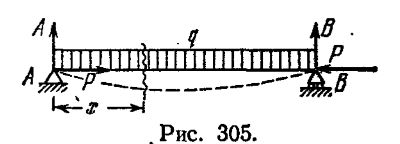


Рис. 305.

Применяя способ сложения действия сил, мы можем найти нормальное напряжение в любой точке каждого поперечного сечения балки как алгебраическую сумму напряжений, вызванных силами P и нагрузкой q.

Сжимающие напряжения σ_p от сил P равномерно распределены по площади F поперечного сечения и одинаковы для всех сечений:

$$\sigma_p = -\frac{P}{F};$$

нормальные напряжения от изгиба в вертикальной плоскости в сечении с абсциссой x, которая отсчитана, скажем, от левого конца балки, выражаются формулой

$$\sigma_q = \frac{M(x)\, z}{J_y}.$$

Таким образом, полное напряжение в точке с координатой z (считая от нейтральной оси) для этого сечения равно

$$\sigma = \sigma_p + \sigma_q = -\frac{P}{F} + \frac{M(x)\, z}{J_y}.$$

На рис. 306 изображены эпюры распределения напряжений в рассматриваемом сечении от сил P, нагрузки q и суммарная эпюра.

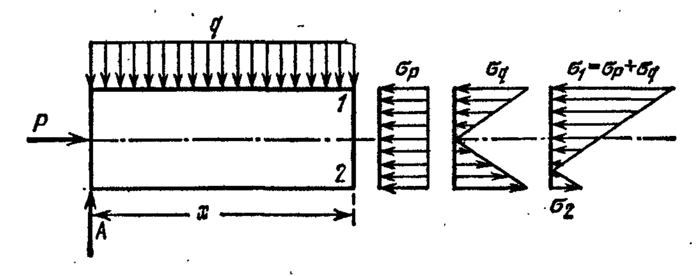


Рис. 306.

Наибольшее напряжение в этом сечении будет в верхних волокнах, где оба вида деформации вызывают сжатие; в нижних волокнах может быть или сжатие или растяжение в зависимости от числовых ве-

личин напряжений σ_p и σ_q. Для составления условия прочности найдем наибольшее нормальное напряжение.

Так как напряжения от сил P во всех сечениях одинаковы и равномерно распределены, то опасными будут волокна, наиболее напряженные от изгиба. Такими являются крайние волокна в сечении с наибольшим изгибающим моментом; для них

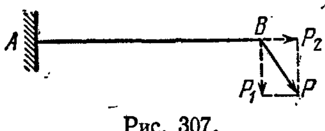


Рис. 307.

$$\sigma_{q\,\max} = \pm \frac{M_{\max}}{W}.$$

Таким образом, напряжения в крайних волокнах 1 и 2 (рис. 306) среднего сечения балки выражаются формулой

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = -\frac{P}{F} \mp \frac{M_{\max}}{W}, \tag{21.1}$$

и расчетное напряжение будет равно

$$|\sigma_{\max}| = |\sigma_1| = \left|\frac{P}{F} + \frac{M_{\max}}{W}\right|. \tag{21.2}$$

Если бы силы P были растягивающими, то знак первого слагаемого изменился бы, опасными были бы нижние волокна балки.

Обозначая буквой N сжимающую или растягивающую силу, можем написать общую формулу для проверки прочности

$$\sigma_{\max} = \pm\left[\frac{N}{F} + \frac{M_{\max}}{W}\right] \leqslant [\sigma]. \tag{21.3}$$

При составлении формулы (21.3) предполагалось, что сечение симметрично относительно найтральной оси и материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию.

Описанный ход расчета применяется и при действии на балку наклонных сил (рис. 307). Такую силу можно разложить на нормальную к оси, изгибающую балку, и продольную, сжимающую или растягивающую.

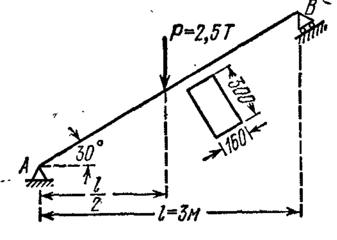


Рис. 308.

Пример. Наклонная балка (рис. 308) нагружена посредине своей длины силой $P=2{,}5$ T; найти наибольшее сжимающее напряжение в балке.

Верхняя половина балки только изгибается; нижняя изгибается и сжимается. Изгиб вызывает сила $P \cos 30°$, а сжатие — сила $P \sin 30°$. Наибольший изгибающий момент равен

$$M_{\max} = \frac{P\cos 30°\left(\dfrac{l}{\cos 30°}\right)}{4} = \frac{Pl}{4} = \frac{2{,}5\cdot 3}{4} = 1{,}875\ Tм.$$

Момент сопротивления сечения и площадь поперечного сечения соответственно равны

$$W=\frac{bh^2}{6}=\frac{16\cdot 30^2}{6}=2400\ см^3; \qquad F=16\cdot 30=480\ см^2.$$

Наибольшие сжимающие напряжения (в верхних волокнах балки, в сечении слева от силы) равны

$$\sigma=-\frac{P\sin 30^\circ}{F}-\frac{M_{\max}}{W}=-\frac{2500}{2\cdot 480}-\frac{187\,500}{2400}=-2{,}6-78{,}1=-80{,}7\ кГ/см^2.$$

§ 123. Внецентренное сжатие или растяжение

Вторым практически важным случаем сложения деформаций от изгиба и от продольных сил является так называемое *внецентренное сжатие* или *растяжение*, вызываемое одними продольными силами. Этот вид деформации получается при действии на стержень двух равных и прямопротивоположных сил P, направленных по прямой AA, параллельной оси стержня (рис. 309). Расстояние точки A от центра тяжести сечения $OA=e$ называется *эксцентриситетом*.

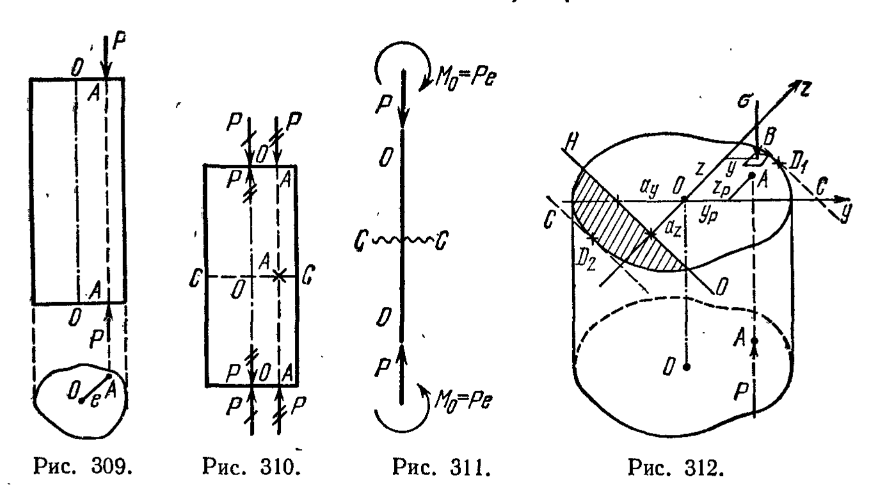


Рис. 309. Рис. 310. Рис. 311. Рис. 312.

Рассмотрим сначала случай внецентренного сжатия, как имеющий большее практическое значение.

Нашей задачей явится нахождение наибольших напряжений в материале стержня и проверка прочности. Для решения этой задачи приложим в точках O по две равные и противоположные силы P (рис. 310). Это не нарушит равновесия стержня в целом и не изменит напряжений в его сечениях.

Силы P, зачеркнутые один раз, вызовут осевое сжатие, а пары сил P, зачеркнутые дважды, вызовут чистый изгиб моментами $M_0=Pe$. Расчетная схема стержня показана на рис. 311. Так как плоскость

действия изгибающих пар OA может не совпадать ни с одной из главных плоскостей инерции стержня, то в общем случае имеет место комбинация продольного сжатия и чистого косого изгиба.

Так как при осевом сжатии и чистом изгибе напряжения во всех сечениях одинаковы, то проверку прочности можно произвести для любого сечения, хотя бы C—C (рис. 311).

Отбросим верхнюю часть стержня и оставим нижнюю (рис. 312). Пусть оси Oy и Oz будут главными осями инерции сечения. Координаты точки A,— точки пересечения линии действия сил P с плоскостью сечения,— пусть будут y_p и z_p. Условимся выбирать положительные направления осей Oy и Oz таким образом, чтобы точка A оказалась в первом квадранте. Тогда y_p и z_p будут положительны.

Для того чтобы отыскать наиболее опасную точку в выбранном сечении, найдем нормальное напряжение σ в любой точке B с координатами z и y. Напряжения в сечении C—C будут складываться из напряжений осевого сжатия силой P и напряжений от чистого косого изгиба парами с моментом Pe, где $e=OA$. Сжимающие напряжения от осевых сил P в любой точке равны P/F, где F — площадь поперечного сечения стержня; что касается косого изгиба, то заменим его действием изгибающих моментов в главных плоскостях. Изгиб в плоскости xOy вокруг нейтральной оси Oz будет вызываться моментом Py_p и даст в точке B нормальное сжимающее напряжение $\frac{Py_p \cdot y}{J_z}$.

Точно также нормальное напряжение в точке B от изгиба в главной плоскости xOz, вызванное моментом Pz_p, будет сжимающим и выразится формулой $\frac{Pz_p \cdot z}{J_y}$.

Суммируя напряжения от осевого сжатия и двух плоских изгибов и считая сжимающие напряжения отрицательными, получаем такую формулу для напряжения в точке B:

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{Py_p y}{J_z} - \frac{Pz_p z}{J_y} = -P\left(\frac{1}{F} + \frac{y_p y}{J_z} + \frac{z_p z}{J_y}\right). \qquad (21.4)$$

Эта формула годится для вычисления напряжений в любой точке любого сечения стержня, стоит только вместо y и z подставить координаты точки относительно главных осей с их знаками.

В случае внецентренного растяжения знаки всех составляющих нормального напряжения в точке B изменятся на обратные. Поэтому для того чтобы по формуле (21.4) получать правильный знак напряжений как при внецентренном сжатии, так и при внецентренном растяжении, нужно, кроме знаков координат y и z, учитывать также и знак силы P; при растяжении перед выражением

$$P\left(\frac{1}{F} + \frac{y_p y}{J_z} + \frac{z_p z}{J_y}\right)$$

должен стоять знак плюс, при сжатии — минус.

Полученной формуле можно придать несколько иной вид: вынесем за скобку множитель P/F, получим

$$-\frac{P}{F}\left[1+\frac{y_p y}{i_z^2}+\frac{z_p z}{i_y^2}\right]. \tag{21.5}$$

Здесь i_z и i_y— радиусы инерции сечения относительно главных осей (вспомним, что $J_z=i_z^2\cdot F$ и $J_y=i_y^2\cdot F$).

Для отыскания точек с наибольшими напряжениями следует так выбирать y и z, чтобы σ достигло наибольшей величины. Переменными в формулах (21.4) и (21.5) являются два последних слагаемых, отражающих влияние изгиба. А так как при изгибе наибольшие напряжения получаются в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, то здесь, как и при косом изгибе, надо отыскать положение нейтральной оси.

Обозначим координаты точек этой линии через y_0 и z_0; так как в точках нейтральной оси нормальные напряжения равны нулю, то после подстановки в формулу (21.5) значений y_0 и z_0 получаем

$$0=-\frac{P}{F}\left[1+\frac{y_p y_0}{i_z^2}+\frac{z_p z_0}{i_y^2}\right],$$

или

$$1+\frac{y_p y_0}{i_z^2}+\frac{z_p z_0}{i_y^2}=0. \tag{21.6}$$

Это и будет уравнение нейтральной оси; очевидно, мы получили уравнение прямой, не проходящей через центр тяжести сечения.

Чтобы построить эту прямую, проще всего вычислить отрезки, отсекаемые ею на осях координат. Обозначим эти отрезки a_y и a_z. Чтобы найти отрезок a_y, отсекаемый на оси Oy, надо в уравнении (21.6) положить

$$z_0=0; \quad y_0=a_y;$$

тогда мы получаем

$$1+\frac{y_p a_y}{i_z^2}=0 \quad \text{и} \quad a_y=-\frac{i_z^2}{y_p}; \tag{21.7}$$

подобным же образом, полагая

$$y_0=0; \quad z_0=a_z,$$

получаем

$$a_z=-\frac{i_y^2}{z_p}. \tag{21.8}$$

Если величины y_p и z_p положительны, то отрезки a_y и a_z будут отрицательны, т. е. найтральная ось будет расположена по другую сторону центра тяжести сечения, чем точка A (рис. 312).

Нейтральная ось делит сечение на две части — сжатую и растянутую; на рис. 312 растянутая часть сечения заштрихована.

Проводя к контуру сечения касательные, параллельные нейтральной оси, получаем две точки D_1 и D_2, в которых будут наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения.

Измеряя координаты y и z этих точек и подставляя их значения в формулу (21.4), вычисляем величины наибольших напряжений в точках D_1 и D_2:

$$\sigma_{(1,2)} = -P\left[\frac{1}{F} + \frac{y_p y_{(1,2)}}{J_z} + \frac{z_p z_{(1,2)}}{J_y}\right]. \qquad (21.9)$$

Если материал стержня одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то условие прочности получает такой вид:

$$|\sigma_{\max}| = P\left[\frac{1}{F} + \frac{y_p y_1}{J_z} + \frac{z_p z_1}{J_y}\right] \leqslant [\sigma]. \qquad (21.10)$$

Для поперечных сечений с выступающими углами, у которых обе главные оси инерции являются осями симметрии (прямоугольник, двутавр и др.), $y_1 = y_{\max}$ и $z_1 = z_{\max}$; поэтому формула (21.10) упрощается, и мы имеем

$$|\sigma_{\max}| = P\left[\frac{1}{F} + \frac{y_p}{W_z} + \frac{z_p}{W_y}\right] \leqslant [\sigma]. \qquad (21.11)$$

Если же материал стержня неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то необходимо проверить прочность стержня как в растянутой, так и в сжатой зонах.

Однако может случиться, что и для таких материалов будет достаточно одной проверки прочности. Из формул (21.7) и (21.8) видно, что положение точки A приложения силы и положение нейтральной оси связаны: чем ближе подходит точка A к центру сечения, тем меньше величины y_p и z_p и тем больше отрезки a_y и a_z. Таким образом, с *приближением* точки A к центру тяжести сечения нейтральная ось *удаляется* от него, и наоборот. Поэтому при некоторых положениях точки A нейтральная ось будет проходить *вне* сечения и все сечение будет работать на напряжения одного знака. Очевидно, в этом случае всегда достаточно проверить прочность материала в точке D_1.

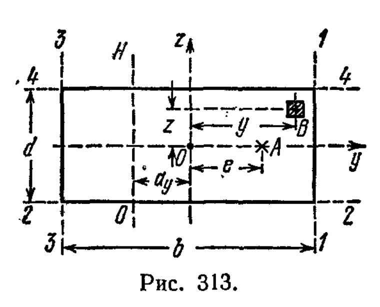


Рис. 313.

Разберем практически важный случай, когда к стержню прямоугольного сечения (рис. 313) приложена внецентренно сила P в точке A, лежащей на главной оси сечения Oy. Эксцентриситет OA равен e, размеры сечения b и d. Применяя полученные выше формулы, имеем

$$y_p = +e; \quad z_p = 0.$$

Напряжение в любой точке B равно

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{y_P y F}{J_z}\right) = \frac{P}{bd}\left(1 + \frac{12ey}{b^2}\right), \tag{21.12}$$

так как

$$\frac{F}{J_z} = \frac{12bd}{b^3 d} = \frac{12}{b^2}.$$

Напряжения во всех точках линии, параллельной оси Oz, одинаковы. Положение нейтральной оси определяется отрезками

$$a_y = -\frac{i_z^2}{e} = -\frac{b^2}{12e}; \quad a_z = \infty. \tag{21.13}$$

Нейтральная ось параллельна оси Oz; точки с наибольшими растягивающими и сжимающими напряжениями расположены на сторонах *1—1* и *3—3*.

Значения σ_{max} и σ_{min} получатся, если в формулу (21.12) подставить вместо y его значения $\pm b/2$. Тогда

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\} = \frac{P}{bd}\left[1 \pm \frac{6e}{b}\right]. \tag{21.14}$$

§ 124. Ядро сечения

При конструировании стержней из материалов, плохо сопротивляющихся растяжению (бетон, камень), весьма желательно добиться того, чтобы все сечение работало лишь на сжатие. Этого можно достигнуть, не давая точке приложения силы P слишком далеко отходить от центра тяжести сечения, ограничивая величину эксцентриситета.

Конструктору желательно заранее знать, какой эксцентриситет при выбранном типе сечения можно допустить, не рискуя вызвать в сечениях стержня напряжений разных знаков. Здесь вводится понятие о так называемом *ядре сечения*. Этим термином обозначается *некоторая область вокруг центра тяжести сечения, внутри которой можно располагать точку приложения силы P, не вызывая в сечении напряжений разного знака.*

Пока точка A располагается внутри ядра, нейтральная ось не пересекает контура сечения, все оно лежит по *одну* сторону от нейтральной оси и, стало быть, работает лишь на сжатие. При удалении точки A от центра тяжести сечения нейтральная ось будет приближаться к контуру; граница ядра определится тем, что при расположении точки A на этой границе нейтральная ось подойдет вплотную к сечению, коснется его.

Таким образом, если мы будем перемещать точку A так, чтобы нейтральная ось *катилась* по контуру сечения, не пересекая его (рис. 314), то точка A обойдет по границе ядра сечения. Если контур

сечения имеет «впадины», то нейтральная ось будет катиться по огибающей контура.

Чтобы получить очертание ядра, необходимо дать нейтральной оси несколько положений, касательных к контуру сечения, определить для этих положений отрезки a_y и a_z и вычислить координаты y_p и z_p точки приложения силы по формулам, вытекающим из зависимостей (21.7) и (21.8):

$$y_p = -\frac{i_z^2}{a_y}; \quad z_p = -\frac{i_y^2}{a_z}; \qquad (21.15)$$

это и будут координаты точек контура ядра $y_я$ и $z_я$.

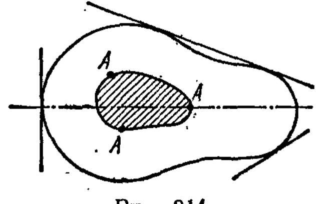


Рис. 314.

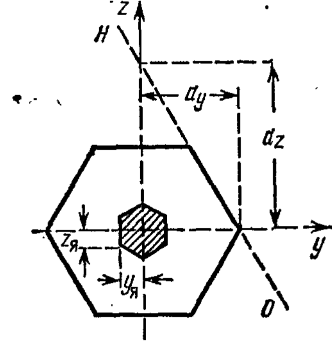


Рис. 315.

При *многоугольной* форме контура сечения (рис. 315), совмещая последовательно нейтральную ось с каждой из сторон многоугольника, мы по отрезкам a_y и a_z определим координаты $y_я$ и $z_я$ точек границы ядра, соответствующих этим сторонам.

При переходе от одной стороны контура сечения к другой нейтральная ось будет *вращаться* вокруг вершины, разделяющей эти стороны; точка приложения силы будет перемещаться по границе ядра между полученными уже точками. Установим, как должна перемещаться сила P, чтобы нейтральная ось проходила все время через одну и ту же точку $B(y_B, z_B)$ — вращалась бы около нее (рис. 316). Подставляя координаты этой точки нейтральной оси в (21.6)

$$1 + \frac{y_p y_B}{i_z^2} + \frac{z_p z_B}{i_y^2} = 0,$$

видим, что координаты y_p и z_p точки A приложения силы P связаны *линейно*. Таким образом, при *вращении нейтральной оси около постоянной точки B точка A приложения силы движется по прямой.* Обратно, перемещение силы P по прямой связано с вращением нейтральной оси около постоянной точки.

На рис. 316 изображены три положения точки приложения силы на этой прямой и соответственно три положения нейтральной оси. Таким образом, при многоугольной форме контура сечения очертание ядра между точками, соответствующими сторонам многоугольника, будет состоять из отрезков прямых линий.

Если контур сечения целиком или частично ограничен кривыми линиями, то построение границы ядра можно вести по точкам (формулы (21.15)). Рассмотрим несколько простых примеров построения ядра сечения.

При выполнении этого построения для прямоугольного поперечного сечения (рис. 313 и 317) воспользуемся формулами, выведенными в конце предыдущего параграфа.

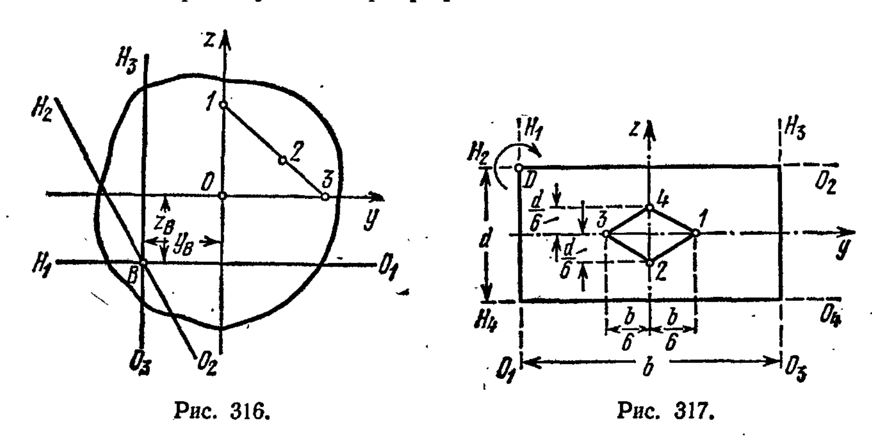


Рис. 316. Рис. 317.

Для определения границ ядра сечения при движении точки A по оси Oy найдем то значение $e=e_0$, при котором нейтральная ось займет положение H_1O_1 (рис. 317). Имеем по формуле (21.13):

$$a_y = -\frac{b}{2} = -\frac{b^2}{12e_0},$$

откуда

$$e_0 = \frac{b}{6}. \qquad (21.16)$$

Таким образом, границы ядра по оси Oy будут отстоять от центра сечения на 1/6 величины b (рис. 317, точки *1* и *3*); по оси Oz границы ядра определятся расстояниями $d/6$ (точки *2* и *4*).

Для получения очертания ядра целиком изобразим положения нейтральной оси H_1O_1 и H_2O_2, соответствующие граничным точкам *1* и *2*.

При перемещении силы из точки *1* в точку *2* по границе ядра нейтральная ось должна перейти из положения H_1O_1 в положение H_2O_2, все время касаясь сечения, т. е. поворачиваясь вокруг точки D. Для этого сила должна двигаться по прямой *1—2*. Точно так же можно доказать, что остальными границами ядра будут линии *2—3*, *3—4* и *4—1*.

Таким образом, для прямоугольного сечения ядро будет ромбом с диагоналями, равными *одной трети* соответствующей стороны сечения. Поэтому прямоугольное сечение при расположении силы по главной оси работает на напряжения одного знака, если точка приложения силы не выходит за пределы *средней трети* стороны сечения.

Эпюры распределения нормальных напряжений по прямоугольному сечению при эксцентриситете, равном нулю, меньшем, равном и большем одной шестой ширины сечения, изображены на рис. 318.

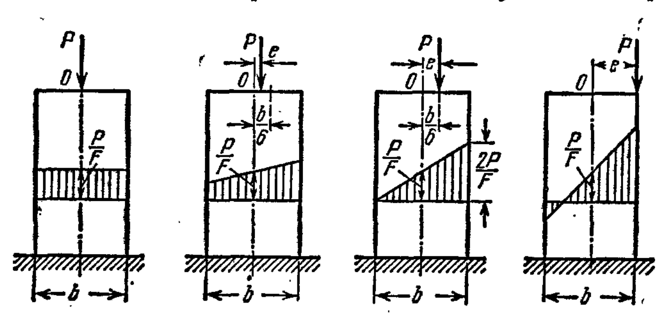


Рис. 318.

Отметим, что при всех положениях силы P напряжение в центре тяжести сечения (точка O) одинаково и равно P/F и что сила P не имеет эксцентриситета по второй главной оси.

Для круглого сечения радиуса r очертание ядра будет по симметрии кругом радиуса r_0. Возьмем какое-либо положение нейтральной оси, касательное к контуру. Ось Oy расположим перпендикулярно к этой касательной. Тогда

$$a_y = r; \quad a_z = \infty; \quad z_я = 0;$$

$$y_я = r_0 = -\frac{i_z^2}{a_y} = \frac{\frac{\pi r^4}{4 \cdot \pi r^2}}{r} = -\frac{r}{4}.$$

Таким образом, ядро представляет собой круг с радиусом, вчетверо меньшим, чем радиус сечения.

Для двутавра нейтральная ось при обходе контура не будет пересекать площади поперечного сечения, если будет касаться прямоугольного контура $ABCD$, описанного около двутавра (рис. 319). Следовательно, очертание ядра для двутавра имеет форму ромба, как и для прямоугольника, но с другими размерами.

Для швеллера, как и для двутавра, точки *1*, *2*, *3*, *4* контура ядра (рис. 320) соответствуют совпадению нейтральной оси со сторонами прямоугольнника $ABCD$. Расстояния определятся по формулам (21.15).

Пример 1. Разрезанное звено цепи (рис. 321) сделано из стального стержня диаметром $d=50$ *мм*; $a=60$ *мм*. Если допускаемое напряжение на растяжение в сечении A принято равным $[\sigma]=1200$ *кГ/см²*, какую величину можно допустить для силы P?

Материал стержня в рассматриваемом сечении будет испытывать внецентренное растяжение. Эксцентриситет e равен $a+d/2$. Выбирая ось Oy в плоскости,

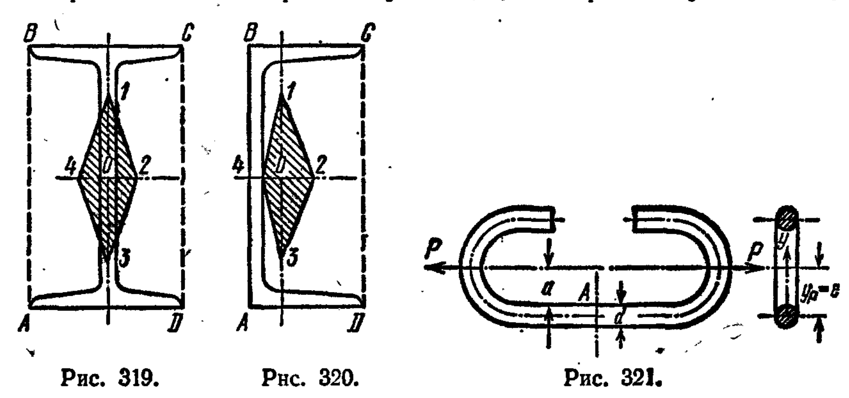


Рис. 319. Рис. 320. Рис. 321.

проходящей через силы P и ось прямой части стержня, имеем

$$z_P=0; \quad y_P=e=a+\frac{d}{2}.$$

Напряжение в любой точке сечения равно

$$\sigma=+\frac{P}{F}+\frac{P\left(a+\frac{d}{2}\right)y}{J_z}.$$

Подставляя вместо y его крайние значения $\pm d/2$, находим наибольшее и наименьшее напряжения:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\}=\frac{4P}{\pi d^2}\pm\frac{64Pde}{2\pi d^4}=\frac{4P}{\pi d^2}\left[1\pm\frac{8e}{d}\right]=\frac{4P}{\pi d^2}\left[1\pm\frac{8\left(a+\frac{d}{2}\right)}{d}\right].$$

Условие прочности имеет вид

$$\frac{4P}{\pi d^2}\left[1+\frac{8\left(a+\frac{d}{2}\right)}{d}\right]=\frac{4P}{\pi d^3}(8a+5d)\leqslant[\sigma];$$

отсюда

$$P=\frac{\pi d^3[\sigma]}{4(8a+5d)}=\frac{3,14\cdot5^3\cdot1200}{4(8\cdot6+5\cdot5)}\approx1610 \text{ кГ}.$$

Пример. 2. Длинная подпорная стенка высотой $h=3$ *м* и толщиной $b=2$ *м* (рис. 322) поддерживает земляную насыпь. Давление земли на погонный метр длины стены равно $H=3T$ и приложено на высоте $h/3$ от основания. Объемный вес кладки γ равен 2 *Т/м³*. Найти крайние значения напряжений в сечении по обрезу фундамента.

Выделив из стены по ее длине участок в 1 *м* (рис. 322), мы можем рассматривать эту часть стены как стержень, защемленный концом, изгибаемый давлением земли, и сжимаемый собственным весом. Так как наиболее напряженным будет сечение в защемлении по обрезу фундамента, то необходимо лишь его и проверить. Определение напряжений в этом сечении можно свести к задаче одновременного сжатия и изгиба. Силы, передающиеся через это сечение, сводятся к собственному весу выделенной части стены $N=1\cdot 2\cdot 3\cdot 2=12T$ и давлению земли $H=3\ T$. Изгибающий момент от силы H в этом сечении равен $M=H\dfrac{h}{3}=3\cdot\dfrac{3}{3}=3\ Тм$. Для вычисления наибольших нормальных напряжений в сечении по обрезу фундамента воспользуемся формулой (21.3). Проверяемое сечение имеет прямоугольную форму с размерами $b=2$ *м* и $d=1$ *м*; поэтому наибольшие сжимающие напряжения в точках на стороне 1—1 этого сечения равны

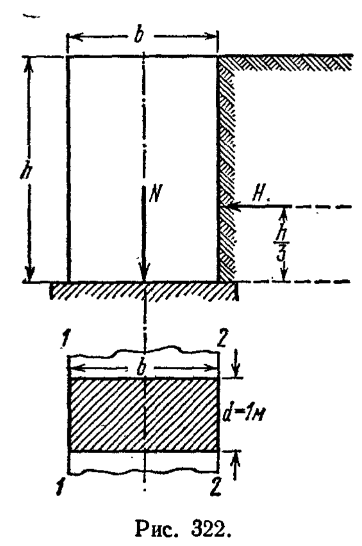


Рис. 322.

$$\sigma_{max}=-\frac{H}{F}-\frac{M}{W}=-\frac{12}{2\cdot 1}-\frac{6\cdot 3}{1\cdot 2^2}=$$
$$=-6-4{,}5=-10{,}5\ T/м^2=-1{,}05\ кГ/см^2.$$

Сжимающие напряжения в точках на стороне 2—2 сечения равны

$$\sigma_{min}=-\frac{N}{F}+\frac{M}{W}=-6+4{,}5=-1{,}5\ T/м^2=-0{,}15\ кГ/см^2.$$

Глава XXII

СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ КРУЧЕНИЯ И ИЗГИБА

§ 125. Определение изгибающих и крутящих моментов

В главе IX была разобрана задача проверки прочности при кручении. Однако такие части машины, как валы, редко работают на чистое скручивание. Даже прямой вал при работе изгибается собственным весом, весом шкивов, натяжением ремней. Таким образом, большинство скручиваемых элементов машин работает на совместное действие кручения и изгиба. К числу подобных же деталей относятся и коленчатые валы.

При расчете элементов, работающих одновременно на изгиб и кручение, в первую очередь надо выяснить расчетные значения изгибающих $M_и$ и крутящих $M_к$ моментов.

Покажем это на примере прямого вала круглого сечения со шкивом и кривошипом. Схема вала изображена на рис. 323 и 324. На левом конце вала расположен шкив весом Q; на него действуют натяжения ремня T и $t\,(T>t)$; на правом конце на палец кривошипа дей-

ствует горизонтальная сила P; рассмотрим момент, когда кривошип расположен вертикально. Размеры конструкции даны на чертеже.

Определим изгибающие и крутящие моменты для вала AD. Силы T и t (натяжения ремня), действующне на шкив, заменяем силой $T+t$, приложенной в центре шкива, и парой $(T-t)\,R_0$, где R_0 — радиус шкива. Сила $T+t$ вместе с весом шкива Q производит изгиб вала; пара же $(T-t)\,R_0$, скручивая вал, уравновешивается парой, приложенной к его правому концу.

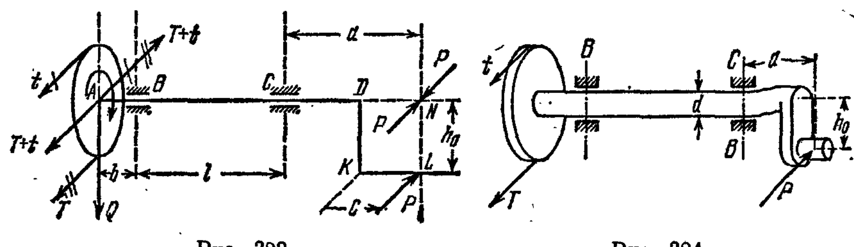


Рис. 323. Рис. 324.

Заменяем силу P, действующую на палец кривошипа, такой же силой P, приложенной к валу на продолжении его оси в точке N, и парой с моментом Ph_0. Таким образом, к концам вала приложены пары Ph_0 и $(T-t)R_0$; при равновесии, равномерном ходе машины, моменты этих пар равны и дают скручивающий момент $M_к=Ph_0=$ $=(T-t)\,R_0$. Если известны число оборотов вала в единицу времени n и передаваемая шкивом мощность N, то величина крутящего момента $M_к$ может быть найдена по формуле (9.3) § 46

$$M_к=\frac{716{,}2N}{n}; \quad \text{тогда} \quad P=\frac{M_к}{h_0}$$

и

$$T=\frac{M_к}{R_0(1-m)}, \quad \text{где} \quad m=\frac{t}{T}.$$

Что же касается изгиба, то на вал действуют и вертикальные (Q), и горизонтальные ($T+t$, P) силы. Поэтому построим эпюры моментов для тех и других (рис. 325 *а* и *б*), считая опоры вала в подшипниках B и C шарнирными; одна из них имеет продольную подвижность.

Имея эпюры моментов от вертикальных и горизонтальных нагрузок, можем для каждого сечения вала найти полный изгибающий момент $M_и$ как геометрическую сумму обеих составляющих; на рис. 326 показано такое геометрическое сложение векторов, изображающих изгибающие моменты для сечения B; для него полный изгибающий момент будет равен

$$M_и=b\sqrt{Q^2+(T+t)^2}.$$

Для каждого сечения мы будем иметь *свою плоскость* действия изгибающего момента; но так как вал имеет круглое поперечное

сечение, у которого моменты сопротивления относительно всех центральных осей одинаковы, то без влияния на результаты расчета мы можем совместить плоскости изгибающих моментов для всех сечений и построить суммарную эпюру, располагая ее в плоскости чертежа. Это и сделано на рис. 325, *в*. Не приводя доказательства, заметим, что между сечениями *B* и *C* эпюра полного изгибающего момента $M_и$ будет ограничена кривой, не имеющей максимума.

Из очертания эпюры видно, что опасное сечение будет либо в подшипнике *B*, либо в подшипнике *C* в зависимости от соотношения числовых данных.

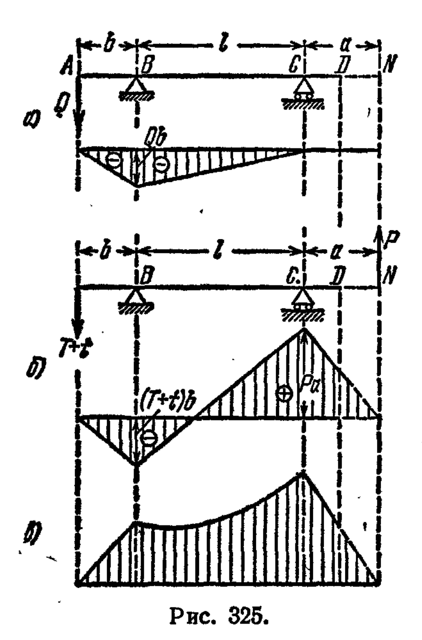


Рис. 325.

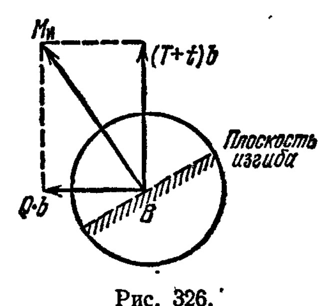


Рис. 326.

§ 126. Определение напряжений и проверка прочности при изгибе с кручением

Вычислив наибольший изгибающий момент $M_и$ и крутящий $M_к$, можем теперь найти наибольшие напряжения в материале вала и составить условие прочности.

Разрежем вал в опасном сечении *C* (рис. 327) и воспользуемся способом сложения действия сил. Вычислим напряжения в поперечном сечении от действия изгибающего момента и присоединим к ним напряжения от скручивания.

Изгибающий момент действует в горизонтальной плоскости; нейтральная ось будет вертикальна, а наибольшие нормальные напряжения $\sigma_и$ будут в точках c_1 и c_2 на концах горизонтального диаметра. Крутящий момент вызывает лишь касательные напряжения, которые достигнут наибольшего значения $\tau_к$ в точках у контура.

Таким образом, в точках c_1 и c_2 будут действовать по плоскости сечения и наибольшие нормальные и наибольшие касательные на-

пряжения. В точках C_3 и C_4 на концах вертикального диаметра к наибольшим касательным напряжениям от кручения добавятся касательные напряжения от изгиба; однако эти напряжения будут невелики и результаты подсчетов показывают, что напряженное состояние материала будет опаснее в точках C_1 и C_2. Выделим у этих точек элементы материала кубической формы (рис. 327); по четырем граням этих элементов будут действовать касательные напряжения $\tau_к$; к двум из этих четырех будут приложены еще нормальные напряжения, две грани кубика будут свободны от напряжений (рис. 328). Таким образом, выделенный элемент материала испытывает плоское напряженное состояние. Как известно (§§ 39 и 77), для проверки прочности материала в этом случае необходимо найти главные напряжения σ_1 и σ_3 и подставить их в условие прочности, составленное на основе той или иной теории прочности.

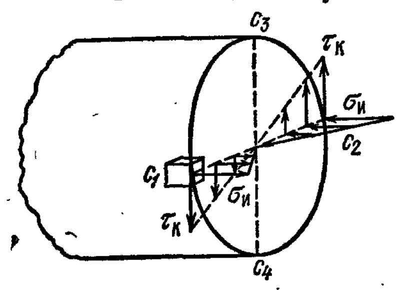


Рис. 327.

Подобное плоское напряженное состояние испытывает элемент материала, вырезанный в изогнутой балке на расстоянии z от нейтральной оси. Проверку прочности такого элемента мы рассмотрели выше (§ 77) при решении задачи о полной проверке прочности балки. Разница лишь в том, что в балке и нормальные σ и касательные τ напряжения вызывались лишь изгибом.

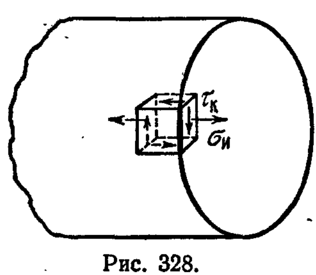


Рис. 328.

Для проверки прочности элемента, вырезанного из вала, мы можем прямо применить выведенные в § 77 формулы, подставляя в них вместо σ и τ величины $\sigma_и$ и $\tau_к$. Тогда получим следующие условия прочности по четырем теориям:

теория наибольших нормальных напряжений:

$$\frac{1}{2}\left[\sigma_и + \sqrt{\sigma_и^2 + 4\tau_к^2}\right] \leqslant [\sigma],$$

теория наибольших удлинений:

$$\left[0{,}35\sigma_и + 0{,}65\sqrt{\sigma_и^2 + 4\tau_к^2}\right] \leqslant [\sigma],$$

теория наибольших касательных напряжений:

$$\sqrt{\sigma_и^2 + 4\tau_к^2} \leqslant [\sigma],$$

теория потенциальной энергии формоизменения:

$$\sqrt{\sigma_и^2 + 3\tau_к^2} \leqslant [\sigma]. \qquad (22.1)$$

Чтобы связать эту проверку прочности с величинами моментов $M_к$ и $M_и$ и размерами вала, надо вычислить напряжения $\sigma_и$ и $\tau_к$. Напряжение $\sigma_и$, как наибольшее нормальное напряжение при изгибе моментом $M_и$, равно

$$\sigma_и = \frac{M_и}{W},$$

где для вала круглого сечения $W = \pi r^3/4$; буквой r обозначен радиус поперечного сечения вала. С другой стороны, наибольшее напряжение при скручивании вала $\tau_к$ равно

$$\tau_к = \frac{M_к}{W_р} = \frac{M_к}{\frac{\pi r^3}{2}} = \frac{M_к}{2\frac{\pi r^3}{4}} = \frac{M_к}{2W}.$$

Подставляя эти значения напряжений в первую из формул (22.1), получаем

$$\frac{1}{2}\left[\frac{M_и}{W} + \sqrt{\frac{M_и^2}{W^2} + 4\frac{M_к^2}{4W^2}}\right] = \frac{M_и + \sqrt{M_и^2 + M_к^2}}{2W} = \frac{M_р}{W} \leqslant [\sigma].$$

Подобным же образом могут быть получены расчетные формулы и по другим теориям прочности. Нетрудно заметить, что все эти формулы могут быть заменены одной:

$$\frac{M_р}{W} \leqslant [\sigma], \tag{22.2}$$

где $M_р$ — *расчетный момент*, величина которого зависит как от $M_и$ и $M_к$, так и от *принятой теории прочности*. Он равен по теории наибольших нормальных напряжений:

$$\left.\begin{array}{l} M_{р1} = \frac{1}{2}\left[M_и + \sqrt{M_и^2 + M_к^2}\right], \\ \text{по теории наибольших удлинений:} \\ M_{р2} = 0{,}35M_и + 0{,}65\sqrt{M_и^2 + M_к^2}, \\ \text{по теории наибольших касательных напряжений:} \\ M_{р3} = \sqrt{M_и^2 + M_к^2}, \\ \text{по теории потенциальной энергии формоизменения:} \\ M_{р4} = \sqrt{M_и^2 + 0{,}75M_к^2}. \end{array}\right\} \tag{22.3}$$

Формула (22.2) по своей структуре совершенно совпадает с обычной формулой проверки прочности по нормальным напряжениям при изгибе моментом $M_р$. Поэтому проверка прочности круглого вала на совместное действие кручения и изгиба может быть заменена проверкой на один изгиб с изгибающим моментом $M_р$.

В некоторых конструкциях валы, помимо скручивания и изгиба, растягиваются или сжимаются продольными силами N. Влияние этих добавочных сил на прочность вала может быть учтено добавкой

к наибольшим напряжениям от изгиба $\sigma_и$ напряжений σ_0 от продольных сил: $\sigma_0 = N/F$, где F — площадь поперечного сечения вала.

Из формулы (22.2) получаем

$$W = \frac{\pi r^3}{4} \geqslant \frac{M_р}{[\sigma]};$$

отсюда радиус вала равен

$$r \geqslant \sqrt[3]{\frac{4M_р}{\pi [\sigma]}}; \quad d = 2r. \tag{22.4}$$

Для использования этой формулы остается лишь установить, какой теорией прочности следует пользоваться, а следовательно, по какой из формул (22.3) вычислять расчетный момент.

Так как валы обычно делаются из стали и вообще из пластичных металлов, то при выборе теорий прочности сразу отпадает теория наибольших нормальных напряжений (см. § 39). До сих пор в машиностроении пользовались формулой, основанной на второй теории (наибольших удлинений), называемой иногда формулой Сен-Венана:

$$\frac{1}{W}\left[0{,}35M_и + 0{,}65\sqrt{M_и^2 + M_к^2}\right] \leqslant [\sigma],$$

несмотря на то, что для пластичных металлов эта теория безусловно неверна; в последнее время при расчетах применяются либо формулы, основанные на третьей теории (наибольших касательных напряжений), либо — на четвертой (потенциальной энергии формоизменения) теории:

$$\frac{1}{W}\sqrt{M_и^2 + M_к^2} \leqslant [\sigma] \quad и \quad \frac{1}{W}\sqrt{M_и^2 + 0{,}75M_к^2} \leqslant [\sigma].$$

В таблице 15 сопоставлены результаты определения диаметра вала при разных отношениях $M_и$ и $M_к$ *при одном и том же допускаемом напряжении* с учетом различных теорий прочности. Величина диаметра, полученная при применении теории наибольших удлинений (формула Сен-Венана), принята за единицу.

Таблица 15

Сравнение диаметров вала

Отношение $M_и$ к $M_к$	Диаметры вала при применении		
	II теории	III теории	IV теории
$M_и = 0$	1	1,15	1,10
$M_и = \frac{1}{2} M_к$	1	1,07	1,03
$M_и = M_к$	1	1,03	1,01

Из этой таблицы видно, во-первых, что разница в размерах вала в зависимости от выбора той или иной теории сравнительно невелика; во-вторых, что формула Сен-Венана дает во всех случаях меньшую величину диаметра, чем остальные две формулы. Этим и можно объяснить тот факт, что на практике до сих пор иногда пользуются формулой Сен-Венана, хотя она основана на заведомо непригодной для применяемого материала теории.

Инженер-практик должен понимать, что переход к расчету по новым формулам, основанным на более правильных теориях, был бы все же практически неприемлем при сохранении *старых* норм допускаемых напряжений. Это заставило бы требовать постановки валов большего диаметра там, где при расчете по старой формуле Сен-Венана благополучно работали валы более тонкие.

Выход заключается в том, что при переходе к новым формулам *нельзя сохранить* прежний коэффициент запаса, прежнее допускаемое напряжение. Повышение точности расчета, углубление наших знаний о работе материала требуют, как правило, *снижения* коэффициента запаса и повышения допускаемого напряжения [σ].

Поэтому, вводя на практике вычисление расчетного момента по новым формулам, необходимо поднять допускаемое напряжение [σ] настолько, чтобы диаметры валов, благополучно работающих на практике, были оправданы новыми методами расчета и достаточно надежными опытными исследованиями.

Глава XXIII

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ СЛОЖНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

§ 127. Внутренние силовые факторы в сечении стержня в общем случае действия сил

Приемы определения напряжений и перемещений, использованные при решении отдельных частных задач сложного сопротивления, могут быть распространены и на более сложные случаи действия сил на тело. Ограничиваясь рассмотрением призматических стержней, у которых центр изгиба совпадает с центром тяжести поперечного сечения, допустим, что такой стержень (рис. 329, *а*) находится в равновесии под действием приложенной к нему системы сил, любым образом расположенных в пространстве. На рис. 329, *а* для простоты чертежа показаны только сосредоточенные силы; однако внешними силами могут быть также распределенные нагрузки и пары сил — дальнейшие рассуждения от этого не меняются.

Для нахождения напряжений в некоторой точке A стержня проведем через нее сечение mn, перпендикулярное к оси стержня и разделяющее его на две части (I и II). Отбросим одну часть стержня, например правую, и перенесем все силы, действующие на отбрасывае-

мую часть, в центр тяжести сечения mn — точку C. В дальнейшем используем правую систему прямоугольных координат, ось x проведем перпендикулярно к сечению mn через его центр тяжести, оси y

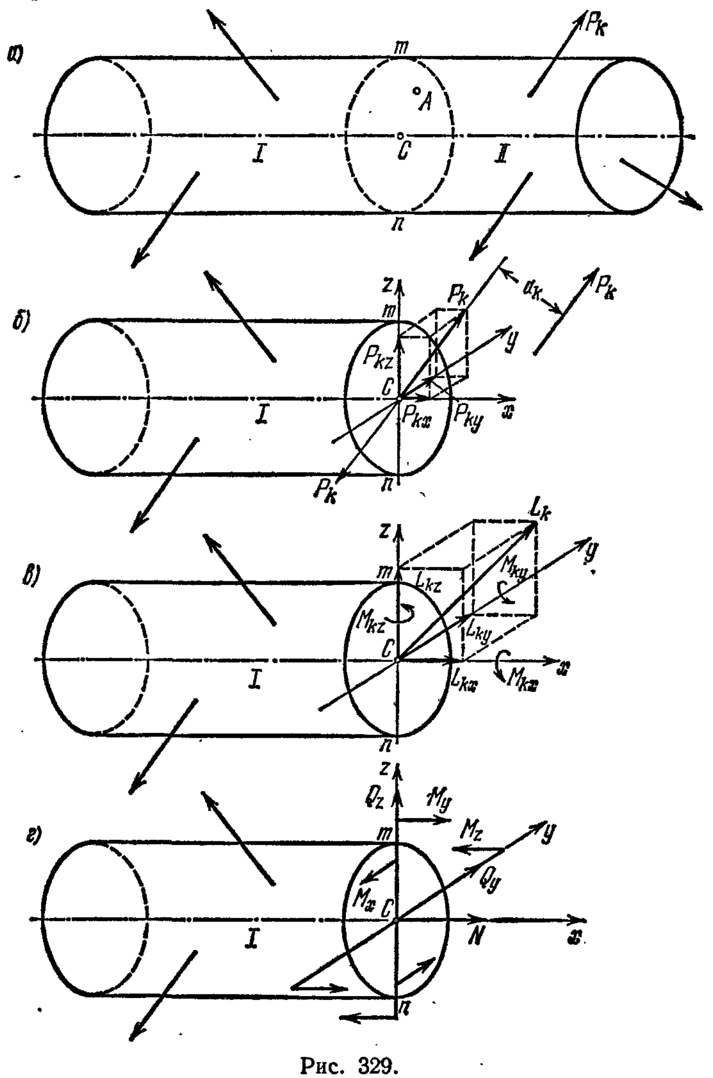


Рис. 329.

и z совместим с главными центральными осями инерции поперечного сечения.

При переносе какой-либо силы P_k в точку C (рис. 329, *б*) получим центрально приложенную силу P_k, в общем случае не совпадающую

ни с одной из координатных осей, и пару сил с моментом $M_k=P_ka_k$, действующую в плоскости, в общем случае наклоненной ко всем координатным плоскостям. Проектируя теперь силу P_k на оси x, y и z, найдем компоненты силы P_k на осях координат: P_{kx}, P_{ky} и P_{kz}; точно так же, раскладывая пару сил M_k на пары вокруг осей x, y и z, найдем компоненты M_{kx}, M_{ky} и M_{kz} (на рис. 329, *в* показано разложение вектора L_k, изображающего пару M_k, на составляющие L_{kx}, L_{ky} и L_{kz}). Поступая таким образом со всеми силами P_k, приложенными к правой части стержня, мы сможем заменить систему сил P_k статически эквивалентной ей системой из шести составляющих — трех сил, приложенных к центру тяжести проведенного сечения и направленных вдоль координатных осей:

$$N=\sum_{k=1}^{n} P_{kx}; \quad Q_y=\sum_{k=1}^{n} P_{ky} \quad \text{и} \quad Q_z=\sum_{k=1}^{n} P_{kz},$$

и трех пар сил, действующих вокруг этих же осей:

$$M_x=\sum_{k=1}^{n} M_{kx}; \quad M_y=\sum_{k=1}^{n} M_{ky} \quad \text{и} \quad M_z=\sum_{k=1}^{n} M_{kz}$$

(см. рис. 329 *г*). Силы N, Q_y и Q_z будем считать положительными, если направление их совпадает с положительными направлениями координатных осей, а пары сил с моментами M_x, M_y и M_z условимся считать положительными, если вокруг соответствующих осей оии

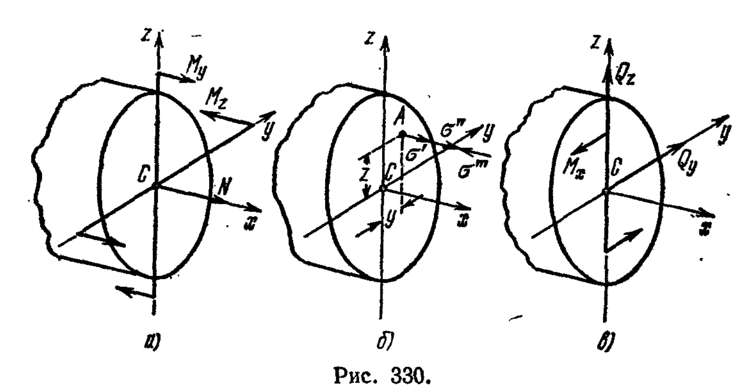


Рис. 330.

действуют против направления движения часовой стрелки (на рис. 329, *г* все составляющие сил и пар показаны положительными).

Из предыдущего известно, какой простейшей деформации отвечает каждая из упомянутых составляющих. Необходимо иметь в виду, что эти силы, перенесенные с правой отброшенной части стержня на оставленную левую, выражают действие правой части на левую и поэтому в сечении *mn* представляют внутренние силы. Так,

N — сумма распределенных по сечению внутренних нормальных усилий, M_x— сумма моментов вокруг оси x всех распределенных по сечению внутренних касательных усилий и т. д. Очевидно, что N отвечает растяжеиию или сжатию, Q_y и Q_z— сдвигу в направлении оси y или z, M_x— кручению, M_y и M_z— чистому плоскому изгибу вокруг оси y или z. Таким образом, в самом общем случае действия сил на стержень в нем возникают четыре простые деформации: растяжение или сжатие (N), кручение (M_x) и два плоских изгиба (M_y и Q_z), а также (M_z и Q_y). При этом три силовых фактора: N, M_y и M_z отвечают возникновению в сечении mn нормальных напряжений, а три остальных: Q_y, Q_z и M_x— возникновению касательных напряжений (рис. 330, *а* и *в*).

Вначале рассмотрим случай, когда в сечении стержня возникают одни только иормальные иапряжения. Нетрудно заметить, что это будет частный случай сложиого сопротивления — растяжение или сжатие с чистым изгибом в двух главных центральных плоскостях инерции.

• § 128. Определение иормальных напряжений

Предположим, что система сил, действующих на отброшенную часть стержня, в сечеиии mn проводится к трем составляющим: нормальной силе N и двум изгибающим моментам M_y и M_z; все эти составляющие будем считать положительными (рис. 330, *а*). Выведем формулу для вычисления нормальиого напряжения в какой-либо точке A с координатами y и z, расположенной в первом квадранте сечения mn.

Положительной нормальной силе N отвечает равномерно распределенное по сечению растягивающее напряжение $\sigma'=+N/F$, положительному изгибающему моменту M_y в первом квадранте сечения отвечает растягивающее напряжение $\sigma''=+M_yz/J_y$, а положительиому изгибающему момеиту M_z— сжимающее напряжение $\sigma'''=-M_zy/J_z$ (см. рис. 330, *б*). Суммируя эти составляющие нормального напряжения, получаем такую формулу для вычисления полного напряжения в точке A:

$$\sigma=\sigma'+\sigma''+\sigma'''=\frac{N}{F}+\frac{M_yz}{J_y}-\frac{M_zy}{J_z}. \qquad (23.1)$$

Для вычисления нормальиого напряжения в любой другой точке поперечного сечения стержня достаточно подставить в формулу (23.1) значения N, M_y и M_z, а также и координаты y и z с их знаками; при этом мы всегда будем получать надлежащую величину и знак нормального напряжения.

Из формулы (23.1) видно, что нормальные напряжения линейно зависят от координат y и z; максимального значения они должны достигать в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной ли-

нии, на которой эти напряжения равны нулю. На рис. 331, *а* приведено сечение стержня, во всех четвертях которого расставлены знаки нормального напряжения: 1) σ', 2) σ'' и 3) σ''' в предположении, что N, M_y и M_z положительны. Очевидно, что нейтральная линия пересечет четверти с разными знаками нормального напряжения и в данном случае не пройдет через центр тяжести сечения и левую верхнюю четверть.

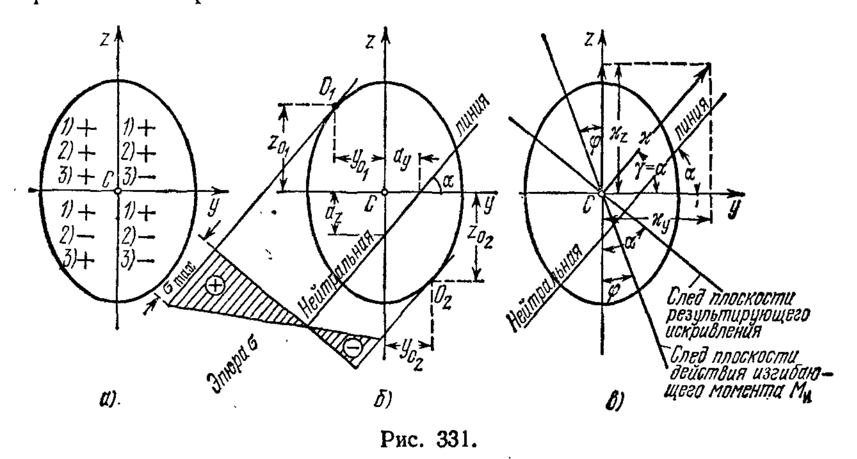


Рис. 331.

Полагая в формуле (23.1) напряжение σ равным нулю и обозначая координаты точек нейтральной линии через $y_н$ и $z_н$, для нахождения положения этой линии получаем уравнение

$$\frac{N}{F}+\frac{M_y}{J_y}z_н-\frac{M_z}{J_z}y_н=0.$$

Приравнивая нулю сначала $z_н$, а затем $y_н$, находим отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат y и z (рис. 331, *b*):

$$a_y=\frac{N\cdot J_z}{FM_z} \quad \text{и} \quad a_z=-\frac{N}{F}\frac{J_y}{M_y}. \tag{23.2}$$

Так как наличие или отсутствие в уравнении (23.1) члена N/F не меняет наклона нейтральной линии к осям координат, то для определения последнего можно воспользоваться уравнением

$$\frac{M_y}{J_y}z_н-\frac{M_z}{J_z}y_н=0,$$

из которого следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{z_н}{y_н}=\frac{J_y}{J_z}\frac{M_z}{M_y}. \tag{23.3}$$

Складывая геометрически моменты M_y и M_z, действующие в сечении *mn* в плоскостях *xz* и *xy*, найдем величину результирующего

изгибающего момента

$$M_и = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}. \qquad (23.4)$$

Угол φ между плоскостью действия $M_и$ и вертикальной плоскостью xz (рис. 331) найдется из выражения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M_z}{M_y}. \qquad (23.5)$$

Это выражение позволяет представить формулу (23.3) в таком виде:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{J_y}{J_z} \operatorname{tg} \varphi. \qquad (23.6)$$

Углы α и φ будем считать положительными, если они откладываются от соответствующих осей (α от оси y, а φ от оси z) против направления вращения часовой стрелки.

Из соотношения (23.3) видно, что нейтральная линия в сечении в общем случае не перпендикулярна к следу плоскости действия в том же сечении результирующего изгибающего момента (рис. 331 и 332). Эти линии будут перпендикулярны лишь при условии равенства углов α и φ, а это в свою очередь возможно только в следующих случаях: 1) $\varphi=0$, т. е. $M_z=0$, 2) $\varphi=\pi/2$, т. е. $M_y=0$, и 3) $J_y=J_z$. В первых двух случаях, независимо от значения главных моментов инерции, имеет место плоский изгиб в одной из главных плоскостей инерции стержня, в третьем случае все оси инерции будут главными центральными осями инерции (круг, квадрат и др.) и изгиб в любом направлении будет плоским. Сказанное приводит к общему выводу: изгиб будет плоским и нейтральная линия будет перпендикулярна к следу плоскости действия результирующего изгибающего момента, если эта плоскость пересечет сечение перпендикулярно к одной из главных центральных осей инерции.

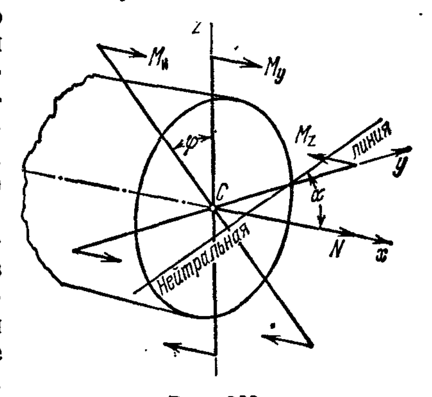


Рис. 332.

Нейтральная линия в общем случае делит поперечное сечение стержня на две области: растянутую и сжатую. Проводя линии, параллельные нейтральной и касательные к контуру поперечного сечения, находим в той и другой области наиболее удаленные от нейтральной линии точки O_1 и O_2 с наибольшими растягивающими и сжимающими напряжениями (рис. 331, *б*). Подставляя координаты этих точек (y_{01} и z_{01}, или y_{02} и z_{02}) с их знаками в формулу (23.1), находим наибольшие значения растягивающих и сжимающих

напряжений

$$\sigma_{max}=\frac{N}{F}+\frac{M_y}{J_y}z_0-\frac{M_z}{J_z}y_0. \qquad (23.7)$$

При решении практических задач иногда удобнее вместо общей формулы (23.7) пользоваться формулой

$$\sigma_{max}=\pm\frac{|N|}{F}\pm\frac{|M_y z_0|}{J_y}\pm\frac{|M_z y_0|}{J_z}, \qquad (23.8)$$

в которую N, M_y, M_z, y_0 и z_0 подставляются по абсолютному их значению, а знаки получающихся слагаемых устанавливаются в каждом частном случае по действительному направлению силовых факторов и положению точек в сечении.

§ 129. Определение касательных напряжений

Касательные напряжения в сечении стержня возникают вследствие кручения его вокруг оси x (M_x) и сдвигов в плоскостях xy и xz (Q_y и Q_z) — см. рис. 330, *в*. Касательные напряжения $\tau_к$, отвечающие крутящему моменту M_x, для стержня с поперечным сечением в виде круга или кольца вычисляются по известной формуле

$$\tau_к=\frac{M_x\rho}{J_p}. \qquad (23.9)$$

Для стержней с поперечным сечением иной формы наибольшие касательные напряжения могут быть определены по формуле

$$\max\tau_к=\frac{M_x}{W_к} \qquad (23.10)$$

с помощью данных для $W_к$, приведенных в разделе кручения стержней некруглого сечения. Во всех случаях наибольшие касательные напряжения кручения возникают у контура поперечного сечения и направлены вдоль (параллельно) касательной к контуру.

Напряжения сдвига, соответствующие силам Q_y и Q_z, как правило, играют второстепенную роль; они вычисляются по формуле Журавского

$$\tau_y=\frac{Q_y S_z^0}{J_z b(y)} \quad и \quad \tau_z=\frac{Q_z S_y^0}{J_y b(z)}. \qquad (23.11)$$

Для прямоугольного и круглого сечений эти касательные напряжения достигают максимума на соответствующих главных осях инерции: τ_y на оси z, а τ_z на оси y. В тех точках контура, где направление наибольших касательных напряжений сдвига ($\max\tau_y$ или $\max\tau_z$) совпадает с направлением наибольшего касательного напряжения от кручения, те и другие напряжения арифметически складываются и при расчете на прочность учитываются наибольшие суммарные

напряжения

$$\tau_{max}=\max\tau_к+\max\tau_y, \quad \text{или} \quad \tau_{max}=\max\tau_к+\max\tau_z.$$

В связи с тем, что нормальные напряжения от изгиба и суммарные касательные напряжения от кручения и сдвига наибольших значений достигают на контуре поперечного сечения, то именно там обычно приходится искать наиболее напряженные точки и выполнять проверку прочности материала стержня. Точки с максимальными касательными напряжениями не всегда совпадают с точками, в которых возникают максимальные нормальные напряжения. В таких случаях прочиость материала стержня нужно проверять в тех точках контура, в которых получается наиболее неблагоприятное сочетание касательных и нормальных напряжений.

§ 130. Определение перемещений

В связи с тем, что в общем случае сложного сопротивления стержень в числе других простых деформаций подвергается двум плоским изгибам в главных плоскостях инерции, упругая линия стержня, вообще говоря, будет представлять собой пространственную кривую. При этом кривизна упругой линии в плоскости xy будет равна

$$\varkappa_z=\frac{1}{\rho_{xy}}=\frac{M_z}{EJ_z}, \tag{23.12}$$

а в плоскости xz

$$\varkappa_y=\frac{1}{\rho_{xz}}=-\frac{M_y}{EJ_y}. \tag{23.13}$$

Если отложить векторы кривизны $\varkappa_y$ и $\varkappa_z$ на соответствующих осях координат, то вектор полной кривизны упругой линии $\varkappa$, представляющий их геометрическую сумму

$$\varkappa=\sqrt{\varkappa_y^2+\varkappa_z^2}, \tag{23.14}$$

будет направлен под углом γ к оси z, тангенс которого равен (см. рис. 331, *в*)

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{\varkappa_z}{\varkappa_y}=-\frac{M_z}{M_y}\frac{J_y}{J_z}. \tag{23.15}$$

Сравнивая формулы (23.15) и (23.3), убеждаемся, что углы α и γ равны между собой, т. е. вектор полной кривизны параллелен нейтральной линии, а при отсутствии нормальной силы совпадает с нею. Вследствие этого плоскость результирующего искривления, перпендикулярная к вектору полной кривизны и касательная к упругой линии стержня в данном сечении, всегда перпендикулярна к нейтральной линии; направление же перемещения центра тяжести

рассматриваемого сечения будет перпендикулярно к нейтральной линии только при изгибе в одной плоскости при (φ=const и α=const на протяжении всей длины стержня — например, при плоском и косом изгибе).

Если $J_y > J_z$, как это имеет место в примере, иллюстрированном рис. 331, то по (23.3) $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\varphi$ и $\alpha > \varphi$, т. е. направление перемещения центра тяжести сечения отклоняется от плоскости действия $M_{и}$ к оси y. Нетрудно заметить, что направление перемещения всегда будет отклоняться от плоскости действия результирующего изгибающего момента в сторону оси с наибольшим моментом инерции.

Из сказанного выше ясно, что упругая линия стержня будет представлять собой плоскую кривую лишь в том случае, если вектор полной кривизны на всем протяжении длины стержня будет наклонен к оси y под одним и тем же углом $\gamma=\alpha$, т. е. (см. (23.15)), если произведение $\frac{J_y}{J_z}\frac{M_z}{M_y}$ окажется не зависящим от координаты x. Последнее будет иметь место, например, в том случае, когда стержень постоянного сечения будет нагружен силами, расположенными в одной какой-либо плоскости.

Применяя принцип сложения действия сил, для нахождения полного перемещения центра тяжести какого-либо сечения стержня можно использовать дифференциальные уравнения упругой линии, получаемые из (23.12) и (23.13). После интегрирования их с последующим нахождением постоянных интегрирования из граничных условий и определения в данном сечении двух составляющих перемещения f_y и f_z в направлении главных осей инерции y и z величину полного перемещения найдем как их геометрическую сумму

$$f=\sqrt{f_y^2+f_z^2}. \qquad (23.16)$$

Кроме аналитического метода для той же цели может быть использован графоаналитический способ, а также, особенно в применении к коленчатым стержням (см. ниже), и теорема Кастильяно. Применяя к определению перемещений при сложном сопротивлении теорему Кастильяно, нужно потенциальную энергию деформации стержня U представить в виде функции всех шести компонентов сил: N, Q_y, Q_z, M_x, M_y и M_z. Пренебрегая энергией касательных напряжений сдвига, можем написать

$$U=U(N)+U(M_x)+U(M_y)+U(M_z).$$

Полагая, что нормальное усилие N и крутящий момент M_x в общем случае не остаются постоянными на протяжении всей длины стержня, для энергии в элементе стержня длиной dx следует написать выражения

$$dU(N)=\frac{N^2dx}{2EF} \quad \text{и} \quad dU(M_x)=\frac{M_x^2dx}{2GJ_к},$$

а для энергии на участке стержня длиной l:

$$U(N)=\int\limits_{l}\frac{N^2\,dx}{2EF}\quad\text{и}\quad U(M_x)=\int\limits_{l}\frac{M_x^2\,dx}{2GJ_к}.$$

Для энергии нормальных напряжений при плоском изгибе соответственно имеем (§ 100)

$$U(M_y)=\int\limits_{l}\frac{M_y^2\,dx}{2EJ_y}\quad\text{и}\quad U(M_z)=\int\limits_{l}\frac{M_z^2\,dx}{2EJ_z}.$$

В связи с этим формула для U получает теперь такой вид:

$$U=\int\limits_{l}\left(\frac{N^2}{2EF}+\frac{M_x^2}{2GJ_к}+\frac{M_y^2}{2EJ_y}+\frac{M_z^2}{2EJ_z}\right)dx. \qquad (23.17)$$

Значок l показывает, что интегрирование распространяется на длину такого участка стержня, на протяжении которого функции координаты x, т. е. N, M_x, M_y и M_z, остаются непрерывными. При наличии в стержне нескольких таких участков вместо одного интеграла нужно вычислить интегралы по каждому из участков и взять их сумму.

Применяя теорему Кастильяно, искомое перемещение в направлении какой-либо из сил P находим из выражения

$$\delta=\frac{\partial U}{\partial P}=\sum_{i=1}^{i=n}\int\limits_{l_i}\left(\frac{N\frac{\partial N}{\partial P}}{EF}+\frac{M_x\frac{\partial M_x}{\partial P}}{GJ_к}+\frac{M_y\frac{\partial M_y}{\partial P}}{EJ_y}+\frac{M_z\frac{\partial M_z}{\partial P}}{EJ_z}\right)dx. \qquad (23.18)$$

Под P и δ здесь, конечно, понимается обобщенное усилие и соответствующее этому усилию обобщенное перемещение. Аналогично составляются формулы Мора и Верещагина.

§ 131. Расчет простейшего коленчатого стержня

Коленчатые стержни нередко встречаются на практике, представляя части кривошипных и иных механизмов, коленчатых валов и т. д. Расчет этих стержней представляет несколько бо́льшие трудности, чем расчет прямых стержней. Ознакомимся здесь в качестве примера с порядком выполнения расчета коленчатого стержня, изображенного на рис. 333. Стержень состоит из двух участков: вертикального (прямоугольного сечения) и горизонтального (круглого сечения), жестко соединенных друг с другом под прямым углом. К стержню приложены такие нагрузки: в сечении A: $P_1=1200$ *кГ*, $P_2=1000$ *кГ*, $P_3=400$ *кГ*, и пара сил с моментом $M_0=800$ *кГм*, а в сечении B: $P_4=6000$ *кГ* и $P_5=300$ *кГ*. Длина первого участка стержня $l_1=120$ *см*, второго $l_2=80$ *см*, $b=8$ *см*, $h=15$ *см*. Материал стержня углеродистая сталь; $E=2\cdot 10^6$ *кГ/см*², $G=8\cdot 10^5$ *кГ/см*² и $[\sigma]=800$ *кГ/см*². Требуется проверить прочность стержня в первом участке и определить необходимую величину диаметра сечения во втором участке, а также найти полное перемещение центра тяжести сечения A и угол поворота этого сечения вокруг продольной оси первого участка.

Расчет начинается с построения эпюр изменения всех силовых факторов на каждом из участков коленчатого стержня. При этом каждый из участков можно

относить к своей прямоугольной системе координат, выбирая направление осей так, чтобы сила N всегда была нормальной силой, момент M_x — крутящим моментом, а моменты M_y и M_z — изгибающими моментами. На рис. 334 такие эпюры построены справа от схемы стержня (рис. 334, *а*) для первого участка и ниже этой схемы — для второго участка. На этих эпюрах значения силовых факторов в начале и в конце каждого из участков приведены в алгебраической форме. По результатам построения эпюр в каждом из участков выясняется положение опасных сечений, где сочетание силовых факторов оказывается наиболее неблагоприятным. В рассматриваемом примере опасными сечениями будут: горизонтальное сечение *1—1* в первом участке и вертикальное сечение *2—2* во втором участке — оба возле точки *B* (см. рис. 334, *а*). Эти сечения вместе с действующими в них силовыми факторами изображены на рис. 334, *б* и *в*.

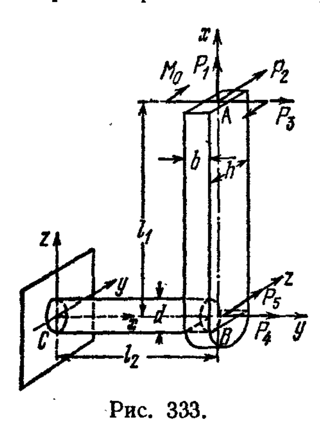


Рис. 333.

Проверим прочность стержня в сечении *1—1*. Силовые факторы в этом сечении приводятся к силе $N=P_1=1200$ *кГ*, крутящему моменту $M_x=$ $=M_0=-80\,000$ *кГ·см* и двум изгибающим моментам: $M_y=-P_2l_1=-1000\cdot120=-120\,000$ *кГ/см* и $M_z=P_3l_1=400\cdot120=48\,000$ *кГ/см*. Нормальные напряжения в любой точке этого сечения могут быть вычислены по формуле (см. (23.1))

$$\sigma=\frac{N}{F}+\frac{M_yz}{J_y}-\frac{M_zy}{J_z}=\frac{1200}{120}-\frac{120\,000}{2250}z-\frac{48\,000}{640}y=10-\frac{160}{3}z-75y,$$

так как $F=bh=8\cdot15=120$ *см*², $J_y=bh^3/12=8\cdot15^3/12=2250$ *см*⁴ и $J_z=$ $=hb^3/12=15\cdot8^3/12=640$ *см*⁴. Нейтральная линия отсекает на осях координат y и z отрезки

$$a_y=\frac{NJ_z}{FM_z}=\frac{1200\cdot640}{120\cdot48\,000}=\frac{2}{15}=0,133 \text{ см}$$

и

$$a_z=\frac{-NJ_y}{FM_y}=\frac{1200\cdot2250}{120\cdot120\,000}=\frac{3}{16}=0,1875 \text{ см}.$$

Наибольшие нормальные напряжения возникают в наиболее удаленной от нейтральной линии точке *1* с координатами $y_1=-4$ *см* и $z_1=-7,5$ *см* (здесь имеет место линейное напряженное состояние):

$$\sigma_{max}=\sigma_{(1)}=10+\frac{160}{3}7,5+75\cdot4=710 \text{ кГ/см}^2<[\sigma]=800 \text{ кГ/см}^2.$$

Прочность материала в точке *1* обеспечена. Теперь необходимо произвести проверку прочности в точках *2* и *3*, где, кроме нормальных напряжений, возникают еще и касательные напряжения кручения. Нормальные напряжения в этих точках равны

$$\sigma_{(2)}=\frac{N}{F}-\frac{M_z}{J_z}y_2=10+75\cdot4=310 \text{ кГ/см}^2$$

и

$$\sigma_{(3)}=\frac{N}{F}+\frac{M_y}{J_y}z_3=10+\frac{160}{3}\cdot7,5=410 \text{ кГ/см}^2.$$

Для нахождения касательных напряжений определяем значения $J_к=\alpha b^4$ и $W_к=\beta b^3$. По значению отношения $n=h/b=15/8=1,875$ в таблице 9 (§ 54) путем линейной

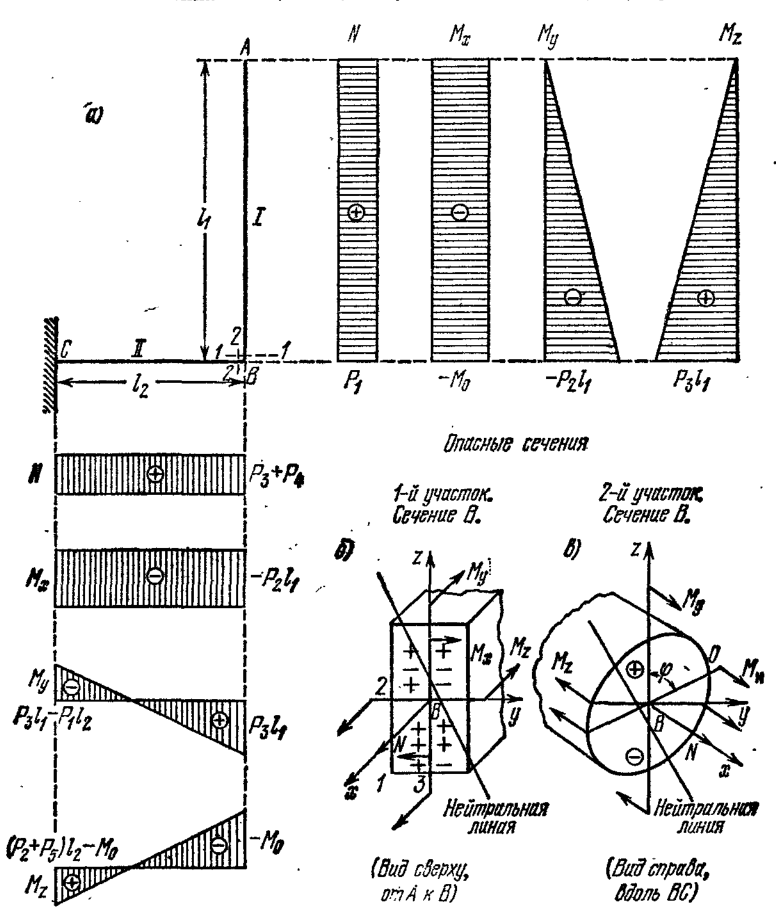


Рис. 334.

интерполяции находим коэффициенты $\alpha=0,416$, $\beta=0,406$ и $\gamma=0,808$. Таким образом, $J_к=0,416\cdot 8^4=2506$ *см*^{4} и $W_к=0,406\cdot 8^3=233$ *см*^{3}. В точке *2*

$$\tau_{(2)}=\tau_{max}=\frac{M_x}{W_к}=\frac{80\,000}{233}=343 \text{ кГ/см}^2,$$

а в точке *3*

$$\tau_{(3)}=\gamma\tau_{max}=0,808\cdot 343=277 \text{ кГ/см}^2.$$

Проверку прочности в этих точках выполняем по третьей теории прочности:

$$\sigma^{III}_{расч\ (2)}=\sqrt{\sigma^2_{(2)}+4\tau^2_{(2)}}=\sqrt{310^2+4\cdot 343^2}=753 \text{ кГ/см}^2 < 800 \text{ кГ/см}^2,$$

$$\sigma^{III}_{расч\ (3)}=\sqrt{\sigma^2_{(3)}+4\tau^2_{(3)}}=\sqrt{410^2+4\cdot 277^2}=689 \text{ кГ/см}^2 < 800 \text{ кГ/см}^2.$$

Таким образом, и в этих точках прочность материала стержня тоже вполне обеспечена.

Переходим ко второму участку. Здесь в опасном сечении 2—2 силовые факторы имеют такие значения:

$$N=P_3+P_4=400+6000=6400\ кГ;$$
$$M_x=-P_2l_1=-1000\cdot 120=-120\,000\ кГ\cdot см;$$
$$M_y=P_3l_1=400\cdot 120=48\,000\ кГ\cdot см \quad и \quad M_z=-M_0=-80\,000\ кГ\cdot см.$$

Поскольку это сечение круглое с одинаковыми моментами инерции при изгибе вокруг обеих главных осей инерции

$$J_y=J_z=J_и=\frac{\pi r^4}{4} \quad и \quad J_к=J_p=\frac{\pi r^4}{2}=2J_и,$$

то изгибающие моменты M_y и M_z геометрически суммируем в один результирующий изгибающий момент $M_и$:

$$M_и=\sqrt{M_y^2+M_z^2}=\sqrt{48\,000^2+80\,000^2}=93\,280\ кГ\cdot см.$$

След плоскости действия результирующего момента проходит через центр тяжести сечения под углом φ к оси z, причем

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{M_z}{M_y}=\frac{80\,000}{48\,000}=\frac{5}{3} \quad и \quad угол\ \varphi=59°2'.$$

Опасной точкой в сечении будет точка O, лежащая на пересечении следа плоскости действия $M_и$ с окружностью сечения. В этой точке нормальное напряжение

$$\sigma_{(O)}=\sigma_{max}=\frac{N}{F}+\frac{M_и}{W_и}=\frac{N}{\pi r^2}+\frac{4M_и}{\pi r^3}=\frac{6400}{3,14r^2}+\frac{4\cdot 93\,280}{3,14r^3}=\frac{2037}{r^2}+\frac{118\,770}{r^3},$$

а касательное напряжение

$$\tau_{(O)}=\tau_{max}=\frac{M_x}{W_p}=\frac{2M_x}{\pi r^3}=\frac{2\cdot 80\,000}{3,14r^3}=\frac{76\,300}{r^3}.$$

Для определения радиуса сечения стержня в этом участке также используем условие прочности по третьей теории прочности

$$\sigma^{III}_{расч\,(O)}=\sqrt{\sigma^2_{(O)}+4\tau^2_{(O)}}=\sqrt{\left(\frac{2037}{r^2}+\frac{118\,770}{r^3}\right)^2+4\left(\frac{76\,300}{r^3}\right)^2}\leqslant[\sigma]=$$
$$=800\ кГ/см^2.$$

Возводя обе части этого неравенства в квадрат и умножая результат на r^6, получаем

$$2037^2r^2+2\cdot 2037\cdot 118\,770r+118\,770^2+152\,600^2\leqslant 64\cdot 10^4r^6,$$

или

$$\Phi=r^6-6,485r^2-756,1r-58\,516\geqslant 0. \qquad (*)$$

Решая уравнение $\Phi=0$ относительно r путем подбора, в первом приближении пренебрегаем членами с r^2 и r (т. е. пренебрегаем сравнительно малой величиной составляющей нормального напряжения N/F); тогда

$$r\geqslant\sqrt[6]{58\,516}=6,24\ см.$$

Подставляем в уравнение $\Phi=0$ несколько большее значение $r=6,3\ см$, имеем

$$\Phi=6,3^6-6,485\cdot 6,3^2-756,1\cdot 6,3-58\,516=-1013\ кГ\cdot см^6.$$

Видим, что принятое значение r недостаточно для выполнения неравенства (*), испробуем значение $r=6{,}4$ *см*. В этом случае $\Phi=+5099$ *кГ·см*^{6}. Теперь путем интерполяции находим $r=6{,}32$ *см*. При этом

$$F=\pi r^2=3{,}14\cdot 6{,}32^2=125{,}5\ см^2;$$

$$J_и=\frac{\pi r^4}{4}=\frac{3{,}14\cdot 6{,}32^4}{4}=1253\ см^4$$

и

$$J_к=J_р=2J_и=2\cdot 1253=2506\ см^4.$$

Для определения перемещений применим теорему Кастильяно. В таблице 16

Таблица 16

Силовые факторы и их производные

Первый участок ($0\leqslant x\leqslant l_1$)				
Силовые факторы	N	M_x	M_y	M_z
Формулы для них	P_1	$-M_0$	$-P_2x$	P_3x
$\partial/\partial P_1$	1	—	—	—
$\partial/\partial P_2$	—	—	$-x$	—
$\partial/\partial P_3$	—	—	—	x
$\partial/\partial M_0$	—	-1	—	—
Второй участок ($0\leqslant x\leqslant l_2$)				
Формулы для силовых факторов	P_3+P_4	$-P_2l_1$	Pl_1-P_1x	P_2x+P_5x- $-M_0$
$\partial/\partial P_1$	—	—	$-x$	—
$\partial/\partial P_2$	—	$-l_1$	—	x
$\partial/\partial P_3$	1	—	l_1	—
$\partial/\partial M_0$	—	—	—	-1

в виде функции координаты x приведены выражения для силовых факторов N, M_x, M_y и M_z и их производные по силам P_1, P_2, P_3 и M_0 в каждом из участков коленчатого стержня. Используя данные таблицы, без затруднения находим

$$f_1=\frac{\partial U}{\partial P_1}=\int_0^{l_1}\frac{N_1\frac{\partial N_1}{\partial P_1}dx}{EF_1}+\int_0^{l_2}\frac{M_{y2}\frac{\partial M_{y2}}{\partial P_1}dx}{EJ_{y2}}=$$

$$=\int_0^{l_1}\frac{P_1\cdot 1\cdot dx}{EF_1}+\int_0^{l_2}\frac{(P_3l_1-P_1x)(-x)\,dx}{EJ_{y2}}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 10^6}\left[\int_0^{120}\frac{1200\,dx}{120}+\int_0^{80}\frac{1200x^2-48\,000x}{1253}dx\right]=\frac{42\,060}{2\cdot 10^6}=0{,}21\ см,$$

$$f_2=\frac{\partial U}{\partial P_2}=\int_0^{l_1}\frac{M_{y1}\frac{\partial M_{y1}}{\partial P_2}}{EJ_{y1}}dx+\int_0^{l_2}\frac{Mx_2\frac{\partial M_{x2}}{\partial P_2}dx}{GJ_{к2}}+\int_0^{l_2}\frac{M_{z2}\frac{\partial M_{z2}}{\partial P_2}dx}{EJ_{z2}}=$$

$$=\frac{1}{E}\left\{\int_0^{l_1}\frac{(-P_2x)(-x)\,dx}{J_{y1}}+\int_0^{l_2}\frac{(-P_2l_1)(-l_1)\,dx}{0{,}4J_{к2}}+\int_0^{l_2}\frac{[(P_2+P_5)x-M_0]\,x\,dx}{J_{z2}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 10^6}\left[\int_0^{120}\frac{1000x^2dx}{2250}+\int_0^{80}\frac{1000\cdot 120\cdot 120\,dx}{0{,}4\cdot 2506}+\int_0^{80}\frac{1300x^2-80\,000x}{1253}dx\right]=$$

$$=\frac{1{,}278}{2}=0{,}639\ см,$$

$$f_3=\frac{\partial U}{\partial P_3}=\int_0^{l_1}\frac{M_{z1}\frac{\partial M_{z1}}{\partial P_3}dx}{EJ_{z1}}+\int_0^{l_2}\frac{N_2\frac{\partial N_2}{\partial P_3}dx}{EF_2}+\int_0^{l_2}\frac{M_{y2}\frac{\partial M_{y2}}{\partial P_3}dx}{EJ_{y2}}=$$

$$=\frac{1}{E}\left[\int_0^{l_1}\frac{P_3x^2dx}{J_{z1}}+\int_0^{l_2}\frac{(P_3+P_4)\,dx}{F_2}+\int_0^{l_2}\frac{(P_3l_1-P_1x)\,l_1dx}{J_{y2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 10^6}\left[\int_0^{120}\frac{400x^2dx}{640}+\int_0^{80}\frac{6400\,dx}{125{,}5}+\int_0^{80}\frac{(120\,000-1200x)\,120\,dx}{1253}\right]=$$

$$=\frac{0{,}9167}{2}=0{,}408\ см,$$

$$\varphi=\frac{\partial U}{\partial M_0}=\int_0^{l_1}\frac{M_{x1}\frac{\partial M_{x1}}{\partial M_0}dx}{GJ_{к1}}+\int_0^{l_2}\frac{M_{z2}\frac{\partial M_{z2}}{\partial M_0}dx}{EJ_{z2}}=$$

$$=\frac{1}{E}\left\{\int_0^{l_1}\frac{M_0dx}{0{,}4J_{к1}}+\int_0^{l_2}\frac{[(P_2+P_5)x-M_0](-1)\,dx}{J_{z2}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 10^6}\left[\int_0^{120}\frac{80\,000\,dx}{0{,}4\cdot 1704}+\int_0^{80}\frac{(1300x-80\,000)(-1)\,dx}{1253}\right]=\frac{15\,870}{2\cdot 10^6}=0{,}00794=0{,}455^\circ.$$

Полное перемещение f равно

$$f=\sqrt{f_1^2+f_2^2+f_3^2}=\sqrt{0{,}21^2+0{,}639^2+0{,}408^2}=0{,}787\ см.$$

Глава XXIV
КРИВЫЕ СТЕРЖНИ

§ 132. Общие понятия

Кроме стержней с прямой осью в конструкциях часто встречаются элементы, у которых ось, т. е. линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений, является кривой. К ним относятся звенья цепей, проушины, крюки, арки, своды, станины подъемных

кранов и т. п. (рис. 335). Кроме того, на практике строго прямых стержней не встречается; все стержни, рассчитываемые нами как прямые, имеют в той или иной степени небольшую кривизну. Поэтому изучение влияния кривизны оси стержня на распределение напряжений позволит нам, с одной стороны, проверять прочность явно кривых стержней, а с другой — оценить влияние небольших отступлений от прямолинейной формы на прочность прямых стержней.

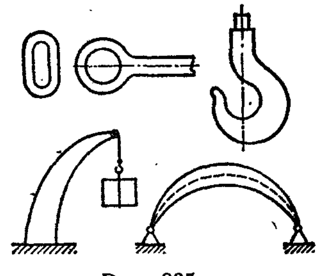


Рис. 335.

При проверке прочности подобных стержней введем следующие ограничения:

а) *сечения стержня имеют ось симметрии;*

б) *ось стержня представляет собой плоскую кривую, лежащую в плоскости симметрии;*

в) *внешние силы лежат в той же плоскости.*

Тогда вследствие симметрии и деформация оси стержня будет происходить в той же плоскости; ось стержня останется *плоской кривой*, лежащей в плоскости внешних сил; мы будем иметь случай, аналогичный плоскому изгибу балки.

Принимая при расчете указанные выше ограничения, мы охватываем почти все встречающиеся на практике случаи работы кривых стержней. Нашей задачей будет отыскание наибольших напряжений, проверка прочности и вычисление деформаций кривых стержней.

Решение этой задачи мы проведем совершенно аналогично тому, как мы поступили в подобном случае для прямой балки.

§ 133. Вычисление изгибающих моментов, нормальных и поперечных сил

Представим себе кривой стержеиь (рис. 336), нагруженный внешними силами P_1, P_2, P_3, P_4, расположенными в плоскости симметрии поперечных сечений. В той же плоскости будут лежать и опорные реакции, на рисунке не показанные.

Для определения напряжений по сечениям, перпендикулярным к оси стержня, проведем одно из таких сечений mn, делящее стержень на две части I и II. Отбросим часть I и рассмотрим оставленную часть II (рис. 337, *а*). На часть II будут действовать сила P_4, реакции в защемлении, на рисунке не показанные, а также *внутренние усилия в сечении mn, представляющие собой действие отброшенной первой части на рассматриваемую нами вторую часть.* Какие же внутренние усилия действуют в сечении mn?

По этому сечению будут действовать нормальные и касательные напряжения (на рис. 337, *а* не показанные). При ограничениях, перечисленных в § 132, нормальные напряжения приведут к появлению равнодействующих внутренних усилий: изгибающего момента M и нормальной силы N. Касательные напряжения по сечению сложатся в равнодействующую поперечную силу Q. Эти три внутренних усилия показаны на рис. 337, *а*.

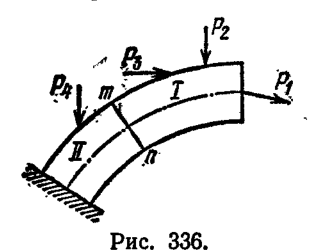


Рис. 336.

Рассмотрим теперь часть I кривого стержня (рис. 337, *б*). Все внешние силы, действующие на эту часть кривого стержня, могут быть приведены в центре тяжести O сечения mn в общем случае к равнодействующей R и к паре сил M_y. Равнодействующая R может быть разложена на две составляющие R_x и R_z. Эти три равнодействующие показаны на рис. 337, *в*. *Они также представляют собой действие части I кривого стержня на часть II.*

Сравнивая рис. 337, *а* и 337, *в*, сразу замечаем, что изгибающий момент M в сечении mn равен M_y, нормальная сила N равна R_x и поперечная сила Q равна R_z.

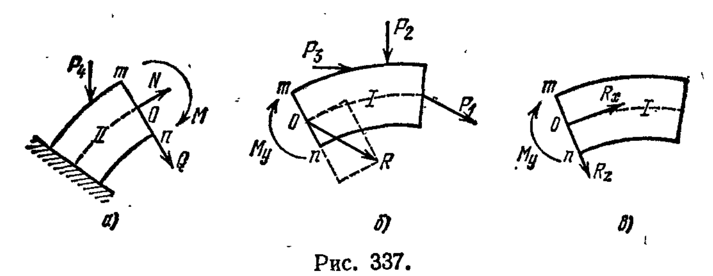


Рис. 337.

Таким образом, аналогично с изгибом прямого бруса, в кривом стержне внутренние силы: изгибающий момент, нормальную силу и поперечную силу — можно вычислить через внешние силы, расположенные по одну сторону поперечного сечения. Вычисление их сводится к выполнению операций статики.

Изгибающий момент равен алгебраической сумме моментов всех сил, действующих по одну сторону сечения, относительно центра тяжести сечения.

Нормальная сила равна алгебраической сумме проекций всех сил, расположенных по одну сторону сечения, на касательную к оси кривого стержня, проведенную в рассматриваемом сечении.

Поперечная сила равна алгебраической сумме проекций на вертикальную ось сечения всех сил, расположенных по одну сторону сечения.

Изгибающий момент считается положительным, если он увеличивает кривизну стержня. Нормальную силу будем считать положительной, если она стремится оторвать отброшенную часть стержня от оставленной. Поперечную силу считаем положительной, когда она получается из положительного направления нормальной силы поворотом по часовой стрелке на 90° (рис. 338).

Так же, как и для балки, при вычислении величин M, N и Q можно рассматривать как левую, так и правую части стержня,

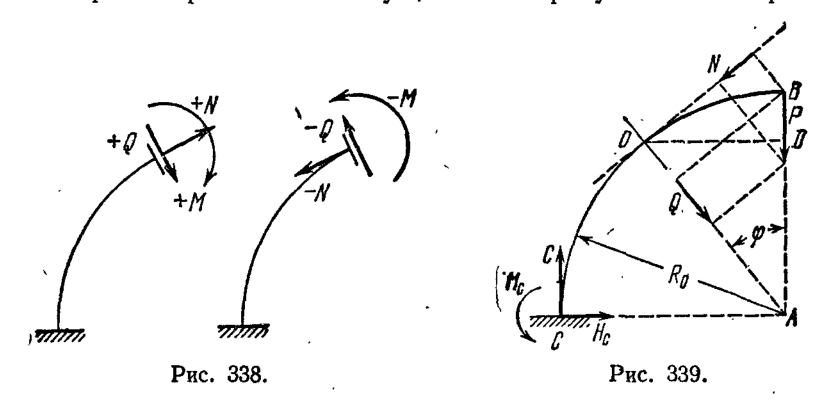


Рис. 338. Рис. 339.

разделенные проведенным сечением; выбор той или другой части определяется условием наибольшей простоты вычислений.

Приведенные выше правила знаков для изгибающего момента, нормальной и поперечной сил не зависят от того, правую или левую часть стержня мы оставляем для их вычисления.

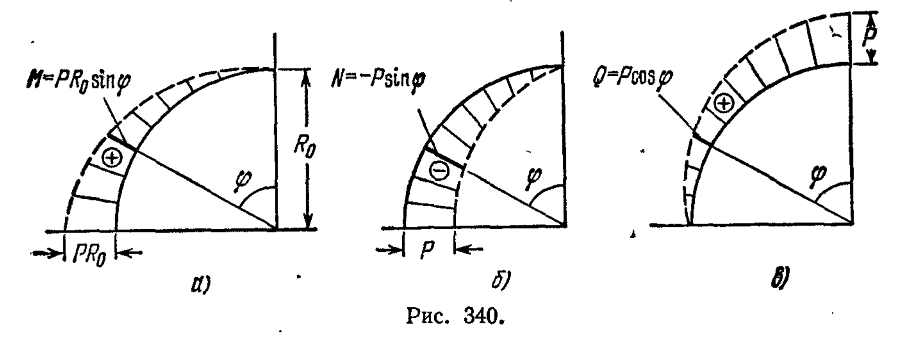


Рис. 340.

Рассмотрим пример вычисления M, N и Q. Возьмем стержень, представляющий собой четверть окружности радиуса R_0, защемленный одним концом и нагруженный на другом силой P (рис. 339); проведем какое-нибудь сечение с центром тяжести O. Положение сечения определим углом φ, составленным им с вертикалью. Для вы-

числения M, N и Q рассмотрим правую часть стержня. Этим мы избавляемся от вычисления реакций в сечении C.

Изгибающий момент будет равен моменту силы P относительно точки O:

$$M = +P \cdot \overline{OD} = +PR_0 \sin \varphi. \tag{24.1}$$

Проектируя силу P на нормаль к сечению и на само сечение, получаем

$$N = -P \sin \varphi; \quad Q = +P \cos \varphi. \tag{24.2}$$

Таким образом, наибольший изгибающий момент и нормальная сила будут при $\varphi = 90°$, т. е. в опорном сечении. На рис. 340 показаны эпюры M, N и Q. За нулевую линию принята ось стержня. Ординаты отложены по радиусам кривизны стержня.

§ 134. Вычисление напряжений, связанных с поперечной и нормальной силами

Касательные напряжения, действующие по сечению кривого стержня, суммируясь, создают поперечную силу Q. Применяя те же методы, что и при вычислении касательных напряжений в балках, можно вывести для кривых стержней точные формулы для вычисления касательных напряжений. Однако теоретические исследования показывают, что распределение касательных напряжений в кривых стержнях близко к тому, что мы имеем в балках. Поэтому практически вполне допустимо пользоваться для вычисления касательных напряжений в кривых стержнях формулой Журавского, выведенной для балок:

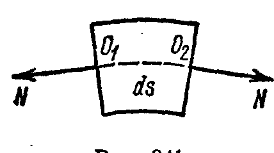


Рис. 341.

$$\tau \approx \frac{QS_y^0}{J_y b}. \tag{13.3}$$

Условие прочности по касательным напряжениям для кривых стержней тоже сохранит в таком случае свой вид (13.7):

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_{max}}{J_y b} \leqslant [\tau].$$

Обратимся теперь к определению нормальных напряжений, связанных с двумя результирующими внутренними силами: изгибающим моментом M и нормальной силой N. Займемся сначала нормальной силой.

Рассматривая элемент кривого стержня длиной ds с приложенными в центрах тяжести сечений, ограничивающих этот элемент, усилиями N, видим (рис. 341), что эти силы соответствуют простому растяжению или сжатию выделенного элемента. Поэтому и соответ-

ствующие напряжения будут нормальными к сечениям и равномерно распределенными по площади элемента F:

$$\sigma=\frac{N}{F}. \qquad (24.3)$$

Знак напряжений определится знаком силы N.

§ 135. Вычисление напряжений, связанных с изгибающим моментом

Задача нахождения закона распределения по сечению стержня нормальных напряжений, связанных с изгибающим моментом, и формул для их вычисления является статически неопределимой и

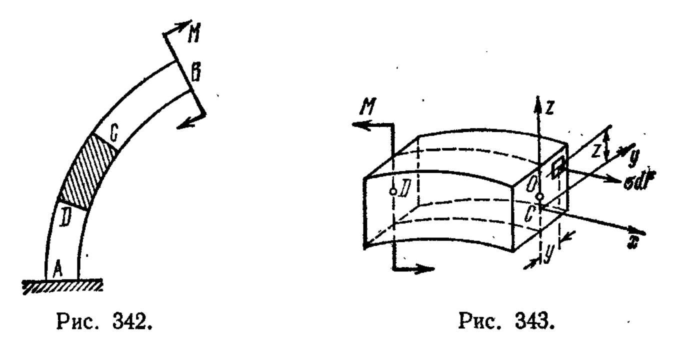


Рис. 342. Рис. 343.

требует, как это было и при изучении изгиба прямой балки, помимо составления и решения уравнений статики, рассмотрения соответствующих деформаций и составления дополнительных уравнений. При определении напряжений от сил Q и N мы обошлись без подобных вычислений, так как воспользовались уже готовыми решениями; для нормальных же напряжений, связанных с изгибающим моментом, мы проделаем весь ход вычислений, который в свое время был изложен при определении нормальных напряжений в прямых балках.

Кривой стержень AB (рис. 342) под действием внешней пары M испытывает чистый изгиб по всей своей длине.

Покажем на рис. 343 часть этого стержня DC, находящуюся под действием внутренних сил, передающихся от отброшенных частей стержня AD и CB. С левой стороны покажем изгибающий момент M, а с правой нормальное элементарное усилие $\sigma\,dF$.

Положение нейтрального слоя по высоте сечения нам заранее неизвестно и подлежит определению; будем в общем случае считать, что он не проходит через центры тяжести сечений. Начало координат покажем в точке C, расположенной на нейтральной оси y и вне центра тяжести сечения O, причем расстояние OC оставим пока

неизвестным. Ось z является осью симметрии; ось x направлена перпендикулярно к плоскости сечения. В плоскости симметрии xCz расположен изгибающий момент M; по каждой площадке dF с координатами y и z действует сила $\sigma\,dF$. Для системы сил M и $\sigma\,dF$, под действием которых оставленная часть сохраняет равновесие, можно написать шесть уравнений равновесия.

На ось x M дает проекцию, равную нулю; сумма же проекций сил $\sigma\,dF$ выразится интегралом, охватывающим всю площадь поперечного сечения:

$$\sum X=0; \quad \int_F \sigma\,dF=0. \tag{24.4}$$

Уравнения проекций всех сил на оси y и z:

$$\sum Y=0 \quad \text{и} \quad \sum Z=0$$

обращаются в тождества, так как напряжения σ перпендикулярны к осям y и z. Обращается в тождество и уравнение моментов относительно оси x:

$$\sum M_x=0,$$

так как не дают момента ни силы $\sigma\,dF$, параллельные оси x, ни пара M, лежащая в плоскости xCz.

По этой же причине момент пары M относительно оси z тоже равен нулю; что же касается сил $\sigma\,dF$, то их момент относительно этой оси равен интегралу $\int_F \sigma\,dFy$.

Пятое уравнение равновесия, следовательно, будет

$$\sum M_z=0; \quad \int_F \sigma\,dFy=0, \tag{24.5}$$

но этот интеграл равен нулю вследствие симметрии сечения относительно оси z.

Остается приравнять нулю сумму моментов всех сил относительно оси y. Это уравнение запишется так:

$$\sum M_y=0; \quad M-\int_F \sigma\,dFz=0. \tag{24.6}$$

Итак, условия статики требуют рассмотрения двух уравнений

$$\int_F \sigma\,dF=0, \tag{24.4}$$

$$M-\int_F \sigma\,dFz=0. \tag{24.6}$$

Закон изменения нормальных напряжений по высоте сечения остался пока неизвестным. Поэтому переходим к рассмотрению деформаций.

Как и для случая изгиба прямого стержня, будем пользоваться гипотезой плоских сечений, подтверждаемой опытами и для кривых стержней. Будем предполагать, что при действии изгибающего момента сечения, перпендикулярные к оси, остаются *плоскими* и лишь поворачиваются одно относительно другого (рис. 344). Волокна нейтрального слоя $C_1C_2—C_1'C_2'$ сохранят свою прежнюю длину, а

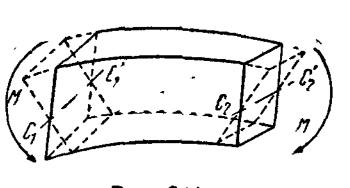


Рис. 344.

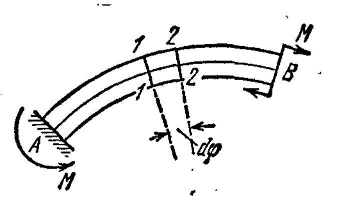


Рис. 345.

удлинения и укорочения, а стало быть, и напряжения для волокон, отстоящих на одно и то же расстояние от нейтральной оси, будут по ширине сечения одинаковыми. Установим зависимость между углом относительного поворота двух смежных сечений и деформациями волокон. Выделим из кривого стержня, подвергающегося действию только моментов (рис. 345), элемент, ограниченный двумя очень близкими сечениями, составляющими угол $d\varphi$. Этот элемент изображен на рис. 346: $O_1—O_2$ — ось стержня; $C_1—C_2$ — нейтральный слой.

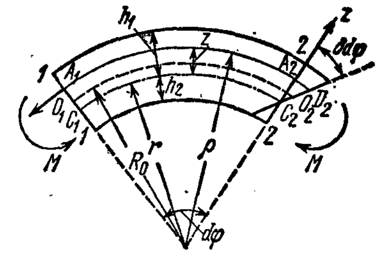


Рис. 346.

Нормальные напряжения, действующие по проведенным сечениям, образуют пары; под их действием угол между смежными сечениями *1—1* и *2—2* изменится на величину $\delta\,d\varphi$ вследствие относительного поворота этих сечений.

Найдем нормальные напряжения σ, действующие по сечениям в точках A_1 и A_2 на расстоянии z от нейтральных осей. Положительное направление оси z выберем в сторону наружных волокон. Волокно A_1A_2 получит удлинение A_2D_2; соответствующее напряжение σ будет равно

$$\sigma=\varepsilon E,$$

где ε — относительное удлинение волокна A_1A_2. Оно равно отношению абсолютного удлинения A_2D_2 к первоначальной длине волокна A_1A_2:

$$\varepsilon=\frac{A_2D_2}{A_1A_2};$$

обозначив буквой ρ радиус кривизны волокна A_1A_2, имеем

$$A_2D_2 = z\delta\, d\varphi; \quad A_1A_2 = \rho\, d\varphi;$$
$$\varepsilon = \frac{z}{\rho}\frac{\delta\, d\varphi}{d\varphi}; \quad \sigma = \frac{z}{\rho}\frac{\delta\, d\varphi}{d\varphi}E. \tag{24.7}$$

Формула (24.7) дает закон распределения по высоте сечения нормальных напряжений, связанных с изгибающим моментом.

Так как для каждого сечения величины $\frac{\delta\, d\varphi}{d\varphi}$ и E постоянны, то изменение σ зависит лишь от изменения координаты z и радиуса кривизны ρ волокна A_1A_2, причем $\rho = r + z$, где r — радиус кривизны нейтрального слоя.

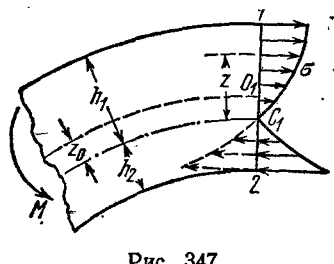


Рис. 347.

В то время как для прямой балки мы имели линейный закон распределения напряжений, для кривого стержня напряжения σ меняются по гиперболическому закону (рис. 347). Из формулы (24.7) видно, что в наружных от нейтрального слоя волокнах напряжения растут *медленнее*, чем z; во внутренних же, благодаря изменению знака z с положительного на отрицательный, они растут быстрее, чем z.

Таким образом, в кривом стержне нормальное напряжение во *внутреннем* крайнем волокне *больше*, а в *наружном меньше*, чем в тех же волокнах прямого стержня того же сечения. Это понятно: первоначальная длина внутреннего волокна в кривом стержне значительно меньше, чем наружного; в прямом же стержне эти длины равны. Поэтому и получается указанная выше разница в относительных деформациях, а стало быть, и в напряжениях для этих волокон.

Перейдем к решению уравнений статики (24.4) и (24.6) с учетом зависимости, полученной из рассмотрения деформаций (24.7). В уравнение (24.4) подставим (24.7)

$$\int_F \sigma\, dF = \int_F E\frac{\delta\, d\varphi}{d\varphi}\frac{z}{\rho}\, dF = 0.$$

Вынося постоянные для рассматриваемого сечения величины за знак интеграла и сокращая их, получаем

$$\int_F \frac{z}{\rho}\, dF = 0. \tag{24.8}$$

Это уравнение позволяет найти положение нейтральной оси.

Из равенства (24.8) ясно, что равен нулю не интеграл $\int_F z\, dF$, представляющий собой статический момент сечения относительно ней-

тральной оси, как это было для прямого стержня, а другой интеграл. Это показывает, что при изгибе кривого стержня нейтральная ось действительно не проходит через центр тяжести сечения. Заменяя в (24.8) $z=\rho-r$ (рис. 346), находим

$$\int_F \frac{\rho-r}{\rho}\,dF = \int_F dF - r\int_F \frac{dF}{\rho} = 0,$$

откуда следует, что

$$r = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{\rho}}. \tag{24.9}$$

Ход вычислений величины r для каждого частного вида поперечного сечения будет различен. Подставив теперь зависимость (24.7) в уравнение (24.6), получим

$$M - E\frac{\delta\,d\varphi}{d\varphi}\int_F \frac{z^2}{\rho}\,dF = 0, \tag{24.10}$$

где M — изгибающий момент, а интегрирование охватывает всю площадь поперечного сечения. Интеграл, входящий в это уравнение, преобразуем следующим образом:

$$\int_F \frac{z^2}{\rho}\,dF = \int_F \frac{\rho-r}{\rho}\,z\,dF = \int_F z\,dF - r\int_F \frac{z}{\rho}\,dF;$$

последний из полученных двух интегралов равен на основании (24.8) нулю, а первый представляет собой статический момент S площади поперечного сечения относительно нейтральной оси. Эта величина может быть вычислена как произведение площади сечения F на расстояние ее центра тяжести до нейтральной оси, т. е. на z_0 (рис. 347):

$$S = Fz_0. \tag{24.11}$$

Таким образом, уравнение (24.10) получает вид

$$M - E\frac{\delta\,d\varphi}{d\varphi}S = 0; \tag{24.12}$$

отсюда

$$\frac{\delta\,d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{ES}, \tag{24.13}$$

и формула для нормальных напряжений (24.7) напишется так:

$$\sigma = \frac{M}{S}\cdot\frac{z}{\rho}. \tag{24.14}$$

В уравнении (24.12) мы находим подтверждение того, что здесь статический момент S площади сечения относительно нейтральной

оси *не равен нулю*, т. е. нейтральная ось при изгибе кривого стержня не проходит *через центр тяжести сечения*, а несколько (на величину z_0) смещена. На рис. 347 мы изобразили это смещение в сторону к центру кривизны стержня. Результаты определения величины r из уравнения (24.9) для различных сечений показывают, что нейтральная ось действительно смещается в указанном направлении.

Это смещение связано с условием равенства между собой сумм сжимающих и растягивающих напряжений, действующих по сечению. Так как напряжения от изгибающего момента у наружного края сечения меньше, а у внутреннего — больше, чем в соответствующих волокнах прямого стержня того же сечения (рис. 347), то для равенства указанных сумм нейтральная ось должна сместиться от центра тяжести сечения в сторону внутренних волокон.

Добавляя к полученным напряжениям найденные в предыдущем параграфе напряжения от нормальной силы, получаем формулу для вычисления *полных* нормальных напряжений в кривом стержне

$$\sigma=\frac{N}{F}+\frac{M}{S}\cdot\frac{z}{\rho}. \tag{24.15}$$

Наибольшие по абсолютной величине растягивающие и сжимающие напряжения будут иметь место в крайних волокнах *1* и *2* (рис. 347).

§ 136. Вычисление радиуса кривизны нейтрального слоя для прямоугольного сечения

Для определения величины r служит уравнение (24.9)

$$r=\frac{F}{\int\limits_F \frac{dF}{\rho}}.$$

Развернем это уравнение для случая прямоугольного сечения стержня. Назовем (рис. 348) h — высоту, b — ширину сечения, R_0 — радиус кривизны стержня, R_1 — радиус кривизны наружных волокон, R_2 — радиус кривизны внутренних волокон, r — радиус кривизны нейтрального слоя.

Разделим сечение на полоски $dF=b\,d\rho$; тогда уравнение (24.9) примет вид

$$r=\frac{bh}{\int\limits_F \frac{b\,d\rho}{\rho}}=\frac{h}{\int\limits_{R_2}^{R_1} \frac{d\rho}{\rho}}=\frac{h}{\ln\frac{R_1}{R_2}}, \tag{24.16}$$

отсюда

$$z_0=R_0-\frac{h}{\ln\frac{R_1}{R_2}}. \tag{24.17}$$

Формулы (24.16) и (24.17) позволяют вычислить r и z_0, а следовательно, и S для прямоугольного сечения.

Положение нейтрального слоя для сечений, образованных из прямоугольников, определяется так же, как и в случае прямоугольного сечения кривого стержня: формула (24.16) приобретает лишь более сложный вид.

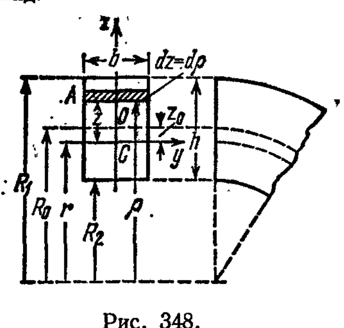


Рис. 348.

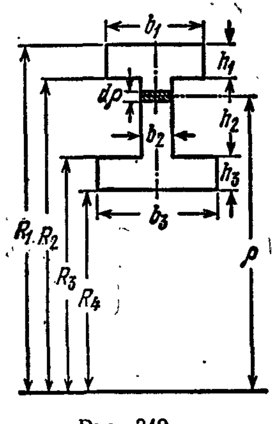


Рис. 349.

Рассмотрим двутавровое сечение с полками разных размеров (рис. 349). Знаменатель уравнения (24.9) определится следующим образом:

$$\int_F \frac{dF}{\rho} = \int_{R_2}^{R_1} \frac{b_1\,d\rho}{\rho} + \int_{R_3}^{R_2} \frac{b_2 d\rho}{\rho} + \int_{R_4}^{R_3} \frac{b_3 d\rho}{\rho} = b_1 \ln\frac{R_1}{R_2} + b_2 \ln\frac{R_2}{R_3} + b_3 \ln\frac{R_3}{R_4}.$$

Радиус кривизны нейтрального слоя будет

$$r = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3}{b_1 \ln\frac{R_1}{R_2} + b_2 \ln\frac{R_2}{R_3} + b_3 \ln\frac{R_3}{R_4}}. \qquad (24.18)$$

§ 137. Вычисление радиуса кривизны нейтрального слоя для круга и трапеции

Для вычисления радиуса нейтрального слоя для кругового сечения, имеющего диаметр d, разбиваем площадь круга на элементарные площадки dF линиями, параллельными нейтральной оси (рис. 350).

Выразим dF и ρ в функции центрального угла φ. Предварительно вычисляем

$$\rho = R_0 + \frac{d}{2}\sin\varphi; \quad dF = b_z d\rho,$$

но

$$b_z = d\cos\varphi \quad \text{и} \quad d\rho = \frac{d}{2}\cos\varphi\, d\varphi.$$

Тогда $dF = \frac{d^2}{2}\cos^2\varphi\, d\varphi$. Знаменатель уравнения (24.9) принимает

вид

$$\int_F \frac{dF}{\rho} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d^2 \cos^2\varphi\, d\varphi}{2R_0 + d\sin\varphi}. \qquad (24.19)$$

Интегрируя, получаем

$$d^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{2R_0 + d\sin\varphi} = \pi\left[2R_0 - \sqrt{4R_0^2 - d^2}\right];$$

подставляя полученное значение в уравнение (24.9) и заменяя через

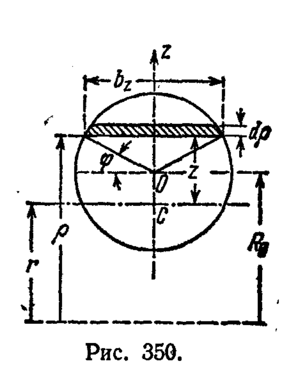


Рис. 350.

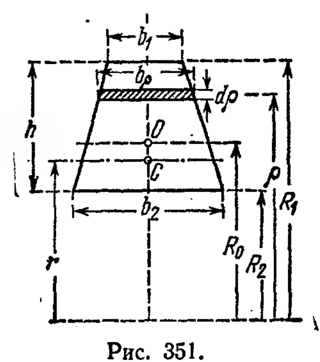


Рис. 351.

$\pi d^2/4$, находим

$$r = \frac{d^2}{4\left[2R_0 - \sqrt{4R_0^2 - d^2}\right]}. \qquad (24.20)$$

Для трапецеидального сечения (рис. 351) снова воспользуемся уравнением (24.9). Площадь трапеции равна

$$F = \frac{b_1 + b_2}{2} h.$$

Ширина сечения трапеции на расстоянии ρ от центра кривизны

$$b(\rho) = b_1 + (b_2 - b_1)\frac{R_1 - \rho}{R_1 - R_2}; \quad dF = b(\rho)\, d\rho.$$

Интеграл $\int_F \frac{dF}{\rho}$ имеет значение (опускаем промежуточные выкладки):

$$\int_F \frac{dF}{\rho} = \left[b_1 + R_1\frac{b_2 - b_1}{h}\right]\ln\frac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1).$$

Теперь по уравнению (24.9) получаем

$$r = \frac{h\frac{b_1 + b_2}{2}}{\left(b_1 + R_1\frac{b_2 - b_1}{h}\right)\ln\frac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1)}. \qquad (24.21)$$

При $b_2=b_1$, т. е. для прямоугольника, эта формула переходит в формулу (24.16).

При $b_1=0$ получим формулу для определения положения нейтральной оси при треугольном сечении

$$r=\frac{hb}{2R_1\frac{b}{h}\ln\frac{R_1}{R_2}-2b}. \qquad (24.22)$$

§ 138. Определение положения нейтрального слоя по таблицам

Таким же путем, как показано было выше в §§ 136 и 137 для прямоугольного, круглого и трапецеидального сечений, можно вычислить величины r и z_0 для сечения любой формы.

Результаты таких вычислений для некоторых сечений приведены в таблице 17.

В этой таблице приведены значения z_0 в долях радиуса R_0 в зависимости от отношения R_0/c, где c — расстояние от центра тяжести сечения до внутренних волокон.

В крайней левой графе указаны значения отношения (R_0/c).

В верхней части всех средних граф изображена форма сечения кривого стержня. Величина z_0 определяется умножением соответствующего табличного числа «k» на R_0, т. е.

$$z_0=kR_0.$$

Из этой таблицы видно, что с увеличением отношения R_0/c отношение z_0/R_0 быстро приближается к нулю, т. е. нейтральная ось приближается к центру тяжести сечения, а это значит, что уничтожается разница между работой материала в кривом и прямом стержнях. Отсюда же следует, что нейтральная ось в пределе пройдет через центр тяжести сечения. Таким образом, при значительных величинах отношения R_0/c положение нейтральной оси и величина напряжений в кривом стержне определяются с небольшой погрешностью теми же формулами, что и в прямом.

Уже при отношении R_0/c, равном десяти, можно считать величину z_0 практически равной нулю.

§ 139. Анализ формулы нормальных напряжений в кривом стержне

Подставляя в формулу нормальных напряжений (24.15) координаты наиболее удаленных точек сечения:

точки *1* $\quad z_1$ и R_1 (наружные волокна),
точки *2* $\quad -z_2$ и R_2 (внутренние волокна),

Таблица 17

Определение положения нейтрального слоя по таблицам

$\frac{R_0}{e}$				
1,2	0,361	0,336	0,352	0,269
1,4	0,251	0,229	0,243	0,182
1,6	0,186	0,168	0,179	0,134
1,8	0,144	0,128	0,138	0,104
2,0	0,116	0,102	0,110	0,083
2,2	0,096	0,084	0,092	0,068
2,4	0,082	0,071	0,078	0,057
2,6	0,070	0,061	0,067	0,049
2,8	0,060	0,053	0,058	0,043
3,0	0,052	0,046	0,050	0,038
3,5	0,038	0,033	0,037	0,028
4,0	0,029	0,024	0,028	0,020
6,0	0,013	0,011	0,012	0,0087
8,0	0,0060	0,0060	0,0060	0,0049
10,0	0,0039	0,0039	0,0039	0,0031

$\frac{R_0}{e}$				
1,2	0,418	0,408	0,453	0,399
1,4	0,299	0,285	0,319	0,280
1,6	0,229	0,208	0,236	0,205
1,8	0,183	0,160	0,183	0,159
2,0	0,149	0,127	0,147	0,127
2,2	0,125	0,104	0,122	0,104
2,4	0,106	0,088	0,104	0,088
2,6	0,091	0,077	0,090	0,077
2,8	0,079	0,067	0,078	0,067
3,0	0,069	0,058	0,067	0,058
3,5	0,052	0,041	0,048	0,042
4,0	0,040	0,030	0,036	0,031
6,0	0,018	0,013	0,016	0,014
8,0	0,010	0,0076	0,0089	0,0076
10,0	0,0065	0,0048	0,0057	0,0048

можем написать условие прочности кривого стержня

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N}{F} + \frac{M}{S}\cdot\frac{z_1}{R_1} \leqslant [\sigma], \\ \sigma_2 &= \frac{N}{F} - \frac{M}{S}\cdot\frac{z_2}{R_2} \leqslant [\sigma]. \end{aligned}\right\} \qquad (24.23)$$

Если материал различно сопротивляется растяжению и сжатию, величины $[\sigma]$ будут иметь различные значения. Что же касается отыскания опасного сечения, то благодаря наличию двух факторов M и N, связанных с нормальными напряжениями, этот вопрос более сложен, чем для прямого стержня. В некоторых случаях (см. пример § 133) M и N достигают наибольшей величины в одном и том же сечении, тогда оно и будет опасным. Если же это не имеет места, то приходится проверять прочность материала в ряде сечений, отыскивая вычислением наиболее напряженное.

Если значение радиуса кривизны стержня R_0 велико по сравнению с высотой сечения h (а именно, $R_0>5h$), то отношения z/ρ, или z_1/R_1, или z_2/R_2, становятся незначительными, и нормальные напряжения, зависящие от изгибающего момента, будут мало чем отличаться от напряжений, определяемых по формулам прямого бруса. Это легко установить при помощи данных §§ 135 и 136. Возьмем, например, уравнения (24.10) и (24.7). Исключая из них $E\frac{\delta\, d\varphi}{d\varphi}$ и заменяя ρ через $r+z$, получаем

$$\sigma = \frac{M\cdot z}{(r+z)\int\limits_F \frac{z^2}{r+z}\,dF} = \frac{M\cdot z}{\left(1+\frac{z}{r}\right)\int \frac{z^2 dF}{1+\frac{z}{r}}}. \qquad (24.24)$$

Если пренебречь здесь величиной z/r, то формула (24.24) обратится в формулу напряжений в прямом стержне

$$\sigma = \frac{Mz}{J}.$$

Определим, какова будет погрешность при вычислении наибольших нормальных напряжений от изгибающего момента по формуле прямого стержня при значении

$$R_0 = 5h$$

на примере стержня прямоугольного сечения. Радиус кривизны нейтрального слоя в этом случае равен

$$r = \frac{h}{\ln\frac{R_0+0{,}5h}{R_0-0{,}5h}} = \frac{h}{\ln\frac{5{,}5}{4{,}5}} = \frac{h}{0{,}20067} = 4{,}9833h.$$

Тогда

$$z_0 = R_0 - r = 0{,}0167h \quad \text{и} \quad z_0 = 0{,}00334R_0,$$

т. е. нейтральная ось отстоит всего на 1/60 высоты от центра тяжести сечения.

Напряжения изгиба по формулам кривого стержня составляют

$$\sigma_1 = \frac{M}{S}\cdot\frac{z_1}{R_1} = \frac{M\cdot 0{,}5167h}{bh\cdot 0{,}0167h\cdot 5{,}5h} = \frac{0{,}5167\cdot M\cdot 6}{0{,}5511bh^2} = 0{,}935\frac{M}{W},$$

$$\sigma_2 = \frac{M}{S}\cdot\frac{z_2}{R_2} = \frac{M\cdot 0{,}4833h}{bh\cdot 0{,}0167h\cdot 4{,}5h} = \frac{0{,}4833\cdot M\cdot 6}{0{,}4509bh^2} = 1{,}071\frac{M}{W};$$

т. е. величина напряжений отличается на $\pm 7\%$ от определяемой по формуле прямого стержня.

Это обстоятельство является причиной того, что для проверки прочности кривые стержни разделяют часто на две категории. К первой относят стержни *большой кривизны* $R_0/h \leqslant 5$; для них подсчет нормальных напряжений следует вести по формуле

$$\sigma_{1,2} = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{S}\cdot\frac{z_{1,2}}{R_{1,2}} \leqslant [\sigma]. \tag{24.23}$$

На практике это будет иметь место главным образом для частей машин, крюков, звеньев цепей, колец и т. д. Ко второй категории относят стержни *малой кривизны*, у которых радиус оси велик по сравнению с размерами сечения, т. е. $R_0/h > 5$; для таких стержней при вычислении напряжений от изгиба можно пользоваться формулой прямого стержня

$$\sigma_{1,2} = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W_{1,2}} \leqslant [\sigma]. \tag{24.25}$$

Эта категория обычно включает в себя кривые стержни, встречающиеся в различных инженерных сооружениях,— арки, своды и т. д.

§ 140. Дополнительные замечания к формуле нормальных напряжений

Проверяя прочность кривых стержней, мы очень часто получаем весьма значительные напряжения у внутренних волокон. Надо иметь в виду, что эти напряжения (рис. 347) падают весьма резко уже на небольшом расстоянии от края сечения. Таким образом, они носят явно выраженный характер местных напряжений, а потому при оценке их влияния на прочность детали следует иметь в виду указания § 15: при *статической* нагрузке и при пластичном материале (мягкая сталь) переход этих напряжений за предел текучести опасности не представляет.

Основы изложенной в § 135 теории расчета кривых стержней были даны русским академиком А. В. Гадолиным в 1856—1860 гг. Точная теория изгиба кривых стержней прямоугольного сечения

впервые была изложена русским ученым Х. С. Головиным в 1880 г.; полученные им результаты устанавливают, что сечения прямоугольной формы при изгибе кривого стержня остаются плоскими. Экспериментальные работы по проверке изложенной теории показывают достаточно удовлетворительное совпадение результатов опыта и вычислений.

Гиперболический закон распределения напряжений отчетливо виден при просвечивании напряженной прозрачной модели кривого стержня поляризованным одноцветным светом. В этом случае внутри контура модели можно видеть ряд темных и светлых полос; чем резче изменяются напряжения, тем эти полосы делаются уже и располагаются чаще. На рис. 352 показано это распределение полос для *чистого* изгиба модели, имеющей и прямую и кривую части.

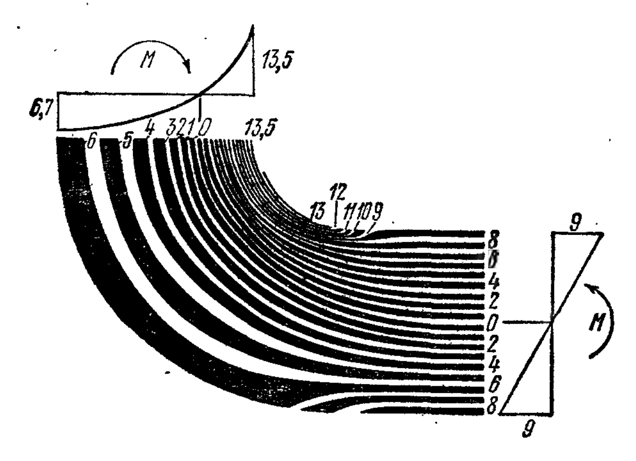


Рис. 352.

В пределах прямого участка полосы располагаются равномерно, так как напряжения *меняются* по линейному закону, т. е. равномерно; в кривой части наблюдается сгущение полос у вогнутой стороны и обратная картина у выпуклой, что соответствует резкому и неравномерному росту напряжений в первой зоне и значительно более медленному — во второй.

При исследовании распределения нормальных напряжений в кривых стержнях мы пренебрегли наличием нормальных напряжений, радиально направленных, т. е. *давлением* волокон *друг* на *друга*. Для кривых стержней эти напряжения имеют большее значение, чем для прямой балки, как это показали исследования, произведенные на гипсовых (хрупких) моделях. Особенно значительную величину получают эти напряжения для сечений, ширина которых резко меняется (двутавр).

§ 141. Пример определения напряжений в кривом стержне

Изогнутая рама машины подвергается действию двух сил P по 800 *кГ* каждая. Найти краевые напряжеиия в сеченни AB. Радиус оси $R_0=80$ *мм*, сечение прямоугольное 80×30 *мм* (рис. 353).

Рис. 353.

Так как $R_0/h<5$, то следует применить формулы для стержней большой кривизны. Находим радиус нейтрального слоя r:

$$r=\frac{h}{\ln\frac{R_1}{R_2}};$$

в нашем случае $h=80$ *мм*, $R_1=120$ *мм*, $R_2=40$ *мм*; следовательио,

$$r=\frac{80}{\ln\frac{120}{40}}=\frac{80}{1{,}099}=72{,}8\ мм.$$

Отсюда необходимые данные для расчета:

$$z_0=R_0-r=80-72{,}8=7{,}2\ мм=0{,}72\ см;$$

$$S=F\cdot z_0=8\cdot 3\cdot 0{,}72=17{,}3\ см^2;$$

$$z_1=\frac{h}{2}+z_0=4+0{,}72=4{,}72\ см;\quad z_2=\frac{h}{2}-z_0=4-0{,}72=3{,}28\ см.$$

Изгибающий момент относительно центра тяжести сечения равен

$$M=-800\cdot 25=-20\,000\ кГ/см.$$

Нормальная сила $N=+800$ *кГ*. Площадь поперечного сечения $F=24$ *см*².

Нормальные иапряжения в точках $A\,(\sigma_2)$ и $B\,(\sigma_1)$ равны

$$\sigma_1=+\frac{800}{24}-\frac{20\,000}{17{,}3}\cdot\frac{4{,}72}{12}=+33-455=-422\ кГ/см^2,$$

$$\sigma_2=+\frac{800}{24}+\frac{20\,000}{17{,}3}\cdot\frac{3{,}28}{4}=+33+948=+981\ кГ/см^2.$$

Если бы мы пренебрегли кривизной стержня и вычислили напряжеиия по формуле

$$\sigma=\frac{N}{F}\pm\frac{M}{W},$$

то получили бы

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}=+\frac{800}{24}\mp\frac{20\,000}{\frac{3\cdot 8^2}{6}}=+33\mp 625=\left\{\begin{matrix}-593\\ +658\end{matrix}\right\}\ кГ/см^2.$$

Мы получили бы напряжения во внутреннем волокие на

$$\frac{981-658}{981}\cdot 100=33\%$$

меньше, не в *запас прочности*. Таким образом, подбор сечения без учета кривизны стержия может повлечь за собой значительные перенапряжения.

§ 142. Определение перемещений в кривых стержнях

Опыт и расчеты показывают, что если при *определении напряжений необходимо* для стержней большой кривизны учитывать влияние этой кривизны, то при *вычислении деформаций* в подавляющем большинстве случаев можно *пренебречь* этим влиянием.

Рассмотрим, как определяется количество потенциально энергии при изгибе кривого стержня.

Вырежем из стержня двумя поперечными сечениями элемент длиной ds (рис. 354). На него будут действовать по обоим сечениям касательные напряжения, складывающиеся в усилие Q, и нормальные, складывающиеся в усилия N и M.

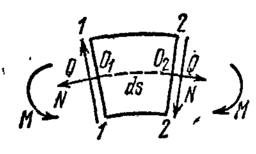


Рис. 354.

Для определения количества потенциальной энергии, накапливающейся в этом элементе, надо подсчитать работу всех этих усилий, приложенных к элементу. Уже в балках при подобных вычислениях мы пренебрегали работой касательных усилий; в кривом стержне это тем более возможно, так как влияние поперечных сил будет еще меньше.

Остается подсчитать работу усилий N и M. Если мы пренебрежем влиянием кривизны стержня, то это будет эквивалентно предположению, что деформация выделенного элемента под действием пар M происходит так же, как в балке; тогда количество потенциальной энергии, связанной с этой деформацией, будет равно $M^2ds/(2EJ)$; разница по отношению к балке лишь в другом обозначении длины элемента — вместо dx написано ds.

Так как мы пренебрегаем кривизной стержня, то нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения; поэтому при повороте сечения под действием пар M центры тяжести сечений O_1 и O_2 не перемещаются. Поэтому работа нормальных сил N не зависит от действия изгибающих моментов M, может быть вычислена отдельно, а результат прибавлен к полученному выше.

Усилия N, действующие на элемент, производят простое растяжение или сжатие; количество потенциальной энергии, накопленной при этом, будет равно $N^2ds/(2EF)$.

Количество потенциальной энергии, накопившейся в выделенном элементе, равно

$$dU = \frac{M^2ds}{2EJ} + \frac{N^2ds}{2EF};$$

потенциальная энергия, накопившаяся во всем стержне, выразится интегралом от этой величины, охватывающим всю длину стержня

$$U = \int_s \frac{M^2ds}{2EJ} + \int_s \frac{N^2ds}{2EF}. \qquad (24.26)$$

Пользуясь теоремой Кастильяно, мы получим, что производиая этой величины по сосредоточенной силе P даст нам линейное перемещеиие центра тяжести того сечения, где эта сила приложена; точно так же производная от U по моменту M_0 будет равна углу поворота соответствующего сечения:

$$f=\frac{\partial U}{\partial P}=\int\limits_s \frac{M\,ds}{EJ}\cdot\frac{\partial M}{\partial P}+\int\limits_s \frac{N\,ds}{EF}\cdot\frac{\partial N}{\partial P}, \quad (24.27)$$

$$\theta=\frac{\partial U}{\partial M_0}=\int\limits_s \frac{M\,ds}{EJ}\cdot\frac{\partial M}{\partial M_0}+\int\limits_s \frac{N\,ds}{EF}\frac{\partial N}{\partial M_0}. \quad (24.28)$$

Вычисление перемещений в кривом стержне можно производить и при помощи формулы Мора. Тогда выражения (24.27) и (24.28) нужно заменить следующим:

$$\delta=\int\limits_s \frac{M(x)\,M^0 ds}{EJ}+\int\limits_s \frac{N(x)\,N^0 ds}{EJ}. \quad (24.29)$$

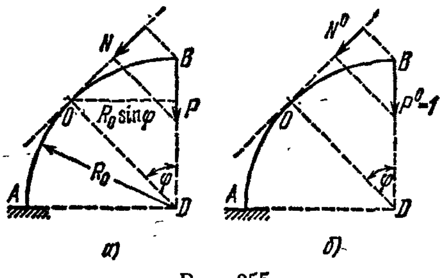


Рис. 355.

Примеиим эту формулу к решению задачи по определению вертикальиого перемещения конца B кривого стержня, ось которого описана раднусом R_0.

Нужио изобразить стержеиь в двух состояниях: а) при загружеиии заданиой нагрузкой — силой P (рис. 355, *а*) и *б*) при загружении единичной силой $P^0=1$, приложенной в сечеиии B и направлениой по линии искомого перемещения (рис. 355, *б*).

Вычислим $M(x)$, M^0, $N(x)$, N^0:

$$M=+PR_0\sin\varphi;\qquad M^0=R_0\sin\varphi;$$
$$N=-P\sin\varphi;\qquad N^0=-\sin\varphi;$$
$$ds=R_0 d\varphi.$$

Подставляя перечисленные величиины в формулу (24.29), получаем

$$f=\frac{1}{EJ}\int\limits_0^{\pi/2} P\sin^2\varphi R_0^3\,d\varphi+\frac{1}{EF}\int\limits_0^{\pi/2} P\sin^2\varphi R_0\,d\varphi=$$

$$=\left[\frac{PR_0^3}{EJ}+\frac{PR_0}{EF}\right]\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,d\varphi=\left[\frac{PR_0^3}{EJ}+\frac{PR_0}{EF}\right]\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{\pi PR_0^3}{4EJ}\left[1+\frac{J}{FR_0^2}\right]=\frac{\pi PR_0^3}{4EJ}\left[1+\frac{i^2}{R_0^2}\right],$$

где i — радиус инерции сечения.

Первое слагаемое в скобках отражает влияние иа прогиб избегающего момента, второе — нормальной силы. Так как в большинстве случаев отношение i^2/R_0^2 — малая величина, то роль нормальной силы при деформации кривых стержней в ряде случаев сравнительио невелика.

Если бы мы хотели найти горизонтальное перемещение точки B, то следовало бы приложить в этой точке горизонтальную силу $P^0=1$. Подобным же образом надо было бы поступить при отыскании угла поворота этого сечения; следует ввести $M^0=1$.

Если при вычислении M и N приходится разбивать стержень на участки, то соответственно этому каждый из интегралов в формулах (24.29) распадается на сумму интегралов с соответственно выбранными пределами.

§ 143. Расчет кругового кольца

Найдем величину внутренних усилий в опасном сечении кругового кольца (рис. 356), находящегося под действием двух растягивающих сил P. Радиус кольца R_0, жесткость EJ. Задача является внешне статически определимой; в отношении же внутренних усилий — задача статически неопределима.

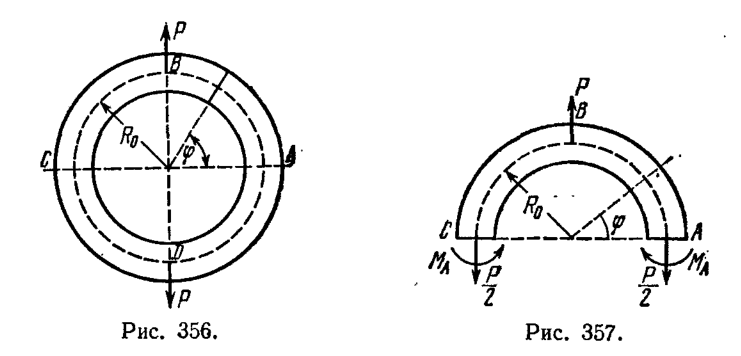


Рис. 356. Рис. 357.

Для решения задачи разрежем кольцо горизонтальным сечением на две части, верхняя из которых показана на рис. 357. По сечениям разреза будут действовать внутренние усилия, передающиеся от нижней, отброшенной части: нормальная сила $N=0{,}5\,P$ и изгибающий момент M_A, направленный нами произвольно, как показано на рисунке; поперечная сила в горизонтальных сечениях отсутствует. Сделав эти заключения из условий симметрии, мы израсходовали все уравнения статики и момент M_A остался единственной неизвестной силой. Проведем теперь текущее сечение под углом φ к плоскости разреза (см. рисунок). В этом сечении будут действовать усилия:

$$M_\varphi = M_A + 0{,}5PR_0\,(1-\cos\varphi), \tag{24.30}$$

$$N_\varphi = 0{,}5P\cos\varphi, \tag{24.31}$$

$$Q_\varphi = 0{,}5P\sin\varphi. \tag{24.32}$$

Углы поворота горизонтальных сечений, где приложены моменты M_A, в силу симметрии равны нулю; следовательно, будет равна нулю и частная производная потенциальной энергии по силе M_A:

$$\frac{\partial U}{\partial M_A} = \frac{1}{EJ}\int\limits_s M_\varphi \frac{\partial M_\varphi}{\partial M_A}\cdot ds = \frac{1}{EJ}\int\limits_0^{\pi/2} [M_A + 0{,}5PR_0\,(1-\cos\varphi)]\cdot 1\cdot R_0\cdot d\varphi = 0.$$

Решим это уравнение

$$\int_0^{\pi/2} (M_A+0{,}5PR_0-0{,}5PR_0\cos\varphi)\,d\varphi = M_A\frac{\pi}{2}+0{,}5PR_0\frac{\pi}{2}-0{,}5PR_0=0,$$

$$M_A=-0{,}5PR_0\left(1-\frac{2}{\pi}\right)=-0{,}182PR_0.$$

Таким образом, момент M_A имеет направление, противоположное указанному на рисунке.

По формулам (24.30) — (24.32) можно вычислить усилия в любом сечении кольца. Наиболее интересным для нас будет сечение B. В этом сечении при $\varphi=\pi/2$ будут действовать

$$M_B=-0{,}182PR_0+0{,}5PR_0=0{,}318PR_0;\quad Q_B=0{,}5P;\quad N_B=0.$$

Следовательно, самым опасным является сечение B, где приложена сила P, хотя нормальная сила в этом сечении и отсутствует.

Предлагается читателям, пользуясь формулами (24.30), (24.32), построить для кольца эпюры изгибающего момента, нормальной и поперечной сил.

Глава XXV
ТОЛСТОСТЕННЫЕ И ТОНКОСТЕННЫЕ СОСУДЫ

§ 144. Расчет толстостенных цилиндров

В тонкостенных цилиндрических резервуарах, подвергнутых внутреннему давлению, вполне возможно при вычислениях считать напряжения равномерно распределенными по толщине стенки (§ 29). Это допущение очень мало отзывается на точности расчета.

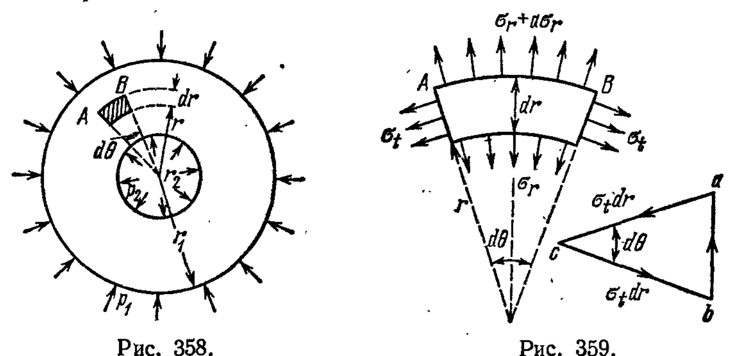


Рис. 358. Рис. 359.

В цилиндрах, у которых толщина стенок не мала по сравнению с радиусом, подобное предположение повело бы к слишком большим погрешностям. Расчет таких цилиндров дан Ляме и Гадолиным в 1852—1854 гг. Работы русского академика А. В. Гадолина в области расчета кривых стержней в применении к расчету прочности артиллерийских орудий создали ему мировую известность. На рис. 358 изображено поперечное сечение толстостенного цилиндра с наружным радиусом r_1, внутренним r_2; цилиндр подвергнут наружному p_1 и внутреннему давлению p_2.

Рассмотрим очень узкое кольцо материала радиусом r внутри стенки цилиндра. Толщину кольца обозначим dr. Пусть AB (рис. 359) изображает небольшую часть этого кольца, соответствующую центральному углу $d\theta$.

Размер выделенного элемента, перпендикулярный к плоскости чертежа, возьмем равным единице. Пусть σ_r и $\sigma_r+d\sigma_r$ будут напряжения, действующие по внутренней и наружной поверхностям элемента AB, а σ_t — напряжения по его боковым граням. По симметрии сечения цилиндра и действующей нагрузки элемент AB перекашиваться не будет, и касательные напряжения по его граням будут отсутствовать. По граням элемента AB, совпадающим с плоскостью чертежа, будет действовать третье главное напряжение σ_z, вызванное давлением на днище цилиндра. Это напряжение можно считать постоянным по поперечному сечению цилиндра.

На элемент AB действуют в плоскости чертежа две силы $\sigma_t dr \cdot 1$, составляющие между собой угол $d\theta$, и радиальная сила, равная

$$(\sigma_r+d\sigma_r)(r+dr)\,d\theta\cdot 1-\sigma_r r\,d\theta\cdot 1.$$

Эта сила направлена в сторону наружной поверхности. Уравновешиваясь, эти три силы составляют замкнутый треугольник abc. Из него следует, что радиальная сила, изображаемая отрезком ab, связана с силой $\sigma_t dr$ (отрезок ca) соотношением

$$\overline{ab}=\overline{ca}\,d\theta,$$

или

$$[(\sigma_r+d\sigma_r)(r+dr)-\sigma_r r]\,d\theta=\sigma_t\,dr\,d\theta;$$

пренебрегая малыми высшего порядка, получаем

$$\sigma_r dr+d\sigma_r r=\sigma_t dr;$$

отсюда

$$\sigma_r-\sigma_t+\frac{d\sigma_r}{dr}r=0. \qquad (25.1)$$

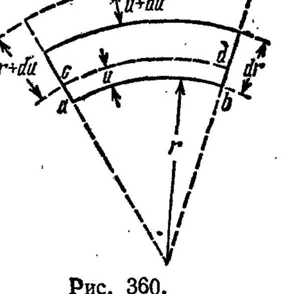


Рис. 360.

Условие равновесия дало только одно уравнение для нахождения двух неизвестных напряжений. Задача статически неопределима, и необходимо обратиться к рассмотрению деформаций.

Деформация цилиндра будет заключаться в его удлинении и в *радиальном* перемещении всех точек его поперечных сечений. Назовем радиальное перемещение точек внутренней поверхности рассматриваемого элемента через u (рис. 360). Точки наружной поверхности переместятся по радиусу на другую величину $u+du$; таким образом, толщина dr выделенного элемента увеличится на du, и относительное удлинение материала в радиальном направлении будет

$$\varepsilon_r=\frac{du}{dr}.$$

В направлении напряжений σ_t относительное удлинение ε_t будет равно относительному удлинению дуги ab, занявшей положение cd; так как относительное удлинение дуги таково же, как относительное удлинение радиуса r, то $\varepsilon_t=u/r$. По закону Гука (формулы (6.21) § 34)

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_r&=\frac{1}{E}[\sigma_r-\mu\sigma_t-\mu\sigma_z]=\frac{du}{dr},\\ \varepsilon_t&=\frac{1}{E}[\sigma_t-\mu\sigma_r-\mu\sigma_z]=\frac{u}{r}.\end{aligned}\right\} \qquad (25.2)$$

Так как ε_t и ε_r определяются одной и той же функцией u, то они связаны условием совместности. Дифференцируем ε_t по r:

$$\varepsilon_t=\frac{u}{r}; \quad \frac{d\varepsilon_t}{dr}=\frac{\frac{du}{dr}r-u}{r^2}=\frac{1}{r}\left(\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}\right)=\frac{1}{r}(\varepsilon_r-\varepsilon_t). \tag{25.3}$$

Это и будет условие совместности деформаций; заменяя в нем значения ε_r и ε_t по (25.2), получим второе уравнение, связывающее σ_t и σ_r:

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{E}[\sigma_t-\mu\sigma_r-\mu\sigma_z]\right\}=\frac{1}{r}\frac{1+\mu}{E}[\sigma_r-\sigma_t],$$

или

$$\frac{d\sigma_t}{dr}-\mu\frac{d\sigma_r}{dr}=\frac{1+\mu}{r}[\sigma_r-\sigma_t]. \tag{25.4}$$

Подставляя в это уравнение значение разности $\sigma_r-\sigma_t$ из (25.1), находим

$$\frac{d\sigma_t}{dr}-\mu\frac{d\sigma_r}{dr}=-(1+\mu)\frac{d\sigma_r}{dr},$$

или

$$\frac{d\sigma_t}{dr}+\frac{d\sigma_r}{dr}=0. \tag{25.5}$$

Для совместного решения уравнений (25.1) и (25.5) продифференцируем первое по r и подставим в него значение $\frac{d\sigma_t}{dr}$ из второго; получим

$$\frac{d\sigma_r}{dr}-\frac{d\sigma_t}{dr}+r\frac{d^2\sigma_r}{dr^2}+\frac{d\sigma_r}{dr}=0;$$

отсюда дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{d\sigma_r}{dr}=0. \tag{25.6}$$

Интеграл этого уравнения будет

$$\sigma_r=A+\frac{B}{r^2}, \tag{25.7}$$

что можно проверить подстановкой.

Постоянные A и B определятся из условий на внутренней и наружной поверхностях цилиндра:

$$(\sigma_r)_{r=r_1}=-p_1; \quad (\sigma_r)_{r=r_2}=-p_2. \tag{25.8}$$

Знак минус в правых частях этих формул поставлен потому, что положительными σ_r мы приняли растягивающие напряжения (рис. 359).

Из условий (25.8) получаем

$$A=\frac{p_2r_2^2-p_1r_1^2}{r_1^2-r_2^2}; \quad B=-\frac{(p_2-p_1)r_1^2r_2^2}{r_1^2-r_2^2}.$$

Пользуясь этими значениями и уравнением (25.7), получаем окончательные формулы для σ_r и σ_t:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{p_2r_2^2-p_1r_1^2}{r_1^2-r_2^2}-\frac{(p_2-p_1)r_1^2r_2^2}{r^2(r_1^2-r_2^2)},\\ \sigma_t&=\frac{p_2r_2^2-p_1r_1^2}{r_1^2-r_2^2}+\frac{(p_2-p_1)r_1^2r_2^2}{r^2(r_1^2-r_2^2)}.\end{aligned}\right\} \tag{25.9}$$

Как видно из этих формул, сумма $\sigma_r+\sigma_t$ не зависит от r, т. е. относительная деформация вдоль оси цилиндра во всех точках сечения одинакова (так как и σ_z одинаково), и сечение остается плоским.

Представляет очень большой практический интерес случай, когда имеет место только одно внутреннее давление p_2; тогда

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_2 r_2^2}{r_1^2-r_2^2}\left[1-\frac{r_1^2}{r^2}\right], \\ \sigma_t &= \frac{p_2 r_2^2}{r_1^2-r_2^2}\left[1+\frac{r_1^2}{r^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{25.10}$$

График, изображающий распределение напряжений по толщине цилиндра в случае $p_1=0$, дан на рис. 361. Так как по абсолютной величине продольное растягивающее напряжение σ_z обычно значительно меньше σ_r и σ_t, то прочность цилиндра определяется этими последними. Применяя третью теорию прочности (наибольших

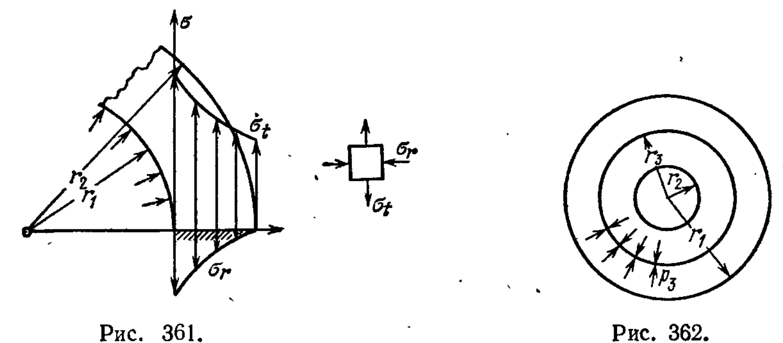


Рис. 361. Рис. 362.

касательных напряжений), получаем, что наибольшая разность главных напряжений, равная (для случая $p_1=0$)

$$(\sigma_t-\sigma_r)_{max}=\frac{2p_2 r_1^2}{r_1^2-r_2^2}, \tag{25.11}$$

будет иметь место в точках внутренней поверхности цилиндра и всегда будет по абсолютной величине значительно больше внутреннего давления.

Таким образом, остаточные деформации появятся прежде всего у внутренней поверхности цилиндра, когда $(\sigma_t-\sigma_r)_{max}$ будет равно пределу текучести материала; борьба с их появлением путем увеличения наружного радиуса r_1 практически безнадежна — с увеличением r_1 растут и числитель, и знаменатель формулы (25.11); поэтому разность главных напряжений $(\sigma_t-\sigma_r)_{max}$ хотя и убывает, но очень медленно. Однако момент появления пластических деформаций у внутренней поверхности цилиндра далеко не соответствует исчерпанию грузоподъемности конструкции; для правильной оценки прочности цилиндра необходимо перейти к расчету по допускаемым нагрузкам.

Упругая грузоподъемность толстостенных цилиндров может быть поднята путем создания начальных напряжений. Для этого необходимо изготовить цилиндр, составленный из двух цилиндров, вставленных один в другой; наружный диаметр внутреннего цилиндра делается несколько больше внутреннего диаметра наружного цилиндра; после надевания наружного цилиндра в нагретом состоянии на внутренний и его остывания по поверхности соприкасания возникнут реакции,

сжимающие внутренний и растягивающие внешний цилиндры. Наличие этих *начальных* напряжений улучшает работу составного цилиндра при внутреннем давлении, как видно из приведенного ниже расчета.

На рис. 362 изображен составной цилиндр после остывания. Напряжения в тангенциальном направлении σ_t будут равны: для наружного цилиндра (растяжение)

$$\sigma_t' = \frac{p_3 r_3^2}{r_1^2 - r_3^2} + \frac{p_3 r_1^2 r_3^2}{r^2 (r_1^2 - r_3^2)},$$

для внутреннего цилиндра (сжатие)

$$\sigma_t'' = -\frac{p_3 r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} - \frac{p_3 r_3^2 r_2^2}{r^2 (r_3^2 - r_2^2)}.$$

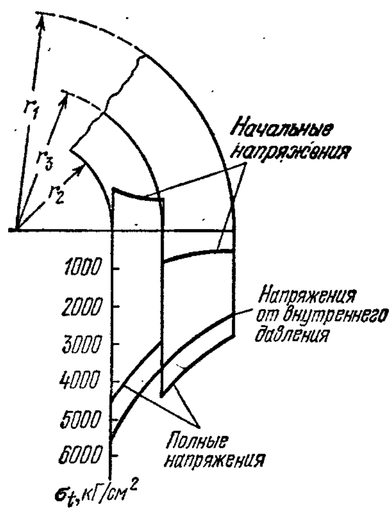


Рис. 363.

На рис. 363 показаны кривые распределения этих начальных напряжений при следующих числовых данных:

$$r_1 = 11{,}50\ см; \quad r_2 = 5{,}70\ см;$$
$$r_3 = 8{,}25\ см; \quad p_3 = 280\ кГ/см^2.$$

Для наружного цилиндра напряжения у наружной поверхности равны

$$\sigma_{t_1}' = +p_3 \frac{2r_3^2}{r_1^2 - r_3^2} = +613\ кГ/см^2;$$

у внутренней поверхности

$$\sigma_{t_3}' = +p_3 \frac{r_1^2 - r_3^2}{r_1^2 - r_3^2} = +895\ кГ/см^2.$$

Для внутреннего цилиндра напряжения у внутренней поверхности равны

$$\sigma_{t_2}'' = -p_3 \frac{2r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} = -1080\ кГ/см^2;$$

у наружной

$$\sigma_{t_3}'' = -p_3 \frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = -800\ кГ/см^2.$$

Предположим теперь, что цилиндр подвергается внутреннему давлению $p_2 = 3400\ кГ/см^2$; тогда распределение напряжений σ_t *без учета начальных усилий* p_3 представится формулой (25.10)

$$\sigma_t = \frac{p_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}\left[1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right].$$

Крайние значения этих напряжений равны

у наружной поверхности $\sigma_{t_1} = +2245\ кГ/см^2$;

у внутренней поверхности $\sigma_{t_2} = +5620\ кГ/см^2$.

Соответствующая кривая изображена на рис. 363. При совместном действии внутреннего давления и начальных усилий напряжения выразятся суммой ординат кривых $\sigma_t + \sigma_t'$ и $\sigma_t + \sigma_t''$; кривая, изображающая эти суммарные напряжения, имеет зубчатое очертание; она тоже представлена на рис. 363.

Вид результирующей кривой показывает, что при наличии начальных усилий p_3 напряжения в наружном цилиндре повышаются, а во внутреннем — понижаются; таким образом, материал работает более равномерно; наибольшее напряжение падает до 5620—1080=+4540 *кГ/см*², а наименьшее повышается до 2245+ +613=2858 *кГ/см*². Конечно, это распределение напряжений имеет место при работе материала в пределах упругости.

Установим, какую разницу в радиусах $\Delta r_3 = r_3'' - r_3'$ надо дать, чтобы осуществить желательное начальное усилие p_3; r_3' — это начальный наружный радиус внутреннего цилиндра, а r_3'' — начальный внутренний радиус наружного цилиндра.

При остывании наружной трубы происходит выравнивание этих радиусов за счет уменьшения r_3'' на $\Delta r_3''$ и увеличения r_3' на $\Delta r_3'$; сумма абсолютных величин этих деформаций должна быть равна Δr_3:

$$|\Delta r_3'| + |\Delta r_3''| = \Delta r_3.$$

Относительное тангенциальное удлинение материала на внутренней поверхности наружного цилиндра равно

$$\varepsilon_t' = \frac{1}{E}\left[\sigma_{t_3}' - \mu\sigma_{r_3}'\right] = \frac{p_3}{E}\left[\frac{r_1^2 + r_3^2}{r_1^2 - r_3^2} + \mu\right];$$

в эту формулу вместо r_3'' подставлена величина общего для обоих цилиндров радиуса $r_3 = r_3'' - \Delta r_3''$, так как $\Delta r_3''$ — *малая* величина и такая замена вводит очень небольшую погрешность. Относительное увеличение радиуса r_3'' будет тоже ε_t'; поэтому

$$\Delta r_3' = \varepsilon_t' r_3 = \frac{p_3 r_3}{E}\left[\frac{r_1^2 + r_3^2}{r_1^2 - r_3^2} + \mu\right].$$

Относительное тангенциальное сжатие материала на наружной поверхности внутренней трубы равно

$$\varepsilon_t'' = \frac{1}{E}\left[\sigma_{t_3}'' - \mu\sigma_{r_3}''\right] = -\frac{p_3}{E}\left[\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - \mu\right];$$

укорочение радиуса r_3' будет равно

$$\Delta r_3'' = -\frac{p_3 r_3}{E}\left[\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - \mu\right].$$

Сумма абсолютных величин $\Delta r_3'$ и $\Delta r_3''$ равна по предыдущему

$$\frac{p_3 r_3}{E}\left[\frac{r_1^2 + r_3^2}{r_1^2 - r_3^2} + \mu\right] + \frac{p_3 r_3}{E}\left[\frac{r_3^2 + r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} - \mu\right] = \frac{2p_3 r_3^3}{E}\,\frac{r_1^2 - r_2^2}{(r_1^2 - r_3^2)(r_3^2 - r_2^2)} = \Delta r_3.$$

Таким образом, чтобы обеспечить наличие принятого нами начального усилия p_3, необходимо дать разницу диаметров Δd_3, равную

$$\Delta d_3 = \frac{4p_3 r_3^3}{E}\,\frac{r_1^2 - r_2^2}{(r_1^2 - r_3^2)(r_3^2 - r_2^2)}.$$

Минимальная температура t^0, до которой надо нагреть наружный цилиндр при надевании его на внутренний, определяется уравнением

$$\alpha_t r_3 t^0 = \Delta r_3,$$

отсюда

$$t^0=\frac{2p_3r_3^2}{E\alpha_t}\,\frac{r_1^2-r_2^2}{(r_1^2-r_3^2)(r_3^2-r_2^2)}=66\,^\circ\text{C}$$

(при наших числовых данных: $\alpha=125\cdot10^{-7}$; $E=2\cdot10^6$ *кГ/см*^{2}; $\Delta d_3=0{,}0137$ *см*).

§ 145. Напряжения в сферических толстостенных сосудах

На рис. 364 изображен элемент, вырезанный из толщи стенки толстостенного сферического сосуда; внутренний радиус этого элемента равен r, а наружный $r+dr$; напряжения, действующие на этот элемент, изображены на чертеже. Составляя уравнения равновесия и совместности, получаем для σ_r и σ_t значения

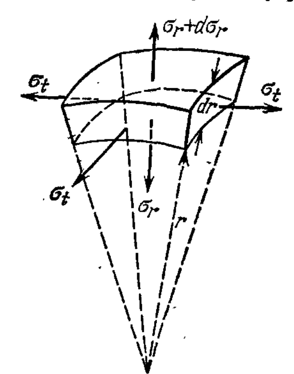


Рис. 364.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=A+\frac{B}{r^3},\\ \sigma_t&=A-\frac{B}{2r^3}.\end{aligned}\right\}\qquad(25.12)$$

Постоянные A и B могут быть определены из условий на внутренней и внешней поверхностях сосуда при

$$r=r_2$$

и

$$r=r_1$$

соответственно, где r_1 и r_2 — наружный и внутренний радиусы.

Так, при действии внешнего p_1 и внутреннего p_2 давлений A и B определяются из условий:

$$\sigma_r=A+\frac{B}{r_2^3}=-p_2 \quad \text{на внутренней поверхности.}$$

$$\sigma_r=A+\frac{B}{r_1^3}=-p_1 \quad \text{на внешней поверхности.}$$

Отсюда

$$B=-(p_2-p_1)\frac{r_1^3r_2^3}{r_1^3-r_2^3},\qquad A=+\frac{p_2r_2^3-p_1r_1^3}{r_1^3-r_2^3}.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=+\frac{p_2r_2^3-p_1r_1^3}{r_1^3-r_2^3}-(p_2-p_1)\frac{r_1^3r_2^3}{r^3(r_1^3-r_2^3)},\\ \sigma_t&=+\frac{p_2r_2^3-p_1r_1^3}{r_1^3-r_2^3}+(p_2-p_1)\frac{r_1^3r_2^3}{2r^3(r_1^3-r_2^3)}.\end{aligned}\right\}\qquad(25.13)$$

§ 146. Расчет тонкостенных сосудов

Если толщина стенок цилиндра $t=r_1-r_2$ мала по сравнению с радиусами r_1 и r_2, то из формулы (25.10) мы получаем

$$\sigma_t=\frac{p_2 r}{t},$$

т. е. величниу, определенную нами раньше (§ 29).

Для тонкостенных резервуаров, имеющих форму поверхностей вращения и находящихся под внутренним давлением p, распределенным симметрично относительно оси вращения, можно вывести общую формулу для вычисления напряжений.

Выделим (рис. 365) из рассматриваемого резервуара элемент двумя смежными меридианальными сечениями и двумя сечениями, нормальными к меридиану. Раз-

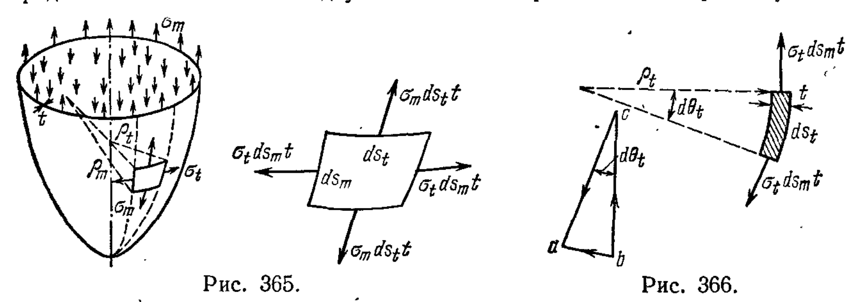


Рис. 365. Рис. 366.

меры элемента по меридиану и по перпендикулярному к нему направлению обозначим соответственно ds_m и ds_t, радиусы кривнзны меридиана и перпендикулярного к нему сечения обозначим ρ_m и ρ_t; толщину стенкн назовем t.

По симметрин по граням выделенного элемента будут действовать только нормальные напряжения σ_m в меридианальном направленни и σ_t в направлении, перпендикулярном к меридиану. Соответствующие усилия, приложениые к граням элемента, будут $\sigma_m ds_t t$ и $\sigma_t ds_m t$. Так как тонкаи оболочка сопротивляется только растяжению, подобно гибкой нитн, то эти усилия будут направлены по касательной к меридиану и к сечению, нормальному к меридиану.

Усилия $\sigma_t ds_m t=ac=bc$ (рис. 366) дадут в нормальном к поверхности элемента иаправлении равнодействующую ab, равную

$$\overline{ab}=\overline{bc}\,d\theta_t=\sigma_t\,ds_m\,t\,\frac{ds_t}{\rho_t}.$$

Подобным же образом усилия $\sigma_m ds_t t$ дадут в том же направлении равнодействующую $\sigma_m\,ds_t\,ds_m\,\frac{t}{\rho_m}$. Сумма этих усилий уравновешивает нормальное давление, приложенное к элементу

$$p\,ds_m\,ds_t=\sigma_m\,ds_t\,ds_m\,\frac{t}{\rho_m}+\sigma_t\,ds_m\,ds_t\,\frac{t}{\rho_t}.$$

Отсюда

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m}+\frac{\sigma_t}{\rho_t}=\frac{p}{t}. \tag{25.14}$$

Это основное уравнение, связывающее напряжение σ_m и σ_t для тонкостенных сосудов вращения, дано Лапласом.

Так как мы *задались* распределением (равномерным) напряжений по толщине стенки, то задача статически определима; второе уравнение равновесия получится если мы рассмотрим равновесие нижней, отрезанной каким-либо параллельным кругом, части резервуара.

Рассмотрим случай гидростатической нагрузки (рис. 367). Меридиональную кривую отнесем к осям x и y с началом координат в вершине кривой. Сечение проведем на уровне y от точки O. Радиус соответствующего параллельного круга будет x.

Каждая пара усилий $\sigma_m ds_t t$, действующих на диаметрально противоположные элементы ds_t проведенного сечения, дает вертикальную равнодействующую bc, равную

$$bc = 2ab\cos\theta = 2\sigma_m\, ds_t\, t\cos\theta;$$

сумма этих усилий, действующих по всей окружности проведенного сечения, равна $2\pi x\sigma_m t\cos\theta$; она будет уравновешивать давление жидкости $p=\gamma(h-y)$ на этом уровне плюс вес жидкости в отрезанной части сосуда P_y:

$$2\pi x\sigma_m t\cos\theta = \pi x^2 p + P_y.$$

Отсюда

$$\sigma_m = \frac{px}{2t\cos\theta} + \frac{P_y}{2\pi x t\cos\theta}. \qquad (25.15)$$

Рис. 367.

Зная уравнение меридиональной кривой, можно найти θ, x и P_y для каждого значения y и, стало быть, найти σ_m, а из уравнения (25.14) и σ_t.

Например, для конического резервуара с углом при вершине 2α, наполненного жидкостью с объемным весом γ на высоту h, будем иметь

$$\rho_m = \infty; \quad x = y\,\mathrm{tg}\,\alpha; \quad P_y = \frac{1}{3}\gamma\pi x^2 y = \frac{1}{3}\gamma\pi y^3\,\mathrm{tg}^2\alpha;$$

$$p = \gamma(h-y); \quad \theta = \alpha; \quad \rho_t = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha};$$

тогда

$$\sigma_m = \frac{\gamma(h-y)\,y\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2t\cos\alpha} + \frac{\gamma\pi y^3\,\mathrm{tg}^2\alpha}{6\pi y\,\mathrm{tg}\,\alpha\, t\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\gamma(h-y)\,y\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2t\cos\alpha} + \frac{\gamma y^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{6t\cos\alpha} = \frac{y\gamma\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2t\cos\alpha}\left[h - \frac{2}{3}y\right];$$

$$\sigma_t = \frac{p\rho_t}{t} = \frac{\gamma(h-y)\,y\,\mathrm{tg}\,\alpha}{t\cos\alpha}.$$

Для сферического сосуда радиусом r_0, находящегося под внутренним давлением p_0, по симметрии $\sigma_t=\sigma_m=\sigma$; тогда из уравнения (25.14), так как

$$\rho_m = \rho_t = r_0,$$

$$\frac{2\sigma}{r_0} = \frac{p_0}{t} \quad \text{и} \quad \sigma = p_0\frac{r_0}{2t}.$$

Если меридианальная кривая будет иметь переломы с разрывом непрерывности угла θ, то равновесие тонкой оболочки у места перелома может быть обеспечено лишь наличием реакций, приложенных к оболочке по окружности в этом месте. Появление таких реакций обеспечивается устройством специальных колец, способных брать на себя усилия, возникающие в них в связи с неуравновешенностью напряжений σ_m по обе стороны точки перелома.

Глава XXVI

РАСЧЕТ ПО ДОПУСКАЕМЫМ НАГРУЗКАМ. ПОНЯТИЕ О РАСЧЕТЕ ПО ПРЕДЕЛЬНЫМ СОСТОЯНИЯМ

§ 147. Понятие о расчете по допускаемым нагрузкам. Применение к статически определимым системам

В предыдущем изложении методов расчета на растяжение и сжатие как статически определимых, так и неопределимых конструкций мы исходили (§§ 4 и 18) из основного условия прочности $\sigma_{max} \leqslant [\sigma]$. Это неравенство требует выбора размеров конструкции с таким расчетом, чтобы наибольшее *напряжение* в самом опасном месте не превосходило допускаемого.

Но можно стать и на другую точку зрения (§ 4). Можно задать условие, чтобы действительная *нагрузка* на всю конструкцию не превосходила некоторой допускаемой величины. Условие это можно выразить таким неравенством:

$$P_{max} \leqslant [P].$$

За допускаемую нагрузку надо выбрать некоторую $1/k$ часть той нагрузки, при которой конструкция перестанет функционировать правильно, перестанет выполнять свое назначение. Такая нагрузка обычно называется *предельной*, иногда — *разрушающей* в широком смысле слова (под разрушением конструкции подразумевают прекращение ее нормальной работы).

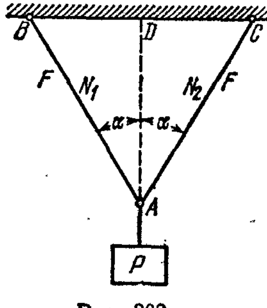


Рис. 368.

В качестве примера возьмем систему из двух стальных стержней AB и AC (рис. 368), нагруженных силой P. Рассчитывая эту систему *обычным* путем, найдем усилия $N_1 = N_2$ по формуле

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2\cos\alpha} = N$$

(из равновесия узла A). Отсюда площадь каждого из стержней равна

$$F \geqslant \frac{N}{[\sigma]} = \frac{P}{2[\sigma]\cos\alpha}.$$

По *способу допускаемых нагрузок* имеем

$$P \leqslant [P].$$

Введя в качестве коэффициента запаса для конструкции в целом ту же величину k, которая была принята в качестве коэффициента запаса для напряжений, мы получим, что величина $[P]=P_{пр}/k$. Предельной, опасной величиной $P_{пр}$ будет та, при которой напряжения в стержнях дойдут до предела текучести:

$$P_{пр} = 2F\sigma_т \cos\alpha. \tag{a}$$

Таким образом, допускаемая величина P равна

$$[P] = \frac{2F\sigma_т \cos\alpha}{k}.$$

Условие прочности (а) принимает вид

$$P \leqslant \frac{2F\sigma_т \cos\alpha}{k},$$

а учитывая, что $\sigma_т/k=[\sigma]$, получаем

$$P \leqslant 2F[\sigma] \cos\alpha.$$

Отсюда

$$F \geqslant \frac{P}{2[\sigma]\cos\alpha}.$$

Мы видим, что расчет по допускаемым нагрузкам привел в данном случае к тем же результатам, что и расчет по допускаемым напряжениям. Это всегда имеет место для статически определимых конструкций при равномерном распределении напряжений, когда материал по всему сечению используется полностью.

§ 148. Расчет статически неопределимых систем при растяжении и сжатии по способу допускаемых нагрузок

Совсем другие результаты мы получим, если будем применять способ допускаемых нагрузок к статически неопределимым системам, стержни которых изготовлены из материала, обладающего способностью к большим пластическим деформациям, например из малоуглеродистой стали.

В качестве примера рассмотрим систему из трех стержней, нагруженных силой Q (рис. 369). Пусть все стержни сделаны из малоуглеродистой стали с пределом текучести $\sigma_т$. Длины крайних стержней обозначим l_1, длину среднего l_3. Допускаемое напряжение $[\sigma]=\sigma_т/k$. Как и в § 18, при расчете этой статически неопределимой системы зададимся отношением площадей стержней; примем, что все три стержня имеют одинаковую площадь F. Тогда, решая эту

задачу так, как это указано в § 18, получим

$$N_3=\frac{Q}{1+2\cos^3\alpha};\quad N_1=\frac{Q\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}=N_2.$$

Так как $N_3>N_1$, средний стержень напряжен больше, чем крайние; поэтому подбор площади сечения F надо произвести по формуле

$$F\geqslant\frac{N_3}{[\sigma]}=\frac{Q}{(1+2\cos^3\alpha)[\sigma]}.$$

Ту же величину площади надо дать и боковым стержням; в них получается некоторый дополнительный запас.

Применим способ допускаемых нагрузок; условием прочности будет

$$Q\leqslant Q_{\text{доп}}=\frac{Q_{\text{пр}}}{k}.$$

Что в данном случае следует понимать под предельной нагрузкой конструкции? Так как конструкция выполнена из материала, имеющего площадку текучести, то, по аналогии с простым растяжением стержня из такого материала, за предельную нагрузку следует взять груз, соответствующий достижению состояния текучести *для всей конструкции в целом*. Назовем эту нагрузку $Q_т^к$. Пока сила Q не достигла этого значения, для дальнейшей деформации (опускания точки A) требуется возрастание нагрузки. Когда же Q сделается равным $Q_т^к$, дальнейший рост деформации будет происходить уже без увеличения нагрузки,— конструкция выйдет из строя.

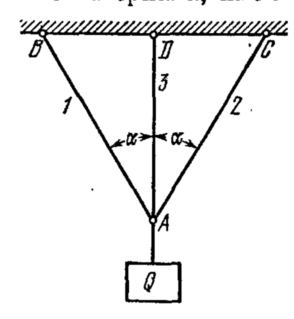


Рис. 369.

Для определения величины $Q_т^к$ рассмотрим постепенный ход деформации нашей стержневой системы. Так как средний стержень напряжен сильнее крайних, то в нем раньше, чем в других, напряжение дойдет до предела текучести. Нагрузку, соответствующую этому моменту, обозначим $Q_т$; она будет равна

$$Q_т=(1+2\cos^3\alpha)N_3^т,$$

где $N_3^т=F\sigma_т$ — усилие в среднем стержне, соответствующее его пределу текучести.

Напряжения в крайних стержнях, имеющих ту же площадь, в этот момент еще не дойдут до предела текучести, и эти стержни будут упруго сопротивляться дальнейшей деформации. Для того чтобы эта деформация происходила, необходимо дальнейшее увеличение нагрузки до тех пор, пока в *крайних* стержнях напряжения тоже не дойдут до предела текучести. Лишь тогда будет достигнута предельная грузоподъемность конструкции $Q_т^к$.

Так как при нагрузке $Q_т$ напряжения в среднем стержне дойдут уже до предела текучести $\sigma_т$, то при дальнейшем возрастании груза они, а стало быть и усилие N_3, *останутся без увеличения.* Наша статически неопределимая система превратится в статически определимую, состоящую из двух стержней AB и AC и нагруженную в точке A силой Q, направленной вниз, и *известным* усилием $N_3^т$, равным $F\sigma_т$

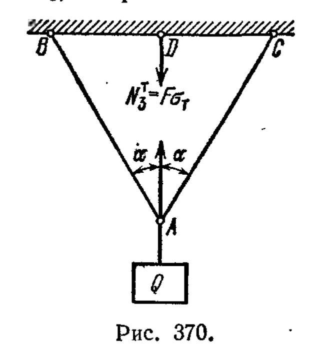


Рис. 370.

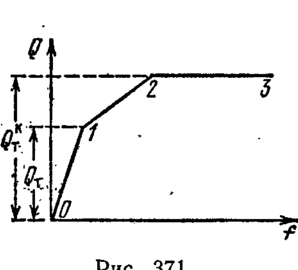


Рис. 371.

(рис. 370). Такая схема работы нашей конструкции будет иметь место, пока

$$Q_т \leqslant Q \leqslant Q_т^к.$$

Для иллюстрации хода деформации рассматриваемой конструкции изобразим графически зависимость между силой Q и перемещением f точки A (рис. 371). Пока $Q \leqslant Q_т$, опускание точки A равно удлинению среднего стержня и определяется формулой

$$f_{01} = \Delta l_3 = \frac{Q l_3}{(1+2\cos^3\alpha)EF}.$$

Как только Q будет заключаться в промежутке $Q_т \leqslant Q \leqslant Q_т^к$, перемещение точки A должно быть вычислено, как опускание этого узла в системе двух стержней AC и AB, нагруженных в точке A, силой $(Q - F\sigma_т)$. Из § 18 мы знаем, что это опускание равно

$$f = \frac{\Delta l_1}{\cos\alpha};$$

в свою очередь

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF}; \quad N_1 = \frac{Q - F\sigma_т}{2\cos\alpha}.$$

Отсюда

$$\Delta l_1 = \frac{(Q - F\sigma_т)\, l_1}{2EF\cos\alpha}; \quad f_{12} = \frac{(Q - F\sigma_т)\, l_1}{2EF\cos^2\alpha} = \frac{(Q - F\sigma_т)\, l_3}{2EF\cos^3\alpha}.$$

Для f_{12} (на втором участке) получаем уравнение прямой, но уже не проходящей через начало координат. После достижения нагрузкой Q значения $Q_т^к$ напряжения в крайних стержнях достигнут пре-

дела текучести, и система будет деформироваться без увеличения нагрузки. График перемещения идет теперь параллельно оси абсцисс.

Для определения предельной грузоподъемности всей системы $Q_т^к$ мы должны для системы двух стержней, нагруженных силой $(Q-F\sigma_т)$, найти то значение Q, при котором напряжения и в крайних стержнях дойдут до предела текучести. Такая задача решена в предыдущем параграфе; подставляя в выражение (а) § 147 вместо P величину $Q-F\sigma_т$, получаем

$$(Q-F\sigma_т)_{пр}=Q_т^к-F\sigma_т=2F\sigma_т\cos\alpha.$$

Отсюда

$$Q_т^к=F\sigma_т(1+2\cos\alpha).$$

Допускаемая нагрузка будет равна

$$[Q]=\frac{Q_т^к}{k}=\frac{F\sigma_т(1+2\cos\alpha)}{k},$$

а учитывая, что $\sigma_т/k=[\sigma]$, получаем

$$[Q]=F[\sigma](1+2\cos\alpha).$$

Окончательно:

$$Q\leqslant[Q]=F[\sigma](1+2\cos\alpha) \quad и \quad F\geqslant\frac{Q}{[\sigma](1+2\cos\alpha)}.$$

Эта величина меньше, чем полученная обычным методом расчета, т. е.

$$\frac{Q}{[\sigma](1+2\cos^3\alpha)}.$$

При $Q=4\ T$, $\alpha=30°$, $[\sigma_c]=1000\ кГ/см^2$ (сталь) получаем по обычному способу

$$F=\frac{4000}{1000(1+2\cos^3 30°)}=1,74\ см^2;$$

по способу допускаемых нагрузок

$$F=\frac{4000}{1000(1+2\cos 30°)}=1,46\ см^2.$$

Таким образом, метод расчета по допускаемым нагрузкам позволяет спроектировать статически неопределимую систему из материала, обладающего площадкой текучести, *экономичнее*, чем при расчете по допускаемым напряжениям. Это понятно: при способе расчета по допускаемым напряжениям мы считали за предельную нагрузку нашей конструкции величину $Q_т$, при которой до предела текучести доходил лишь материал среднего стержня, крайние же были недонапряжены. При методе расчета по допускаемым нагрузкам предельная грузоподъемность определяется величиной $Q_т^к>Q_т$. При нагрузке $Q_т^к$ полностью используется материал всех трех стержней.

Следовательно, новый метод расчета позволяет реализовать скрытые при старом способе запасы прочности в статически неопределимых системах, добиться повышения их *расчетной* грузоподъемности и *действительной равнопрочности* всех частей конструкции. Не представит никаких затруднений распространить этот метод на случай, когда соотношение площадей среднего и крайних стержней не будет равно единице.

Изложенные выше теоретические соображения проверялись неоднократно на опыте, причем всегда наблюдалась достаточно близкая сходимость величин предельной нагрузки — вычисленной и определенной при эксперименте. Это дает уверенность в правильности теоретических предпосылок метода допускаемых нагрузок.

§ 149. Определение предельной грузоподъемности скручиваемого стержня

Способ расчета по допускаемым нагрузкам может быть применен и при кручении. Как было изложено в § 148, при растяжении и сжатии этот способ дает результат, отличающийся от такового при расчете по допускаемым напряжениям только в случае статически неопределимой системы стержней, так как в каждом стержне напряжения по поперечному сечению распределяются равномерно. Иное дело при кручении. Напряжения в поперечном сечении распределены неравномерно.

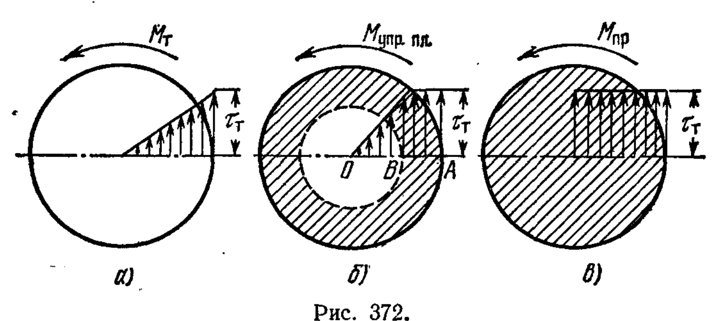


Рис. 372.

В § 49 было показано, что мы определяли необходимые размеры скручиваемого стержня, выполняя условие, чтобы *наибольшие* касательные напряжения в точках у контура поперечного сечения не превысили допускаемого напряжения $[\tau]$. Таким образом, не считаясь с неравномерностью в распределении напряжений по сечению, мы вели расчет по допускаемым напряжениям.

В этом способе расчета, так же как и при решении статически неопределимых систем при растяжении и сжатии, мы не используем полностью предельной грузоподъемности стержня. В § 49 мы счи-

тали опасным то состояние стержня, при котором лишь в контурных точках сечения напряжения достигнут предела текучести материала (стали) при сдвиге $\tau_т$ (рис. 372, *а*). Величина $\tau_т$ по энергетической теории должна быть равна 0,6 $\sigma_т$. Крутящий момент будет равен

$$M_т = \frac{\pi r^3 \tau_т}{2},$$

а угол закручивания

$$\varphi_т = \frac{M_т l}{GJ_р} = \frac{\pi r^3 \tau_т l}{2G\frac{\pi r^4}{2}} = \frac{\tau_т l}{Gr}.$$

Для дальнейшего увеличения угла закручивания необходимо возрастание крутящего момента, так как материал внутри стержня находится еще в упругом состоянии. При увеличении деформации рост напряжения у краев сечения остановится (явление текучести), и при некотором $M > M_т$ распределение напряжений будет соответствовать графику, изображенному на рис. 372, *б*. Внутри незаштрихованного круга радиуса *OB* материал будет по-прежнему в упругом состоянии.

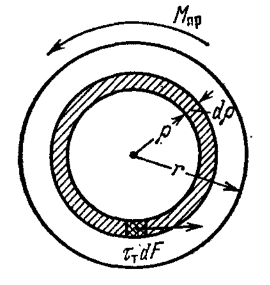


Рис. 373.

Предельным состоянием, соответствующим полному исчерпанию грузоподъемности стержня, будет то распределение напряжений, когда упругая зона исчезнет,— по всему сечению напряжения будут равны пределу текучести $\tau_т$ (рис. 372, *в*)[1]).

Крутящий момент $M_{пр}$ в этом случае можно вычислить, составляя сумму всех внутренних сил относительно центра круга. Для этого разобьем площадь нашего сечения концентрическими кругами на бесконечно малые (кольцевые) площадки.

Напряжения, действующие на каждую такую площадку, в предельном состоянии имеют постоянное значение и равны $\tau_т$ (рис. 372, *в*). Внутренние усилия, приложенные к элементарной площадке радиуса ρ, будут равны (рис. 373) $\tau_т \cdot dF$, а момент внутреннего усилия $\tau_т \cdot dF \cdot \rho$. Суммируя элементарные моменты внутренних сил по площади кольца, получим

$$dM_{вн} = \tau_т \rho \sum dF = \tau_т \rho 2\pi\rho\, d\rho.$$

Составим теперь выражение для предельного крутящего момента:

$$M_{пр} = \int_0^r 2\pi\tau_т \rho^2 d\rho = 0.$$

---

[1]) Эта схема работы сечения в предельном состоянии является лишь приближенной. В действительности, в центре вала напряжения растут не скачком, хотя и очень резко, и на поверхности не остаютси равными $\tau_т$, а возрастают вследствие упрочнения материала.

Отсюда

$$M_{пр}=\frac{2}{3}\pi r^3\tau_т. \tag{26.1}$$

Допускаемый крутящий момент при коэффициенте запаса k будет равен

$$[M_к]=\frac{M_{пр}}{k}=\frac{2\pi}{3}r^3\frac{\tau_т}{k}=\frac{2\pi}{3}r^3[\tau], \tag{26.2}$$

откуда

$$r\geqslant\sqrt[3]{\frac{3M_к}{2\pi[\tau]}};$$

в то же время по обычному расчету мы имеем (см. § 50)

$$r\geqslant\sqrt[3]{\frac{2M_к}{\pi[\tau]}}.$$

В результате переход к расчету по допускаемым нагрузкам позволяет уменьшить диаметр вала в отношении

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2\cdot 2}}=0,91.$$

Таким образом, вследствие *неравномерного* распределения напряжений по сечению при упругом состоянии стержня переход к методу расчета по допускаемым нагрузкам может дать экономию материала.

Надо, однако, помнить, что приведенный расчет мог бы иметь силу лишь при статической нагрузке, когда опасным состоянием является состояние текучести материала. Скручиваемые же стержни, валы, в подавляющем большинстве случаев работают на переменную нагрузку в условиях, когда проверка прочности должна производиться из расчета на возможность появления трещин усталости. Поэтому применение изложенного способа к валам, по-видимому, в большинстве случаев невозможно. Иначе будет обстоять дело, как увидим дальше, при расчете балок на изгиб.

Приведенный результат интересен потому, что дает возможность проверить его на опыте. Опыты показали, что величина напряжения $\tau_т$, получаемого из формулы (26.1), по предельному моменту, найденному экспериментально, достаточно близка к 0,6 $\sigma_т$, что и следует ожидать на основании энергетической теории прочности.

§ 150. Подбор сечения балок по допускаемым нагрузкам

На примере скручиваемого стержня мы видели, что при *неравномерном* распределении напряжений по сечению метод подбора размеров сечения по допускаемым нагрузкам дает иной результат, чем по допускаемым напряжениям. Подобный же случай мы имеем и при изгибе.

В методе расчета по допускаемым напряжениям мы пользовались для подбора сечения балок условием

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W}\leqslant[\sigma].$$

Здесь [σ] для материалов, имеющих площадку текучести (малоуглеродистая сталь), было равно

$$[\sigma]=\frac{\sigma_т}{k_т},$$

где $\sigma_т$ — предел текучести, а $k_т$ — соответствующий коэффициент запаса.

Таким образом, *опасным* мы представляем себе здесь то состояние, когда *наибольшее напряжение* в опасном сечении балки дойдет до предела текучести. Изгибающий момент при этом состоянии назовем

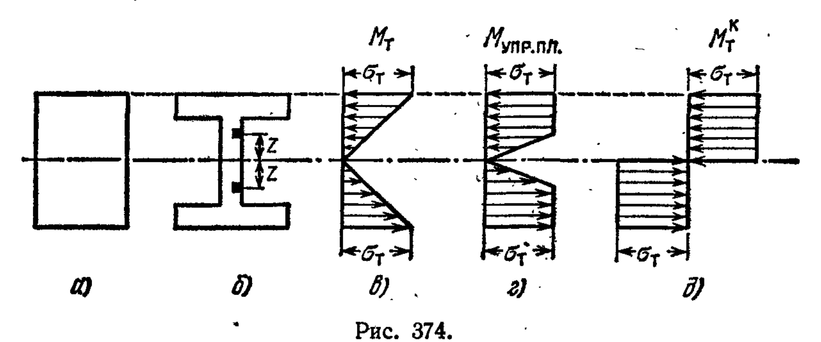


Рис. 374.

$M_т$; он соответствует достижению грузоподъемности *материала* в наиболее напряженных волокнах опасного сечения балки. Однако этому состоянию не будет отвечать исчерпание грузоподъемности всей балки, как конструкции.

Возьмем стальную балку симметричного (например, прямоугольного или двутаврового) сечения (рис. 374, *а* и *б*). При моменте, равном $M_т$, распределение напряжений в опасном сечении показано на рис. 374, *в*; напряжение дошло до предела текучести лишь в крайних волокнах, вся же остальная часть балки находится в упругом состоянии. Поэтому для дальнейшей деформации балки необходимо новое увеличение нагрузки и изгибающего момента: грузоподъемность балки еще не исчерпана.

При увеличении момента зона текучести будет распространяться внутрь балки, эпюра напряжений примет вид, показанный на рис. 374, *г*, и в пределе, когда материал по всей высоте сечения потечет и грузоподъемность балки будет полностью исчерпана, эпюра напряжений примет форму двух прямоугольников (рис. 374, *д*). Изгибающий момент на этой стадии работы балки и будет предельным,

разрушающим для балки в целом. Дальнейшее перемещение оси балки пойдет уже без увеличения момента; в опасном сечении образуется так называемый *пластический шарнир.*

Определим величину этого предельного момента $M_т^к$. Он будет равен сумме моментов относительно нейтральной оси внутренних усилий (рис. 374, *д*). На площадку dF на расстоянии z от нейтральной оси будет действовать сила $\sigma_т dF$; момент этой силы относительно нейтральной оси равен $\sigma_т dF \cdot z$. По симметрии сечения достаточно вычислить сумму моментов этих сил для верхней или нижней половины сечения и результат удвоить; тогда

$$M_т^к = 2 \int_{F/2} \sigma_т z\, dF,$$

где F — площадь всего сечения. Так как $\sigma_т$ постоянно для всех точек сечения, то

$$M_т^к = 2\sigma_т \int_{F/2} z\, dF = 2\sigma_т S_{max},$$

поскольку интеграл

$$\int_{F/2} z\, dF = S_{max}$$

представляет собой статический момент половины сечения относительно нейтральной оси.

Условие прочности имеет вид

$$M_{max} \leqslant [M];$$

при коэффициенте запаса $k_т$ получим

$$[M] = \frac{M_т^к}{k_т} = \frac{2S_{max}\sigma_т}{k_т} = 2S_{max}[\sigma].$$

Тогда условием прочности будет

$$M_{max} \leqslant 2S_{max}[\sigma] \quad \text{и} \quad 2S_{max} \geqslant \frac{M_{max}}{[\sigma]}. \tag{26.3}$$

Следовательно, при расчете по допускаемым нагрузкам вместо подбора сечения симметричной балки по ее моменту сопротивления приходится подбирать размеры по величине удвоенного статического момента полусечения балки. Для прямоугольного сечения высотой h и шириной b

$$2S_{max} = 2b\frac{h}{2}\frac{h}{4} = \frac{bh^2}{4} = 1{,}5\frac{bh^2}{6} = 1{,}5W.$$

Подставляя это значение в формулу (26.3), получаем

$$W \geqslant \frac{M_{max}}{1{,}5[\sigma]}.$$

Таким образом, при расчете по допускаемым нагрузкам необходимый момент сопротивления балки прямоугольного сечения получается в 1,5 раза меньшим, чем при расчете по допускаемым напряжениям.

Можно для любого симметричного сечения представить величину $2S_{max}$ как произведение момента сопротивления на некоторый коэффициент n, зависящий от формы сечения:

$$2S_{max}=nW;$$

тогда формула (26.3) примет вид

$$W \geqslant \frac{M_{max}}{n[\sigma]}. \qquad (26.4)$$

Для прямоугольника $n=1,5$; для двутавровых сечений нашего сортамента n колеблется от 1,15 до 1,17; в среднем можно принять $n=1,16$. Следовательно, переход на метод расчета по допускаемым нагрузкам для стальных балок наиболее употребительного профиля может дать возможность поднять грузоподъемность на 16%, что равносильно повышению допускаемых напряжений. Такое повышение допускаемых напряжений потребует более тщательного исследования (при проверке прочности) запаса против других возможных видов разрушения балки.

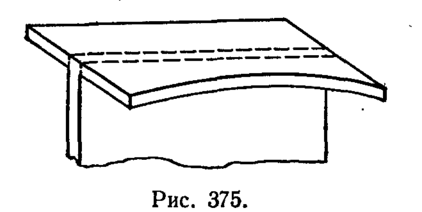


Рис. 375.

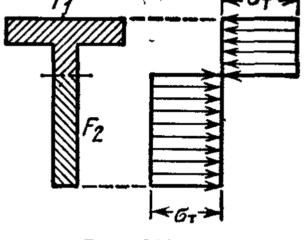


Рис. 376.

Опыт показывает, что стальные двутаврового профиля балки никогда не могут быть разрушены только в результате наступления текучести по всему сечению. Чаще наблюдается потеря устойчивости пояса (рис. 375) или устойчивости стенки. Таким образом, повышение допускаемых напряжений, к которому сводится в данном случае применение метода расчета по допускаемым нагрузкам, требует особого внимания к проверкам устойчивости элементов балок.

При действии повторной нагрузки следует иметь в виду возможность разрушения материала за счет развития трещин усталости. Это требует дополнительной проверки прочности для предотвращения подобного вида разрушения конструкции.

Для балок, сечения которых имеют лишь одну ось симметрии, например балок таврового профиля, расчет по допускаемым нагрузкам несколько осложняется.

На рис. 376 изображены сечение такой балки и эпюра распределения нормальных напряжений при исчерпании грузоподъемности балки. Здесь надо сначала определить положение нейтральной оси; в рассматриваемой стадии работы балки *эта ось уже не проходит через центр тяжести сечения.*

Обозначим площадь сжатой части сечения F_1, а растянутой F_2. Условие равенства между собой сумм растягивающих и сжимающих напряжений дает

$$\sigma_т F_1 = \sigma_т F_2, \quad \text{или} \quad F_1 = F_2.$$

Нейтральная ось делит площадь сечения на две равновеликие части. При изгибе в пределах упругости это же условие привело нас к равенству статических моментов сжатой и растянутой части сечения, в силу чего нейтральная ось проходила через центр тяжести сечения. Здесь же она делит площадь сечения пополам.

Найдя положение нейтральной оси, определяем величину

$$[M] = \frac{\sigma_т (S_1 + S_2)}{k_т},$$

где S_1 и S_2— статические моменты верхней и нижней половин площади сечения относительно нейтральной оси. Условие прочности принимает вид

$$(S_1 + S_2) \geqslant \frac{M_{max}}{[\sigma]}. \qquad (26.5)$$

Изложенные соображения относятся к случаю чистого изгиба; наличие поперечных сил несколько усложняет расчет.

§ 151. Расчет статически неопределимых балок по допускаемым нагрузкам. Общие понятия. Расчет двухпролетной балки

Как было установлено в предыдущем параграфе, для выхода из строя статически определимой балки необходимо образование пластического шарнира.

В статически неопределимой балке образование одного пластического шарнира недостаточно для исчерпания грузоподъемности балки; для этого необходимо появление еще по крайней мере одного пластического шарнира. Покажем это на примере.

Рассмотрим двухпролетную неразрезную балку постоянного сечения (рис. 377, *а*); эпюра моментов для нее *при упругой работе* (рис. 377, *б*) представляет собой разность эпюр от груза P и от опорного момента $M_1 = -\frac{3}{32} Pl$. Пунктиром показано графическое вычитание эпюр. Результирующая эпюра заштрихована. Наиболее напряженными являются сечения под грузом с моментом $M_P =$

$=\frac{Pl}{4}-\frac{3}{64}Pl=\frac{13}{64}Pl$ и на средней опоре с моментом $M_1=\left|\frac{3}{32}Pl\right|<\frac{13}{64}Pl$. При возрастании нагрузки напряжение дойдет до предела текучести $\sigma_т$ прежде всего в крайних волокнах сечения под

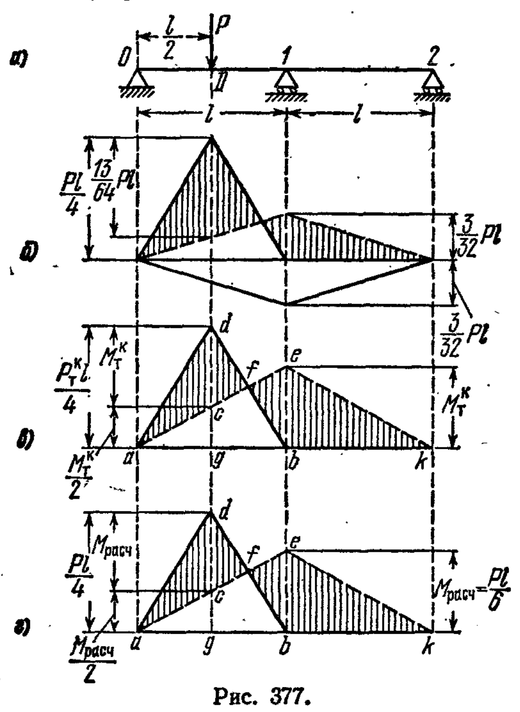


Рис. 377.

грузом при величине силы $P_т$, определяемой уравнением

$$\frac{13P_т l}{64W}=\sigma_т, \quad \text{откуда} \quad P_т=\frac{64W\sigma_т}{13l}.$$

При дальнейшем увеличении нагрузки в этом сечении образуется пластический «шарнир», когда изгибающий момент (§ 150) станет равным

$$M_т^к=2\sigma_т S_{max}=\sigma_т n W.$$

Однако при такой нагрузке балка не утратит грузоподъемности. Она обратится в статически определимую систему с шарниром в точке D, через который передается момент $M_т^к$ (рис. 378); такая балка способна принять и дальнейшее увеличение нагрузки. При этом увеличении момент в сечении D остается постоянным, а момент над опорой будет увеличиваться, пока не дойдет тоже до величины $M_т^к$;

в опорном сечении образуется второй пластический шарнир, левый пролет обратится в подвижную систему, и грузоподъемность балки будет исчерпана при нагрузке $P_т^к$. Эпюра моментов для этого состояния балки показана на рис. 377, *в* — это будет эпюра разрушающих моментов. Она представляет собой разность ординат треугольника *adb* с наибольшей ординатой под грузом $P_т^к l/4$ и ординат треугольника *aek* с ординатой на опоре *1* $M_т^к$ и под грузом $M_т^к/2$. Величина разрушающего груза $P_т^к$ определяется из условия, что отрезок *cd*, равный $P_т^к l/4 - M_т^к/2$, тоже должен быть равен $M_т^к$:

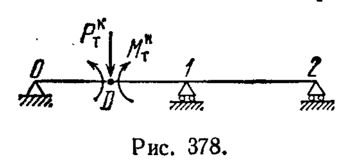


Рис. 378.

$$\frac{P_т^к l}{4} - \frac{M_т^к}{2} = M_т^к.$$

Отсюда

$$M_т^к = \frac{P_т^к l}{6} = nW\sigma_т \quad \text{и} \quad P_т^к = \frac{6M_т^к}{l} = \frac{6nW\sigma_т}{l}. \tag{26.6}$$

Условие прочности имеет вид (§ 147)

$$P \leqslant [P], \tag{26.7}$$

где P — заданная, а $[P]$ — допускаемая нагрузки.

Для получения $[P]$ делим обе части равенства (26.6) на коэффициент запаса k:

$$[P] = \frac{P_т^к}{k} = \frac{6M_т^к}{kl} = \frac{6nW\sigma_т}{kl} = \frac{6nW[\sigma]}{l}. \tag{26.8}$$

Подставляя это значение $[P]$ в (26.7), получаем

$$P \leqslant \frac{6nW[\sigma]}{l}.$$

Отсюда

$$W \geqslant \frac{Pl}{6n[\sigma]} = \frac{M_{расч}}{n[\sigma]}, \tag{26.9}$$

где $M_{расч} = Pl/6$ — расчетный изгибающий момент в сечениях *1* и *D*. Таким образом, подбор сечения балки в этом примере следует вести по расчетному моменту $M_{расч} = Pl/6$ и по допускаемому напряжению $n[\sigma]$.

Как видно из формул для $M_{расч} = Pl/6$ и $M_т^к = P_т^к l/6$, ординаты эпюры расчетных моментов (рис. 377, *г*) пропорциональны ординатам эпюры разрушающих моментов и получаются из них заменой разрушающего груза $P_т^к$ действующей нагрузкой P.

Если вести расчет по допускаемым напряжениям, то расчетный момент следовало бы взять (по рис. 377, *б*) $M_{max} = \frac{13}{64}Pl > \frac{Pl}{6}$, а за допускаемое напряжение — $[\sigma]$. Таким образом, для статиче-

ски неопределимых балок переход на расчет по допускаемым нагрузкам дает двойную выгоду — повышается, как и для статически определимых балок, допускаемое напряжение и *видоизменяется* расчетная эпюра изгибающего момента в сторону снижения ее ординат.

Полное повышение расчетной грузоподъемности характеризуется отношением

$$\frac{P_т^к}{P_т} = \frac{6n\sigma_т W\cdot 13l}{l\cdot 64W\sigma_т} = \frac{78}{64}n.$$

Принимая $n=1{,}16$ (для двутавровых балок, § 150), получаем, что *расчетная* грузоподъемность балки возрастет при переходе на новый метод расчета в 1,40 раза, т. е. на 40%.

В рассмотренном примере расчетная эпюра моментов (рис. 377, *в*) характеризовалась равенством изгибающих моментов в двух наиболее напряженных сечениях. Поэтому этот способ расчета при балке постоянного сечения иногда называют способом *уравнивания* моментов.

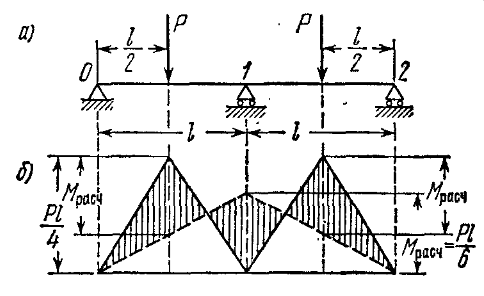


Рис. 379.

Имея это в виду, мы могли построить расчетную (по допускаемым нагрузкам) эпюру моментов графически: сначала изобразить эпюру от груза P для разрезной балки (*adb*), а затем построить линию опорных моментов *aek* так, чтобы $be=cd$; для этого следует разделить отрезок *db* пополам в точке *f* и провести прямую *afe*.

Если бы к рассмотренной балке был приложен еще груз P по середине второго пролета, то *расчетная* эпюра моментов (рис. 379) не измеиилась бы, т. е. добавление этого груза не потребовало бы усиления балки. Изменился бы лишь порядок появления пластических шарниров: сначала такой шарнир образовался бы в сечении над средней опорой, а уже потом — под обоими грузами.

§ 152. Расчет трехпролетной балки

Рассмотрим теперь балку, имеющую и средний промежуточный пролет (рис. 380, *а*). Эпюра моментов для этой балки при упругой работе изображена на рис. 380, *б*. При постепенном возрастании нагрузки пластические шарниры образуются сначала над средней опорой *1* и по середине (приблизительио) среднего пролета (рис. 380, *в*); однако балка сможет и дальше воспринимать увеличе-

ние нагрузки, пока не образуется третий шарнир на опоре 2. Выравненная эпюра разрушающих моментов показана на рис. 380, *г*. Предельный момент равен

$$M_{т}^{к}=\frac{1}{2}\frac{q_{т}^{к}l^{2}}{8}=\frac{q_{т}^{к}l^{2}}{16}$$

и расчетный

$$M_{расч}=\frac{ql^{2}}{16}.$$

Необходимый момент сопротивления равен

$$W\geqslant\frac{M_{расч}}{n[\sigma]}=\frac{ql^{2}}{16n[\sigma]}.$$

Таким образом, для возможности разрушения промежуточного пролета должны образоваться три пластических шарнира, моменты

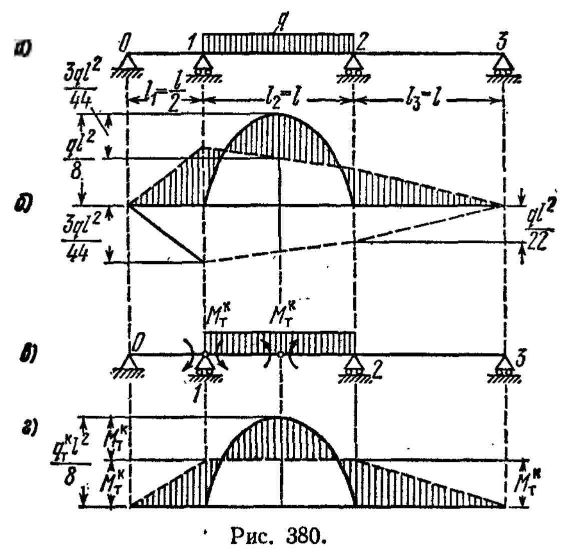


Рис. 380.

в которых будут одинаковы. Если бы нагрузка была расположена на всех пролетах нашей балки, то следовало бы рассмотреть возможность разрушения каждого из пролетов, построить соответствующие эпюры *расчетных* моментов (путем *уравнивания* их величин в опасных сечениях) и подобрать W по наибольшему из полученных $M_{расч}$. В качестве примера загрузим трехпролетную балку (рис. 381) равномерной нагрузкой q в среднем пролете и сосредоточенными силами $P=2\,ql$ по середине крайних пролетов. Определение расчетных моментов $M_{расч}$ для всех трех пролетов показано на рисунке

пунктиром; они равны

$$M_{расч}=\frac{ql^2}{6}; \quad M_{расч}=\frac{ql^2}{16}; \quad M_{расч}=\frac{ql^2}{3}.$$

Подбор сечения балки следует вести по моменту $M_{расч}=ql^2/3$, момент сопротивления $W \geqslant ql^2/(3n[\sigma])$.

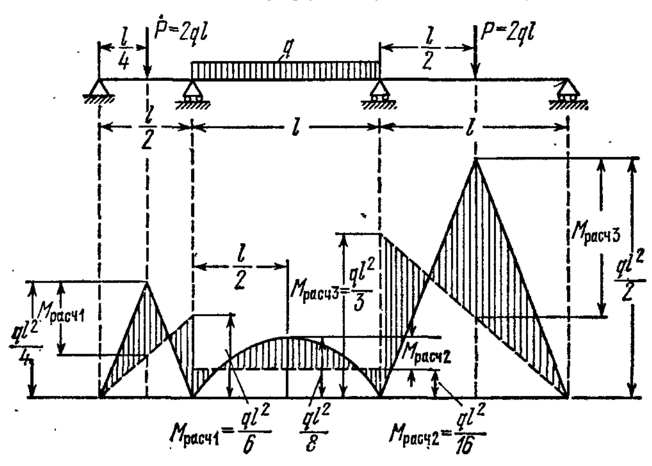


Рис. 381.

Подобным же образом следует проводить расчет любой многопролетной неразрезной балки, оценивая возможность разрушения каждого из пролетов.

Описанный способ расчета неразрезных балок требует ряда оговорок и ограничений. Во-первых, он относится к *статическим нагрузкам*. Во-вторых, физическая картина разрушения балки и при статической нагрузке гораздо сложнее той, весьма упрощенной, схемы образования пластических шарниров, о которой речь шла выше. Пластическая деформация не сосредоточивается в одном сечении, а распространяется по длине балки. Затем исчерпание грузоподъемности может произойти не только за счет пластических деформаций, а и за счет потери устойчивости как всей балки в целом, так и листов сжатого пояса или стенки балки. Таким образом, переход к практическому приложению этого метода расчета даже при статических нагрузках требует повышения внимания к проверкам балки на устойчивость.

Опыты на разрушение статически неопределимых балок при статической нагрузке показывают, что в тех случаях, когда исключается разрушение балок от *потери устойчивости*, величины разрушающей нагрузки, полученные экспериментально и теоретически описанным выше способом, сходятся очень хорошо.

§ 153. Понятие о расчете по методу предельных состояний

Расчет по «методу предельных состояний» [1]) выходит за рамки основного курса сопротивления материалов. Согласно принятым в СССР и в некоторых других странах нормам и правилам он является обязательным лишь при расчете строительных конструкций. В машиностроении он пока не применяется. Подробно излагается расчет по методу предельных состояний в курсе строительных конструкций. Однако так как в конечном итоге этот метод базируется на сопротивлении материалов и для того, чтобы изучающий его мог увязать принятую в нем методику и терминологию с таковыми в сопротивлении материалов, ниже будут даны основные понятия расчета по методу предельных состояний для строительных конструкций.

Рассматриваются *две* группы предельных состояний.

Первая группа — *из-за потери несущей способности или непригодности к эксплуатации.*

Вторая группа — *из-за непригодности к нормальной эксплуатации.*

Основными предельными состояниями первой группы являются разрушение, потеря устойчивости, чрезмерное раскрытие трещин и ряд других опасных состояний.

К предельным состояниям второй группы относятся состояния, затрудняющие нормальную эксплуатацию конструкций или снижающие их долговечность, в основном из-за недопустимых перемещений (прогибов, углов поворота и т. п.).

Основными параметрами сопротивления материалов силовым воздействиям являются *нормативные сопротивления* $R^{\text{н}}$, устанавливаемые нормами проектирования с учетом условий контроля и статистической изменчивости сопротивлений. В качестве нормативного сопротивления могут быть приняты предел текучести, прочности, выносливости, критическое напряжение и некоторые другие подобные характеристики материала, которые в курсе сопротивления материалов называются *опасными* и обозначаются p^0.

Возможность отклонений прочностных характеристик в неблагоприятную сторону от нормативных значений учитывается *коэффициентом безопасности по материалу* k, вводимым в виде делителя к нормативным значениям.

Числовые значения коэффициента k зависят от свойств материалов и их статистической изменчивости. В расчетах несущей способности значения k принимаются *не менее* 1,1.

Расчетным сопротивлением материала R называется сопротивление, принимаемое при *расчете* конструкций, получаемое

[1]) В соответствии с СНиП II-А, 10—71.

делением $R^{\text{н}}$ на k:

$$R = \frac{R^{\text{н}}}{k}. \tag{26.10}$$

Особенности действительной работы материалов, элементов и соединений, а также конструкций в целом, имеющие систематический характер, но не отражаемые в расчетах прямым путем, учитываются в соответствующих случаях *коэффициентом условий работы* m.

Коэффициент m учитывает влияние температуры, влажности и агрессивности среды, длительности воздействия нагрузок и некоторые другие факторы.

Степень ответственности и капитальности зданий и сооружений учитывается в ряде случаев *коэффициентом надежности* $k_{\text{н}}$. Численные значения коэффициентов k, m и $k_{\text{н}}$ устанавливаются нормами.

Таким образом, формула (26.10) для расчетного сопротивления материала R, при введении в необходимых случаях коэффициентов m и $k_{\text{н}}$, принимает вид

$$R = m\frac{R^{\text{н}}}{kk_{\text{н}}}. \tag{26.11}$$

Расчетное сопротивление R в курсе сопротивления материалов называется *допускаемым напряжением* и обозначается $[\sigma]$ или $[\tau]$. Только в значениях R коэффициенты запаса более детализированы и в них не учитывается запас по отношению к нагрузке. При расчете по методу предельных состояний запас прочности по отношению к нагрузке, как будет установлено в дальнейшем, осуществляется особым путем.

Основными характеристиками нагрузок являются их *нормативные* величины, обозначаемые $P^{\text{н}}$.

Нормативные величины нагрузок устанавливаются нормами для соответствующих сооружений.

Возможное отклонение нагрузок в неблагоприятную сторону от их нормативных значений вследствие изменчивости нагрузок или отступлений от условий нормальной эксплуатации учитывается *коэффициентом перегрузки* n. Он является коэффициентом запаса по отношению к нагрузке. Для отдельных нагрузок, хотя бы и одновременно приложенных к конструкции, *коэффициент перегрузки может быть различным,* например для нагрузок постоянной и временной. В этом и заключается отличие рассматриваемого метода расчета от принятого в сопротивлении материалов, где запас прочности по отношению к нагрузкам является единым для всех нагрузок, одновременно воздействующих на конструкцию, и учитывается в общем коэффициенте запаса.

Нагрузки, принимаемые при *расчете* конструкций и получаемые путем умножения их нормативных значений на соответствующие коэффициенты n, называются *расчетными*.

Если учитывать разные значения коэффициента перегрузки для постоянной и временной нагрузок, то, например, при изгибе расчетный изгибающий момент M от одновременного действия постоянной и временной нагрузок определяется так:

$$M = n_1 M^{\text{н}}_{\text{пост}} + n_2 M^{\text{н}}_{\text{врем}}. \tag{26.12}$$

Конструкции следует рассчитывать с учетом возможных неблагоприятных сочетаний нагрузок (например, одновременное загружение моста поездом, тормозными силами и ветром, или одновременное нагружение опоры линии электропередачи односторонним натяжением провода при его обрыве в соседнем пролете и ветром и т. п.). Вероятность таких сочетаний учитывается *коэффициентом сочетаний* n_c. Условия применения и значения коэффициентов n и n_c имеются в нормах.

Таким образом, если при расчете некоторой конструкции нормами предписано введение для временных нагрузок коэффициента сочетаний, то формула (26.12) для расчетного момента принимает вид

$$M = n_1 M^{\text{н}}_{\text{пост}} + n_c n_2 M^{\text{н}}_{\text{врем}}. \tag{26.13}$$

В тех случаях, когда в нормах нет указаний по учету неупругих деформаций, допускается определение усилий в статически неопределимых системах в предположении *упругой* работы конструкции. Тогда условие прочности, например при изгибе

$$\frac{M}{W} \leqslant R,$$

с учетом формул (26.11) и (26.13), принимает следующий вид:

$$\frac{n_1 M^{\text{н}}_{\text{пост}} + n_c n_2 M^{\text{н}}_{\text{врем}}}{W} \leqslant m \frac{R^{\text{н}}}{k k_{\text{н}}}.$$

Проверка по *второму* предельному состоянию заключается в определении *упругой* деформации или перемещении (удлинения, угла закручивания, прогиба) *от нормальной* нагрузки. Найденная деформация не должна превышать допустимой, предписываемой нормами величины.

Отдел VIII

УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Глава XXVII

ПРОВЕРКА СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

§ 154. Введение. Понятие об устойчивости формы сжатых стержней

Во всем предыдущем изложении мы определяли поперечные размеры стержней из условий *прочности*. Однако разрушение стержня может произойти не только потому, что будет нарушена прочность, но и оттого, что стержень не сохранит той формы, которая ему придана конструктором; при этом изменится и характер напряженного состояния в стержне.

Наиболее типичным примером является работа стержня, сжатого силами P. До сих пор для проверки прочности мы имели условие

$$\sigma = \frac{P}{F} \leqslant [\sigma], \quad \text{где} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_т}{k_т} \quad \text{или} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_в}{k_в}.$$

Это условие предполагает, что стержень все время, вплоть до разрушения его напряжениями $\sigma_т$ или $\sigma_в$, работает на осевое сжатие. Уже простейший опыт показывает, что далеко не всегда возможно разрушить стержень путем доведения напряжений сжатия до предела текучести или до предела прочности материала.

Если мы подвергнем продольному сжатию тонкую деревянную линейку, то она может сломаться, изогнувшись; перед изломом сжимающие силы, при которых произойдет разрушение линейки, будут значительно меньше тех, которые вызвали бы при простом сжатии напряжение, равное пределу прочности материала. Разрушение линейки произойдет потому, что она не сможет *сохранить* приданную ей форму прямолинейного, сжатого стержня, а *искривится*, что вызовет появление изгибающих моментов от сжимающих сил P и, стало быть, добавочные напряжения от изгиба; линейка потеряет *устойчивость* прямолинейной формы.

Поэтому для надежной работы конструкции мало, чтобы она была прочна; надо, чтобы все ее элементы были *устойчивы:* они должны при действии нагрузок деформироваться в таких пределах, чтобы *характер* их работы оставался неизменным. Поэтому в целом ряде случаев, в частности, для сжатых стержней, помимо *проверки на*

прочность, необходима и *проверка на устойчивость*. Для осуществления этой проверки надо ближе ознакомиться с условиями, при которых устойчивость прямолинейной формы сжатого стержня нарушается.

Возьмем достаточно длинный по сравнению с его поперечными размерами стержень, шарнирно-прикрепленный к опорам (рис. 382), и нагрузим его сверху центральной силой P, постепенно возрастающей. Мы увидим, что пока сила P сравнительно мала, стержень будет сохранять прямолинейную форму. При попытках отклонить его в сторону, например путем приложения кратковременно действующей горизонтальной силы, он будет после ряда колебаний возвращаться к первоначальной прямолинейной форме, как только будет удалена добавочная сила, вызвавшая отклонение.

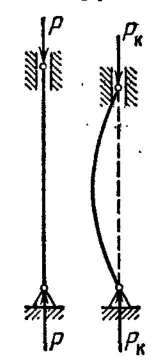


Рис. 382.

При постепенном увеличении силы P стержень будет все медленнее возвращаться к первоначальному положению при проверках его устойчивости; наконец, можно довести силу P до такой величины, при которой стержень после небольшого отклонения его в сторону уже не выпрямится, а останется искривленным. Если мы, не удаляя силы P, выпрямим стержень, он уже, как правило, не сможет сохранить прямолинейную форму. Другими словами, при этом значении силы P, называемом *критическим*, $P_к$, прямолинейная форма перестает быть устойчивой формой равновесия сжатого стержня [1]).

Переход к критическому значению силы P происходит *внезапно*; стоит нам очень немного уменьшить сжимающую силу по сравнению с ее критической величиной, как прямолинейная форма равновесия вновь делается устойчивой.

С другой стороны, при очень небольшом превышении сжимающей силой P ее критического значения прямолинейная форма стержня делается крайне *неустойчивой;* достаточно при этом небольшого эксцентриситета приложенной силы, неоднородности материала по сечению, чтобы стержень искривился, и не только не вернулся к прежней форме, а продолжал искривляться под действием все возрастающих при искривлении изгибающих моментов; процесс искривления заканчивается либо достижением совершенно новой (устойчивой) формы равновесия, либо разрушением.

Исходя из этого, мы должны практически считать критическую величину сжимающей силы $P_к$ эквивалентной нагрузке, «разрушающей» сжатый стержень, *выводящий* его (и связанную с ним конструкцию) из *условий нормальной работы*. Конечно, при этом надо

[1]) Исследования показывают, что потеря устойчивости становится возможной при значениях P, превышающих критическое на величину второго порядка малости.

помнить, что «разрушение» стержня нагрузкой, превышающей критическую, может происходить при непременном условии беспрепятственного возрастания искривления стержня; поэтому если при боковом выпучивании стержень встретит боковую опору, ограничивающую его дальнейшее искривление, то разрушение может и не наступить.

Обычно подобная возможность является исключением; поэтому практически следует считать критическую сжимающую силу *низшим пределом* «разрушающей» стержень силы.

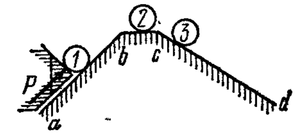


Рис. 383.

Явление потери устойчивости при сжатии можно по аналогии иллюстрировать следующим примером из механики твердого тела (рис. 383). Будем вкатывать цилиндр на наклонную плоскость ab, которая потом переходит в короткую горизонтальную площадку bc и наклонную плоскость обратного направления cd. Пока мы поднимаем цилиндр по плоскости ab, поддерживая его при помощи упора, перпендикулярного к наклонной плоскости, он будет в состоянии *устойчивого* равновесия; на площадке bc его равновесие делается безразличным; стоит же нам поместить цилиндр в точку c, как его равновесие сделается неустойчивым — при малейшем толчке вправо цилиндр начнет двигаться вниз.

Описанную выше физическую картину потери устойчивости сжатым стержнем легко осуществить в *действительности* в любой механической лаборатории на элементарной установке [1]). Это описание не является какой-то теоретической, идеализированной схемой, а отражает поведение реального стержня под действием сжимающих сил.

Потерю устойчивости прямолинейной формы сжатого стержня иногда называют «продольным изгибом», так как она влечет за собой значительное искривление стержня под действием продольных сил. Для проверки на устойчивость сохранился до сих пор термин «проверка на продольный изгиб», являющийся *условным*, так как здесь речь должна идти не о проверке на изгиб, а о проверке на *устойчивость* прямолинейной формы стержня.

Установив понятие о *критической* силе как о «разрушающей» нагрузке, выводящей стержень из условий его нормальной работы, мы легко можем составить условие для проверки на устойчивость, аналогичное условию прочности.

Критическая сила $P_к$ вызывает в сжатом стержне напряжение, называемое «критическим напряжением» и обозначаемое буквой $\sigma_к = P_к/F$. Критические напряжения являются *опасными* напря-

[1]) См. Беляев Н. М., Лабораторные работы по сопротивлению материалов, Гостехиздат, 1951, § 85.

жениями для сжатого стержня. Поэтому, чтобы обеспечить устойчивость прямолинейной формы стержня, сжатого силами P, необходимо к условию прочности ($\sigma=P/F\leqslant[\sigma]$) добавить еще условие устойчивости

$$\sigma=\frac{P}{F}\leqslant[\sigma_y], \tag{27.1}$$

где $[\sigma_у]$ — допускаемое напряжение на устойчивость, равное критическому, деленному на коэффициент запаса на устойчивость, т. е. $[\sigma_у]=\sigma_к/k_у$.

Для возможности осуществить проверку на устойчивость мы должны показать, как определять $\sigma_к$ и как выбрать коэффициент запаса $k_у$.

§ 155. Формула Эйлера для критической силы

Для нахождения критических напряжений $\sigma_к$ надо вычислить критическую силу $P_к$, т. е. *наименьшую* осевую сжимающую силу, способную удержать в равновесии слегка искривленный сжатый стержень.

Эту задачу впервые решил академик Петербургской академии наук Л. Эйлер в 1744 г.

Заметим, что самая постановка задачи иная, чем во всех ранее рассмотренных отделах курса. Если раньше мы определяли деформацию стержня при заданных внешних нагрузках, то здесь ставится обратная задача: задавшись искривлением оси сжатого стержня, следует определить, при каком значении осевой сжимающей силы P такое искривление возможно.

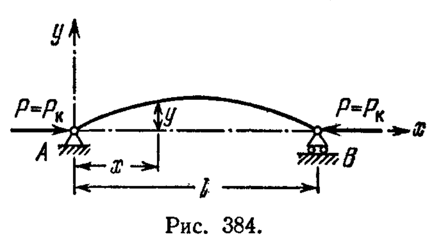


Рис. 384.

Рассмотрим прямой стержень постоянного сечения, шарнирно-опертый по концам; одна из опор допускает возможность продольного перемещения соответствующего конца стержня (рис. 384). Собственным весом стержня пренебрегаем.

Нагрузим стержень центрально приложенными продольными сжимающими силами $P=P_к$ и дадим ему весьма небольшое искривление в плоскости наименьшей жесткости; стержень удерживается в искривленном состоянии, что возможно, так как $P=P_к$.

Деформация изгиба стержня предположена весьма малой, поэтому для решения поставленной задачи можно воспользоваться приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси стержня (§ 82). Выбрав начало координат в точке A и направление

координатных осей, как показано на рис. 384, имеем (15.7)

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=M(x).$$

Возьмем сечение на расстоянии x от начала координат; ордината изогнутой оси в этом сечении будет y, а изгибающий момент равен

$$M(x)=-Py.$$

По схеме, изображенной на рис. 384, изгибающий момент получается отрицательным, ординаты же при выбранном направлении оси y оказываются положительными [1]). (Если бы стержень искривился выпуклостью книзу, то момент был бы положительным, а y — отрицательным и $M(x)=-Py$.)

Приведенное только что дифференциальное уравнение (15.7) принимает вид

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=-Py; \tag{27.2}$$

деля обе части уравнения на EJ и обозначая дробь $P/(EJ)$ через k^2, приводим его к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0. \tag{27.3}$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$y=a\sin kx+b\cos kx. \tag{27.4}$$

Это решение заключает в себе три неизвестных: постоянные интегрирования a и b и значение $k=\sqrt{P/(EJ)}$, так как величина критической силы нам неизвестна.

Условия на концах стержня дают два уравнения:

в точке A при $x=0$ прогиб $y=0$;

в точке B при $x=l$ прогиб $y=0$.

Из первого условия следует (так как $\sin kx=0$ и $\cos kx=1$)

$$0=b.$$

Таким образом, изогнутая ось является синусоидой с уравнением

$$y=a\sin kx. \tag{27.5}$$

Применяя второе условие, подставляем в это уравнение

$$y=0 \text{ и } x=l;$$

---

[1]) Если ось y направить вниз, то положительному моменту $M(x)$ соответствовал бы положительный прогиб y. Однако в этом случае отрицательной оказывается кривизна и $d^2y/dx^2<0$. Следовательно, знаки уравнения (27.2) сохранятся.

получаем

$$0=a\sin kl. \tag{27.6}$$

Отсюда следует, что или a или kl равны нулю.

Если a равно нулю, то из уравнения (27.5) следует, что прогиб в любом сечении стержня равен нулю, т. е. стержень остался прямым. Это противоречит исходным предпосылкам нашего вывода. Следовательно, $\sin kl=0$, и величина kl может иметь следующий бесконечный ряд значений:

$$kl=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots,\ n\pi, \tag{27.7}$$

где n — любое целое число.

Отсюда $k=\pi n/l$, а так как $k=\sqrt{P/(EJ)}$, то

$$\frac{P}{EJ}=\frac{\pi^2}{l^2}\cdot n^2 \quad \text{и} \quad P=\frac{\pi^2 EJ}{l^2}\cdot n^2. \tag{27.8}$$

Иначе говоря, нагрузка, способная удержать слегка искривленный стержень в равновесии, теоретически может иметь целый ряд значений. Но так как отыскивается, и интересно с практической точки зрения, *наименьшее* значение осевой сжимающей силы, при которой становится возможным продольный изгиб, то следует принять $n=n_{\min}$.

Первый корень $n=0$ требует, чтобы $P_к$ было равно нулю, что не отвечает исходным данным задачи; поэтому этот корень должен быть отброшен и наименьшим корнем прииимается значение $n=1$. Тогда получаем

$$P_к=\frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \tag{27.9}$$

(Здесь J — минимальный момент инерции поперечного сечения стержня.) Это — так называемая *формула Эйлера* для сжатого стержня с шарнирно-опертыми концами. Значению критической силы (27.9) соответствует изгиб стержня по синусоиде *с одной полуволной* (формула (27.5))

$$y=a\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{27.10}$$

Значениям критической силы высших порядков соответствуют искривления по синусоидам с двумя, тремя и т. д. полуволнами (рис. 385)

$$\left.\begin{aligned} P_к&=\frac{4\pi^2 EJ}{l^2}; & k&=\frac{2\pi}{l}; & y&=a\sin\frac{2\pi x}{l},\\ P_к&=\frac{9\pi^2 EJ}{l^2}; & k&=\frac{3\pi}{l}; & y&=a\sin\frac{3\pi x}{l}. \end{aligned}\right\} \tag{27.11}$$

Таким образом, чем больше точек перегиба будет иметь синусоидально-искривленная ось стержня, тем большей должна быть кри-

тическая сила. Более полные исследования показывают, что формы равновесия, определяемые формулами (27.11), неустойчивы; они переходят в устойчивые формы лишь при наличии промежуточных опор в точках B и C (рис. 385).

Таким образом, поставленная задача решена; для нашего стержня наименьшая критическая сила определяется формулой

$$P_к = \frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

а изогнутая ось представляет синусоиду

$$y = a \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Величина постоянной интегрирования a осталась неопределенной; физическое значение ее выяснится, если в уравнении синусоиды положить $x = l/2$; тогда $y_{x=l/2}$ (т. е. посредине длины стержня) получит значение

$$y_{max} = f = a.$$

Значит, a — это прогиб стержня в сечении посредине его длины. Так как при критическом значении силы P равновесие изогнутого стержня возможно при различных отклонениях его от прямолинейной формы, лишь бы эти отклонения *были малыми*, то естественно, что прогиб f остался неопределенным.

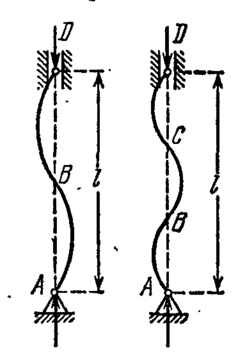


Рис. 385.

Он должен быть при этом настолько малым, чтобы мы имели право применять приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси, т. е. чтобы $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ было мало́ по сравнению с единицей (§ 82).

Получив значение критической силы, мы можем сейчас же найти и величину критического напряжения $\sigma_к$, разделив силу $P_к$ на площадь сечения стержня F; так как величина критической силы определялась из рассмотрения деформаций стержня, на которых местные ослабления площади сечения сказываются крайне слабо, то в формулу для $P_к$ входит момент инерции $J_{бр} = i^2 F_{бр}$; поэтому принято при вычислении критических напряжений, а также при составлении условия устойчивости вводить в расчет полную, а не ослабленную площадь поперечного сечения стержня $F_{бр}$. Тогда

$$\sigma_к = \frac{P_к}{F_{бр}} = \frac{\pi^2 EJ_{бр}}{l^2 F_{бр}} = \frac{\pi^2 E i^2}{l^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \qquad (27.12)$$

Таким образом, критическое напряжение для стержней данного материала обратно пропорционально квадрату отношения длины стержня к наименьшему радиусу инерции его поперечного сечения. Это отношение $\lambda=l/i$ называется *гибкостью стержня* и играет весьма важную роль во всех проверках сжатых стержней на устойчивость.

Из формулы (27.12) видно, что критическое напряжение при тонких и длинных стержнях может быть весьма малым, ниже основного допускаемого напряжения на прочность $[\sigma]$. Так, для стали 3 с пределом прочности $\sigma_в \approx 4000$ *кГ/см*² допускаемое напряжение может быть принято $[\sigma]=1600$ *кГ/см*²; критическое же напряжение для стержня с гибкостью $\lambda=150$ при модуле упругости материала $E=2\cdot 10^6$ *кГ/см*² будет равно

$$\sigma_к=\frac{\pi^2\cdot 2\cdot 10^6}{(150)^2}=877 \text{ кГ/см}^2 < 1600 \text{ кГ/см}^2.$$

Таким образом, если бы площадь сжатого стержня с такой гибкостью была подобрана лишь по условию прочности, то стержень разрушился бы от потери устойчивости прямолинейной формы.

§ 156. Влияние способа закрепления концов стержня

Формула Эйлера была получена путем интегрирования приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси стержня при определенном закреплении его концов (шарнирно-опертых). Значит, найденное выражение критической силы справедливо лишь для стержня с шарнирно-опертыми концами и изменится при изменении условий закрепления концов стержня. Закрепление сжатого стержня с шарнирно-опертыми концами мы будем называть *основным* случаем закрепления. Другие виды закрепления будем приводить к основному случаю.

Если повторить весь ход вывода для стержня, жестко защемленного одним концом и нагруженного осевой сжимающей силой на другом конце (рис. 386), то мы получим другое выражение для критической силы, а следовательно, и для критических напряжений. Предоставляя учащимся проделать это во всех подробностях самостоятельно, подойдем к выяснению критической силы для этого случая путем следующих простых рассуждений.

Пусть при достижении силой P критического значения колонна будет сохранять равновесие при слабом выпучивании по кривой AB. Сравнивая рис. 386 и 382, видим, что изогнутая ось стержня, защемленного одним концом, находится совершенно в тех же условиях, что и верхняя часть стержня двойной длины с шарнирно-закрепленными концами.

Значит, критическая сила для стойки длиной l с одним защемленным, а другим свободным концами будет та же, что для стойки с шарнирно-опертыми концами при длине $2l$:

$$P_к=\frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}=\frac{\pi^2 EJ}{4l^2}. \qquad (27.13)$$

Если мы обратимся к случаю стойки, у которой оба конца защемлены и не могут поворачиваться (рис. 387), то заметим, что при выпучивании, по симметрии, средняя часть стержня длиной $l/2$ будет работать в тех же условиях, что и стержень при шарнирно-опертых концах (так как в точках перегиба C и D изгибающие моменты равны нулю, то эти точки можно рассматривать как шарниры).

Поэтому критическая сила для стержня с защемленными концами длиной l равна критической силе для стержня основного случая длиной $l/2$:

$$P_к=\frac{\pi^2 EJ}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\frac{4\pi^2 EJ}{l^2}. \qquad (27.14)$$

Рис. 386.

Рис. 387.

Формулы (27.13) и (27.14) можно объединить с формулой для критической силы основного случая $P_к=\pi^2 EJ/l^2$ и записать

$$P_к=\frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}; \qquad (27.15)$$

здесь μ — так называемый *коэффициент длины*, равный:

при шарнирных концах (основной случай) $\mu=1$;
при одном свободном, другом защемленном $\mu=2$;
при обоих защемленных $\mu=1/2$.

Для стержня, изображенного на рис. 388 с одним защемленным, а другим шарнирно-опертым концами, коэффициент μ оказывается примерно равным $1/\sqrt{2}\approx 0,7$, критическая сила

$$P_к\approx\frac{\pi^2 EJ}{(0,7l)^2}\approx 2\frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \qquad (27.16)$$

Величина μl называется *приведенной* (свободной) *длиной*; при помощи коэффициента длины любой случай устройства опор стержня можно свести к основному; надо лишь при вычислении гибкости вместо действительной длины стержня ввести в расчет приведенную длину μl. Понятие о приведенной длине было впервые введено

профессором Петербургского института инженеров путей сообщения Ф. Ясинским[1]).

Формула (27.12) для критических напряжений в шарнирно-опертом по концам стержне может быть обобщена и на другие случаи закрепления стержней, если ввести в знаменатель приведенную гибкость

$$\lambda=\frac{\mu l}{i} \quad \text{и} \quad \sigma_{\text{к}}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \qquad (27.12')$$

Рис. 388.

Значения коэффициентов приведения μ для некоторых видов закрепления стержня приведены на рис. 389.

На практике, однако, почти никогда не встречаются в чистом виде те закрепления концов стержня, которые мы имеем на наших расчетных схемах (рис. 389). Вместо шаровых опор обычно применяются цилиндрические шарниры. Подобные стержни следует считать шарнирно-опертыми при выпучивании их в плоскости, перпендикулярной к оси шарниров; при искривлении же в плоскости этих осей концы стержней следует считать защемленными (с учетом оговорок, приведенных ниже для защемленных концов).

В конструкциях очень часто встречаются сжатые стержни, концы которых приклепаны или приварены к другим элементам, часто

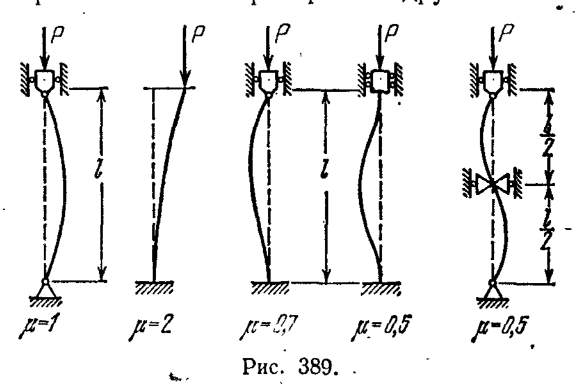


Рис. 389.

еще с добавлением в месте прикрепления фасонных листов. Такое закрепление, однако, трудно считать защемлением, так как части конструкции, к которым прикреплены эти стержни, не являются абсолютно жесткими. Между тем достаточно возможности уже небольшого поворота опорного сечения в защемлении, чтобы оно ока-

[1]) Известия собрания инженеров путей сообщения, Петербург, 1892.

Таблица 18

Критические силы

Вид нагрузки	Схема стержня	Критические нагрузки	Коэффициенты длины μ
Равномерно распределенная по длине стержня (собственный вес) q		$(ql)_к=\frac{\pi^2EJ}{(\mu l)^2}=0{,}79\frac{\pi^2EJ}{l^2}$	$\mu=1{,}12$
То же		$(ql)_к=\frac{\pi^2EJ}{(\mu l)^2}=1{,}9\frac{\pi^2EJ}{l^2}$	$\mu=0{,}725$
Две силы P_1 и P_2 $\frac{P_1+P_2}{P_1}=m$ $J_2:J_1=n$		$(P_1+P_2)_к=\frac{\pi^2EJ}{(\mu l)^2}$ μ — по таблице	см. таблицу ниже
Сосредоточенная сила на свободном конце $J_1:J_2=n$ Площадь постоянная ($F=\text{const}$) (4 уголка и т. п.)		$P_к=\frac{\pi^2EJ}{(\mu l)^2}$ μ — по таблице	см. таблицу ниже

n \ m	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	3,00
1,00	1,0	0,95	0,91	0,89	0,87	0,82
1,50	1,12	1,06	1,02	0,99	0,96	—
2,00	1,24	1,16	1,12	1,08	1,05	—

n	0,0	0,1	0,2	0,4	0,8	1,0
μ	6,25	2,71	2,42	2,28	2,07	2,0

залось в условиях, очень близких к шарнирному опиранию. Поэтому на практике недопустимо рассчитывать такие стержни, как стойки с абсолютно защемленными концами. Лишь в тех случаях, когда имеет место очень надежное защемление концов, допускается небольшое (процентов на 10—20) уменьшение свободной длины стержня.

Наконец, на практике встречаются стержни, опирающиеся на соседние элементы по всей плоскости опорных поперечных сечений. Сюда относятся деревянные стойки, отдельно стоящие металлические колонны, притянутые болтами к фундаменту, и т. д. При тщательном конструировании опорного башмака и соединения его с фундаментом можно считать эти стержни имеющими защемленный конец. Сюда же относятся мощные колонны с цилиндрическим шарниром при расчете их на выпучивание в плоскости оси шарнира. Обычно же трудно рассчитывать на надежное и равномерное прилегание плоского концевого сечения сжатого стержня к опоре. Поэтому грузоподъемность таких стоек обычно мало превышает грузоподъемность стержней с шарнирно-опертыми концами.

Значения критических нагрузок могут быть получены в виде формул типа эйлеровой (27.15) и для стержней переменного сечения, а также при действии нескольких сжимающих сил. Результаты решения некоторых задач теории упругой устойчивости, имеющих практическое значение, приведены в таблице 18.

§ 157. Пределы применимости формулы Эйлера и построение полного графика критических напряжеиий

Казалось бы, что полученные в предыдущих параграфах результаты решают задачу проверки сжатого стержня на устойчивость; остается выбрать лишь коэффициент запаса k_y. Однако это далеко не так. Ближайшее же изучение числовых величин, получаемых по формуле Эйлера, показывает, что она дает правильные результаты лишь в известных пределах.

Так, например, если подсчитать величину критических напряжений по формуле (27.12) для стержня с гибкостью $\lambda=50$ из стали 3 ($E=2\cdot 10^6$ *кГ/см*²), то мы получим

$$\sigma=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}=\frac{3,14^2\cdot 2\cdot 10^6}{50^2}=8000 \text{ кГ/см}^2.$$

Это почти вдвое выше предела прочности стали 3; стержень выйдет из строя гораздо раньше, чем будет достигнуто критическое напряжение. Как мы видим, при небольших гибкостях формула Эйлера дает преувеличенные значения критических напряжений и критических сил. В чем же здесь дело?

Графически зависимость $\sigma_к$ от λ представлена на рис. 390. Эта зависимость представляется гиперболической кривой, так называемой «гиперболой Эйлера». При пользовании этой кривой надо вспомнить, что представляемая ею формула (27.12) получена при помощи интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси, т. е. в предположении, *что напряжения в стержне в момент потери устойчивости не превосходят предела пропорциональности.*

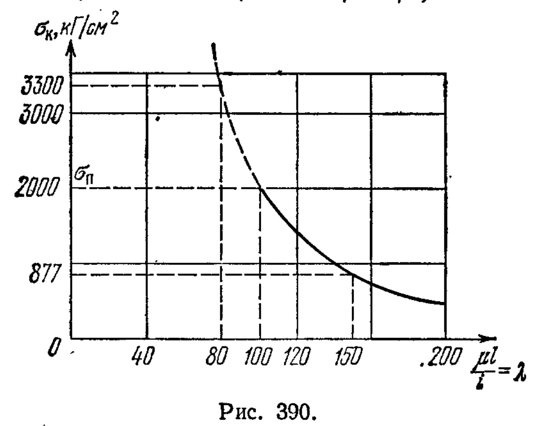


Рис. 390.

Следовательно, мы не имеем права пользоваться величинами критических напряжений, вычисленных по формуле Эйлера, если они получаются выше этого предела для данного материала. Иначе говоря, формула Эйлера применима лишь при соблюдении условия

$$\sigma_к \leqslant \sigma_п \quad \text{или} \quad \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leqslant \sigma_п. \tag{27.17}$$

Если из неравенства (27.17) выразить гибкость λ, то условие применимости формул Эйлера получит иной вид:

$$\lambda_п \geqslant \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_п}}. \tag{27.17'}$$

Подставляя соответствующие значения модуля упругости и предела пропорциональности для данного материала, находим наименьшее значение гибкости, при которой еще можно пользоваться формулой Эйлера. Для стали 3 предел пропорциональности может быть принят равным $\sigma_п = 2000$ *кГ/см*², поэтому, как видно и из формулы (27.17'), для стержней из этого материала можно пользоваться формулой Эйлера лишь при гибкости

$$\lambda_п \geqslant \sqrt{\frac{\pi^2 2 \cdot 10^6}{2000}} \approx 100,$$

т. е. *большей, чем* 100.

Для стали 5 при $\sigma_п \approx 3000$ *кГ/см*² формула Эйлера применима при гибкости $\lambda \geqslant 85$; для чугуна — при $\lambda \geqslant 80$, для сосны — при $\lambda \geqslant 110$ и т. д. Если мы на рис. 390 проведем горизонтальную линию с ординатой, равной $\sigma_п = 2000$ *кГ/см*², то она рассечет гиперболу Эйлера на две части; пользоваться можно лишь нижней частью графика, относящейся к сравнительно тонким и длинным стержням, потеря устойчивости которых происходит при напряжениях, лежащих не выше предела пропорциональности.

Теоретическое решение, полученное Эйлером, оказалось применимым на практике лишь для очень ограниченной категории стержней, а именно, тонких и длинных, с большой гибкостью. Между тем в конструкциях очень часто встречаются стержни с малой гибкостью. Попытки использовать формулу Эйлера для вычисления критических напряжений и проверки устойчивости при малых гибкостях вели иногда к весьма серьезным катастрофам, да и опыты над сжатием стержней показывают, что при критических напряжениях, *бо́льших* предела пропорциональности, действительные критические силы значительно *ниже* определенных по формуле Эйлера.

Заметим, что при $\sigma_к > \sigma_п$ продольное сжатие стержня сопровождается не только упругой, но и пластической деформацией, причем в момент потери устойчивости (при искривлении оси стержня) появляются дополнительные напряжения от изгиба. После снятия нагрузки стержень уже не выпрямляется, как при упругом сжатии.

Необходимо при учете этих обстоятельств найти методы вычисления критических напряжений и для тех случаев, когда они превышают предел пропорциональности материала, т. е. для стержней, гибкость которых меньше предельной, определяемой условием (27.17'); например, для стержней из малоуглеродистой стали при гибкостях от $\lambda = 0$ до $\lambda = 100$.

А. *Теоретическое* решение задачи об устойчивости сжатого стержня при критических напряжениях, превышающих предел пропорциональности материала, впервые рассмотрел Ф. Энгессер (1889 г.), получивший формулу типа эйлеровой (27.12):

$$\sigma_к = \frac{\pi^2 E_1}{\lambda^2}. \qquad (27.18)$$

Здесь E_1 — переменный модуль упругости, определяемый как тангенс угла наклона касательной к кривой, изображающей диаграмму сжатия за пределом пропорциональности (рис. 391). *Касательный* модуль $E_1 = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$ зависит как от вида этой диаграммы, так и от величины напряжений $\sigma_к$ в момент потери устойчивости.

Ф. Ясинским было указано на ошибочность формулы (27.18), не учитывающей того обстоятельства, что при потере устойчивости и искривлении оси стержня возникают дополнительные напряжения не только сжатия, но и растяжения. Согласившись с критичес-

кими замечаниями Ф. Ясинского, указавшего на *необходимость учета разгрузки* на выпуклой стороне изогнутого стержня, Энгессер (1895 г.) и, независимо от него, Т. Карман (1909 г.) пришли к выводу, что в формулу (27.18) вместо касательного модуля следует ввести *приведенный* модуль упругости E^*, учитывающий догрузку вогнутой стороны с модулем E_1 и разгрузку выпуклой — с модулем

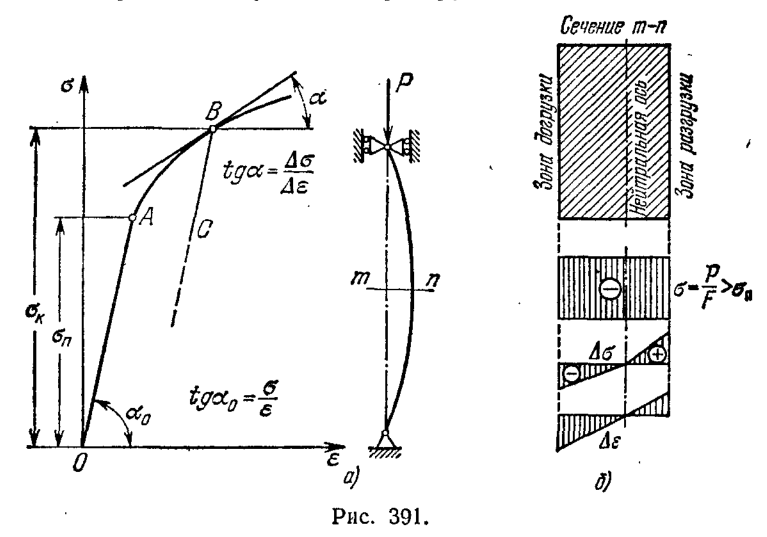


Рис. 391.

E (разгрузка, как известно, следует закону Гука). Формула для критических напряжений, превышающих предел пропорциональности (для стержней с гибкостью $\lambda > \lambda_п$), имеет вид

$$\sigma_к = \frac{\pi^2 E^*}{\lambda^2}. \qquad (27.18')$$

Для приведенного модуля упругости — из условий равновесия для дополнительных внутренних усилий (догрузка — разгрузка) и на основании гипотезы плоских сечений получено выражение

$$E^* = \frac{E_1 J_1 + E J_2}{J}, \qquad (27.19)$$

где J_1 — момент инерции догружаемой (вогнутой) части сечения относительно *нейтральной* оси; J_2 — момент инерции разгружаемой части сечения (на выпуклой стороне); J — момент инерции всей площади сечения относительно *центральной* оси.

Вследствие различия модулей E и E_1, входящих в формулу (27.19), нейтральная ось, разделяющая догружаемую часть сечения от разгружаемой, не проходит через центр тяжести сечения (рис. 391, *б*); положение ее (а, значит, и величины площадей —

догружаемой и разгружаемой) зависит как от *формы сечения, так и от значения искомого критического напряжения*. Для различных форм сечения, задаваясь величиной E_1 и пользуясь методом последовательных приближений, можно найти положение нейтральной оси и вычислить моменты инерции J_1 и J_2, а затем и величину приведенного модуля упругости E^* как функцию модулей E и E_1. Так, например, для прямоугольного сечения

$$E^* = \frac{4EE_1}{(\sqrt{E}+\sqrt{E_1})^2}. \qquad (27.19')$$

Из равенств (27.19) и (27.19′) видно, что при критических напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала (т. е. при упругой деформации, когда $E_1=E$), приведенный модуль $E^*=E$.

Для материала с ясно выраженной площадкой текучести при приближении величины критических напряжений к пределу текучести E_1 и E^* стремятся к нулю. Это означает, что в таком случае критические напряжения не могут превысить предела текучести материала.

Так как определение величины E^*, зависящей от исходного критического напряжения, связано с большими вычислительными трудностями, формула Энгессера — Кармана не нашла применения в практических расчетах, тем более, что она приводит к завышенным значениям критических напряжений по сравнению с опытными.

Лишь после опубликования работ Ф. Шенли, выдвинувшего новый подход к рассмотрению процесса потери устойчивости при упруго-пластической деформации сжатого стержня (1946 г.), стало возможным *обобщение* формулы Эйлера и на неупругую область. Рассматривая потерю устойчивости как процесс, происходящий в движении при непрерывном возрастании сжимающих сил, Шенли по существу вновь возвратился к считавшейся неверной первоначальной формуле Энгессера (27.18) с касательным модулем упругости E_1 (поскольку при малом искривлении оси стержня в момент потери устойчивости возрастание сил P на величину ΔP снимает разгрузку волокон на выпуклой стороне вследствие дополнительного сжатия).

Переход к обобщенной формуле (27.18) значительно упростил вычисление критических напряжений для стержней, потеря устойчивости которых сопровождается возникновением пластической деформации. На основании экспериментальных данных о величинах E_1, соответствующих различным значениям $\sigma_к$, превышающим $\sigma_п$, и на базе современной вычислительной техники в настоящее время получены теоретические значения критических напряжений для стержней средней и малой гибкости из разных строительных материалов. Полученные данные хорошо согласуются с результатами экспериментальных исследований.

Б. Первые *экспериментальные* исследования устойчивости сжатых стержней имели целью проверку формулы Эйлера. Для длинных (гибких) стержней она полностью подтвердилась, но для коротких (как это ясно из теоретических соображений) приводила к резкому расхождению с результатами опытов. На базе подобных опытов, нередко проводившихся довольно небрежно, были предложены различные эмпирические формулы для критических напряжений, в большей части недостаточно обоснованные. Однако по мере совершенствования техники эксперимента качество их улучшалось.

Особенно тщательно были проведены обширные опыты Тетмайера (1896 г.), охватившие широкий круг материалов. Результаты этих опытов были обработаны Ф. Ясинским, составившим таблицу «ломающих» (критических) напряжений в зависимости от гибкости стержней из основных строительных материалов.

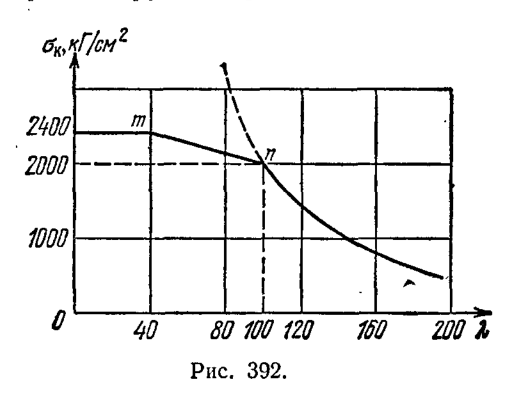


Рис. 392.

Все опыты показали, что короткие стержни с гибкостью $\lambda=30\div40$ теряют несущую способность не из-за нарушения устойчивости их прямолинейной формы, а вследствие нарушения прочности материала при сжатии по достижении опасных для него напряжений σ_0 (напомним, что $\sigma_0=\sigma_т$ при пластичном состоянии материала и $\sigma_0=\sigma_в$ — при хрупком). Поэтому можно считать, что для стержней малой гибкости критические напряжения практически близки: для пластичных материалов — к пределу текучести $\sigma_т$, а для хрупких — к пределу прочности $\sigma_в$.

Что касается стержней средней гибкости, наиболее широко применяемых в конструкциях, то опытами было установлено, что потеря их несущей способности определяется *нарушением устойчивости* прямолинейной формы при напряжениях $\sigma_к$, превышающих предел пропорциональности $\sigma_п$, но меньших, чем σ_0.

Для таких стержней закон изменения критических напряжений в зависимости от гибкости близок к прямолинейному. Так, например, по эмпирической формуле Тетмайера — Ясинского

$$\sigma_к=a-b\lambda, \tag{27.20}$$

где a и b — коэффициенты, зависящие от материала и подбираемые так, чтобы при гибкости $\lambda=\lambda_{пред}$, $\sigma_к=\sigma_п$, а при малых гибкостях $\sigma_к$ мало отличалось от σ_0.

По этим данным на рис. 392 построен полный график критических напряжений для малоуглеродистой стали с пределом пропорциональности $\sigma_п=2000$ *кГ/см²* и пределом текучести $\sigma_т=2400$ *кГ/см²*. График состоит из трех частей: гиперболы Эйлера при $\lambda>\lambda_{пред}=100$ (справа), горизонтального участка при $\lambda\leqslant 40$, где $\sigma_к\approx\sigma_т$ (слева), и наклонной прямой (27.20) при $40\leqslant\lambda\leqslant 100$ (соединяющей точки m и n). Чтобы избежать резких переломов в ходе графика $\sigma_к=f(\lambda)$ в точках m и n, можно воспользоваться эмпирической формулой Джонсона, дающей для неупругой области изменение $\sigma_к$ по параболическому закону

$$\sigma_к=\sigma_0-\alpha\lambda^2. \qquad (27.20')$$

Здесь при $\lambda=0$ $\sigma_к=\sigma_0$, а при $\lambda=\lambda_{пред}$ $\sigma_к\approx\sigma_п$, причем коэффициент α подбирается из условия плавного сопряжения параболы (27.20') с гиперболой Эйлера (общая касательная). Так, например, для строительной стали с пределом текучести $\sigma_т=2800$ *кГ/см²* $\alpha=0{,}09$.

Таким образом, пользуясь обобщенной теоретической формулой (27.19), либо комбинируя формулу Эйлера с результатами опытов, можно построить полный график критических напряжений для стержней из разных материалов и найти значения $\sigma_к$ при любой их гибкости.

§ 158. Проверка сжатых стержней на устойчивость

В § 154 мы отметили, что для сжатых стержней должны быть произведены две проверки:

на прочность

$$\sigma=\frac{P}{F_{нет}}\leqslant[\sigma], \quad где \quad [\sigma]=\frac{\sigma_0}{k_0};$$

на устойчивость

$$\sigma=\frac{P}{F_{бр}}\leqslant[\sigma_у], \quad где \quad [\sigma_у]=\frac{\sigma_к}{k_у}.$$

Построив полный график критических напряжений для стержней любой гибкости (§ 157), мы можем построить и график допускаемых напряжений на устойчивость для данного материала, уменьшив ординаты $\sigma_к$ в $k_у$ раз $\left([\sigma_у]=\frac{\sigma_к}{k_у}\right)$.

Остается лишь выбрать коэффициент запаси $k_у$. Учитывая ряд неизбежных при осевом сжатии стержня несовершенств (начальная кривизна, наличие эксцентриситета и др.), существенно сказывающихся на несущей способности стержня, коэффициент запаса на устойчивость выбирают выше коэффициента записи на прочность k_0. В нашей практике он принимается: для стали от 1,8 до 3,5, для чугуна от 5,0 до 5,5, для дерева от 2,8 до 3,2 и т. д.

На рис. 393 приведен график допускаемых напряжений на устойчивость и коэффициентов запаса для малоуглеродистой стали с пределом текучести $\sigma_т=2400$ *кГ/см²*.

Чтобы установить связь между допускаемым напряжением на устойчивость $[\sigma_у]$ и допускаемым напряжением на прочность $[\sigma]$, возьмем их отношение

$$\frac{[\sigma_у]}{[\sigma]}=\frac{\sigma_к k_0}{k_у \sigma_0}, \quad \text{или} \quad [\sigma_у]=\frac{\sigma_к}{\sigma_0}\cdot\frac{k_0}{k_у}[\sigma].$$

Обозначая

$$\varphi=\frac{\sigma_к}{\sigma_0}\cdot\frac{k_0}{k_у}, \tag{27.21}$$

получим

$$[\sigma_у]=\varphi[\sigma]; \tag{27.22}$$

здесь φ — *коэффициент уменьшения* основного допускаемого напряжения для сжатых стержней.

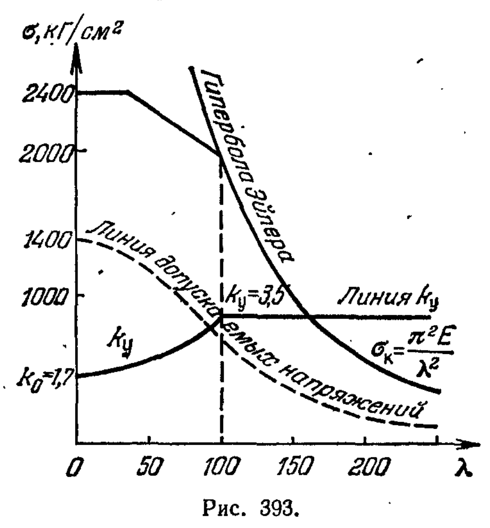


Рис. 393.

Имея график зависимости $\sigma_к$ от λ для данного материала, зная $\sigma_0=\sigma_т$ или $\sigma_0=\sigma_в$ и выбрав коэффициенты запаса на прочность k_0 и на устойчивость $k_у$, можно составить таблицы значений коэффициента φ в функции от гибкости.

В таблице 19 приводятся данные о коэффициентах φ для строительных сталей, рекомендуемые последними Нормами на проектирование металлических конструкций (СНиП. IIВ3-72). В той же таблице приведены значения коэффициентов уменьшения основных

Таблица 19

Значения коэффициентов φ

Гибкость $\lambda=\frac{\mu l}{i}$	Для строительных сталей			Для стали СПК	Для чугуна	Для дерева
	С-38/23	С-44/29	С-46/33			
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,988	0,987	0,986	0,97	0,97	0,99
20	0,970	0,968	0,965	0,95	0,91	0,97
30	0,943	0,935	0,932	0,91	0,81	0,93
40	0,905	0,892	0,888	0,87	0,69	0,87
50	0,867	0,843	0,837	0,83	0,57	0,80
60	0,820	0,792	0,780	0,79	0,44	0,71
70	0,770	0,730	0,710	0,72	0,34	0,60
80	0,715	0,660	0,637	0,65	0,26	0,48
90	0,655	0,592	0,563	0,55	0,20	0,38
100	0,582	0,515	0,482	0,43	0,16	0,31
110	0,512	0,440	0,413	0,35	—	0,25
120	0,448	0,383	0,350	0,30	—	0,22
130	0,397	0,330	0,302	0,26	—	0,18
140	0,348	0,285	0,256	0,23	—	0,16
150	0,305	0,250	0,226	0,21	—	0,14
160	—	—	—	0,19	—	0,12
170	—	—	—	0,17	—	0,11
180	—	—	—	0,15	—	0,10
190	—	—	—	0,14	—	0,09
200	—	—	—	0,13	—	0,08

допускаемых напряжений[1]) для сталей повышенного качества, чугуна и дерева (сосна). Нормы строительного проектирования рекомендуют производить вычисление коэффициентов φ для дерева по формулам

$$\text{при гибкости } \lambda \leqslant 75 \qquad \varphi = 1 - 0{,}8\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2;$$

$$\text{при гибкости } \lambda > 75 \qquad \varphi = \frac{3100}{\lambda^2}.$$

Получаемые по этим формулам значения коэффициентов φ весьма близки к приведенным в таблице.

Пользуясь этой таблицей, можно произвести подбор сечения сжатого стержня. Так как величина площади сечения зависит от $[\sigma_y]$, а это напряжение в свою очередь через коэффициент φ связано

---

[1]) Принятые в Нормах наименовании сталей соответствуют значениям временного сопротивления (числитель) и предела текучести (знаменатель) в $кГ/мм^2$. Применение в несущих стальных конструкциях сжатых стержней с гибкостью $\lambda > 150$ нормами не разрешается.

В расчетах, ведущихся по предельному состоянию (см. гл. XXVI), коэффициенты φ рассматриваются как коэффициенты уменьшения нормативной нагрузки.

с гибкостью стержня λ, т. е. с формой и размерами его сечения, то подбор приходится осуществлять путем последовательных приближений в таком, например, порядке.

Выбираем форму сечения и задаемся его размерами; вычисляем наименьший радиус инерции и гибкость; находим по таблице коэффициент φ и вычисляем допускаемое напряжение на устойчивость $[\sigma_у]=\varphi[\sigma]$; сравниваем действительное напряжение $\sigma=P/F_{бр}$ с величиной $[\sigma_у]$; если условие устойчивости

$$\sigma=\frac{P}{F_{бр}}\leqslant\varphi[\sigma] \tag{27.23}$$

не удовлетворено, или удовлетворено с большим запасом, меняем размеры сечения и повторяем расчет. Конечно, окончательно выбранное сечение должно удовлетворять и условию прочности

$$\sigma=\frac{P}{F_{нет}}\leqslant[\sigma].$$

В практических расчетах условие устойчивости иногда записывается так:

$$\sigma_у=\frac{P}{\varphi F_{бр}}\leqslant[\sigma]. \tag{27.23'}$$

В левой части $\sigma_у$ представляет собой расчетное (условное) напряжение.

Ход вычислений покажем на примере.

Пусть надо подобрать сечение шарнирно-опертой по концам чугунной трубчатой колонны, несущей сжимающую нагрузку $P=85$ *Т* при отношении внутреннего диаметра к наружному $d/D=0{,}6$. Длина колонны $l=4{,}8$ *м*. Основное допускаемое напряжение на сжатие чугуна принято $[\sigma]=1200$ *кГ/см*^{2}.

Для выполнения расчетов по подбору сечения выразим площадь F и радиус инерции i через диаметр D:

$$F=\frac{\pi(D^2-d^2)}{4}=\frac{\pi}{4}(D^2-0{,}36D^2)=0{,}503D^2, \tag{а}$$

$$i=\sqrt{\frac{J}{F}}=\sqrt{\frac{\pi(D^4-d^4)}{64\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)}}=\sqrt{\frac{D^2+d^2}{16}}=0{,}291D. \tag{б}$$

В условии устойчивости (27.23) нам не известны ни площадь сечения F, ни коэффициент снижения допускаемых напряжений φ. Поэтому одной из этих величин необходимо предварительно задаться. Для первого приближения зададимся коэффициентом $\varphi=0{,}5$. Тогда

$$F\geqslant\frac{P}{\varphi[\sigma]}=\frac{85\,000}{0{,}5\cdot1200}=142\ см^2.$$

Диаметр по первому приближению из (а) $D_1=\sqrt{142/0{,}503}=19$ *см*. Радиус инерции из (б) $i_1=0{,}291\,D_1=0{,}291\cdot19=5{,}5$ *см*. Гибкость $\lambda_1=\mu l/i_1=480/5{,}5=87{,}5$. По таблице путем интерполяции между $\lambda=80$ и $\lambda=90$ вычисляем $\varphi=0{,}215$.

Расчетные напряжения по формуле (27.23) будут

$$\sigma_y=\frac{P}{\varphi [F]}=\frac{85\,000}{0,215\cdot 142}=2800\ кГ/см^2 > [\sigma].$$

Сечение условию устойчивости не удовлетворяет. Поэтому для второго приближения примем диаметр $D_2=25$ *см*. Площадь сечения $F_2=0,503\cdot D_2^2=0,503\cdot 25^2=$ $=314$ *см*^{2}. Радиус инерции $i_2=0,291\cdot 25=10,2$ *см*. Гибкость $\lambda_2=l/i_2=480/10,2=47$ и $\varphi=0,654$. Напряжения

$$\sigma_y=\frac{P}{\varphi F}=\frac{85\,000}{0,654\cdot 314}=410\ кГ/см^2 \ll 1200\ кГ/см^2.$$

При диаметре $D_1=19$ *см* напряжения значительно выше допускаемых, а при $D_2=$ $=25$ *см* — значительно ниже. Испробуем для третьего приближения сечение с диаметром $D=22$ *см*. В этом случае: $F=0,503\cdot 22^2=245$ *см*^{2}; $i=0,291\cdot 22=6,4$ *см*; $\lambda=$ $=480/6,4=75$; $\varphi=0,30$ и расчетные напряжения

$$\sigma_y=\frac{85\,000}{0,30\cdot 245}=1150\ кГ/см^2 < 1200\ кГ/см^2.$$

На этом и остановимся, недонапряжение менее 5%.

§ 159. Выбор типа сечения и материала

А. Так как в сопротивлении стержней продольному изгибу (нарушению устойчивости) основную роль играет гибкость стержня, а стало быть, величина наименьшего радиуса инерции сечения, то очень существенным является вопрос не только о величине площади стержня, как при расчете на прочность, но и о *форме* поперечного сечения.

Для наиболее экономичного решения вопроса необходимо конструировать сечение, у которого при определенной площади величина наименьшего радиуса инерции была бы возможно большей. Для этого прежде всего следует стремиться к тому, чтобы *наименьший радиус инерции был равен наибольшему*, т. е. чтобы все центральные моменты инерции сечения были равны, эллипс инерции обратился бы в круг. Такой стержень будет оказывать одинаковое сопротивление потере устойчивости в любом направлении.

Если свободная длина стержня (§ 156) при возможном искривлении в обеих главных плоскостях будет различна, то и главные моменты инерции тоже целесообразно выбрать разными с таким расчетом, чтобы коэффициенты φ были в обоих случаях одинаковыми.

Далее необходимо стремиться к получению при данной площади наибольших центральных моментов инерции. Для этого надо разместить материал сечения по возможности дальше от центра тяжести. Обоим поставленным условиям вполне удовлетворяет, например, трубчатое сечение (рис. 394, *а*), которое очень часто и применяется для сжатых колонн и стоек.

Низший предел толщины стенок такого сечения определяется или возможностью конструктивного выполнения отливки (чугун),

или тем, чтобы при работе стержня не произошло *местных* деформаций тонкой стенки — ее коробления.

Для предотвращения таких местных повреждений, чтобы обеспечить при работе стержня сохранение принятой формы сечения (кольцо), внутри трубчатого стержня располагают систему усилений, например, на некотором расстоянии друг от друга ставят так называемые диафрагмы, придающие жесткость тонкостенному профилю (рис. 394, *б*). Вообще при правильном конструировании сжатых стержней устройство дополнительных креплений играет весьма большую роль.

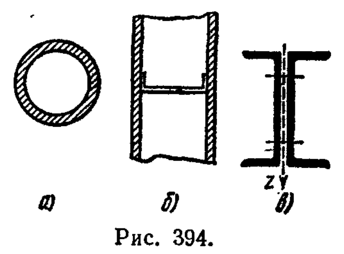


Рис. 394.

Некоторые виды сечений, прекрасно сопротивляющиеся изгибу в одной плоскости, как это бывает при работе балок, оказываются очень невыгодными при применении их для сжатых стержней; такими, например, являются двутавровое сечение, сечение из двух швеллеров, стенки которых примкнуты вплотную одна к другой (рис. 394, *в*).

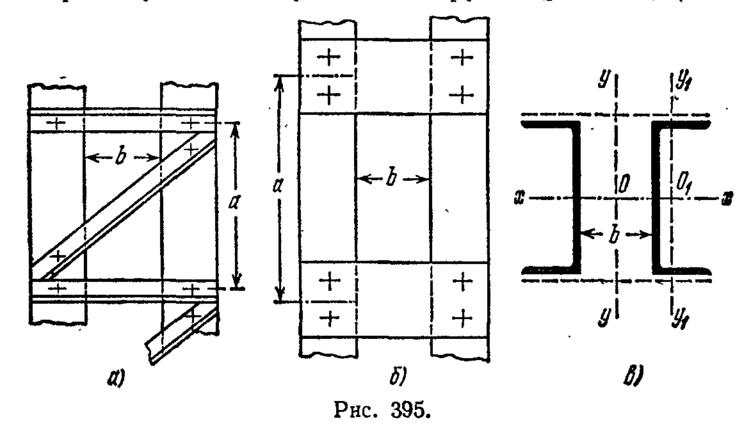


Рис. 395.

Невыгодность подобных сечений при работе на продольный изгиб обусловливается большой разницей в величинах их главных моментов инерции. Чтобы избежать этого недостатка, можно раздвинуть обе половинки сечения из двух швеллеров, как это показано на рис. 395, *в*; для того чтобы заставить все сечение работать как одно целое, их соединяют при помощи так называемой соединительной решетки (рис. 395).

Необходимым условием безопасной работы таких составных стержней является устройство достаточно мощного крепления (решетки, состоящей из уголков или планок), чтобы действительно обеспечить совместную работу всех несущих элементов (ветвей) сечения.

Так, например, если два мощных швеллера (рис. 395, *в*) скрепить недостаточно мощной решеткой, то она не сможет заставить их работать совместно[1]). Каждая половина стержня будет работать самостоятельно, устойчивость ее окажется во много раз меньше устойчивости стержня, в котором обе половины представляют собой одно целое.

Недостаточное внимание к устройству надежных креплений в составных стержнях было причиной серьезных катастроф.

При рациональном конструировании составного стержня следует так расположить элементы сечения, чтобы моменты инерции относительно обеих главных осей были примерно равны (разумеется, элементы соединительной решетки в состав сечения не включаются). Обычно даже стремятся момент инерции относительно оси, перпендикулярной к плоскости решетки, сделать несколько бо́льшим, так как решетка не может обеспечить совместную работу обеих половин стержня так же хорошо, как если бы сечение представляло собой одно целое.

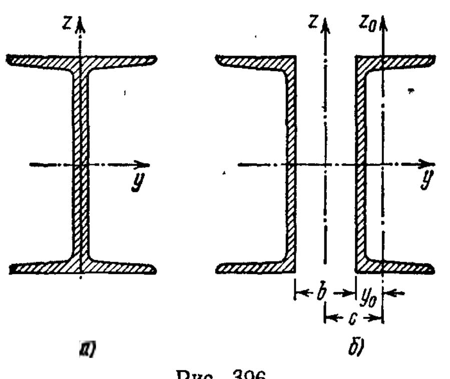


Рис. 396.

Ниже покажем на примере, как можно повысить устойчивость составного сжатого стержня путем рационального размещения элементов сечения. Пусть необходимо сконструировать сечение из двух швеллеров (сталь С-38/23) для сжатой стойки длиной $l=4$ *м*, шарнирно-закрепленной по концам.

Сравним величину наибольшей допускаемой (по условию устойчивости) силы, сжимающей стойку, составленную из двух швеллеров № 30 (см. приложение). Рассмотрим два варианта сечения: в первом — оба швеллера скреплены между собой по всей длине стенками вплотную в виде двутавра (рис. 396, *а*); во втором швеллеры соединены между собой решеткой и расставлены так, чтобы обеспечить равенство моментов инерции сечения относительно обеих главных осей инерции (рис. 396, *б*). Основное допускаемое напряжение на сжатие принято $[\sigma]=1600$ *кГ/см*^{2}.

Для первого варианта (без просвета между швеллерами) наименьший момент инерции сечения

$$J_{\min}=J_z=2\,(327+40{,}5\cdot 2{,}52^2)=1168\ см^4.$$

Площадь составного сечения $F=2\cdot 40{,}5=81$ *см*^{2}. Радиус инерции сечения $i=\sqrt{J/F}=\sqrt{1168/81}=3{,}8$ *см*. Гибкость стержня $\lambda=\mu l/i=400/3{,}8=105$.

По данным таблицы 19, интерполяцией между значениями коэффициента φ для $\lambda=100$ и $\lambda=110$ находим $\varphi=0{,}547$. Наибольшая сжимающая нагрузка, которую можно безопасно приложить к стойке, будет

$$P_1=[\sigma]\,F\varphi=1600\cdot 81\cdot 0{,}547=70\,800\ кГ\approx 71\ Т.$$

[1]) Приемы расчета и методы назначения размеров соединительной решетки для составных сжатых стержней приводятся в курсах металлических конструкций. См. также Беляев Н. М. Сопротивление материалов, «Наука», 1965, § 212.

Для второго варианта (с просветом между швеллерами) имеем: момент инерции составного сечения (рис. 396, *б*)

$$J_y = J_z = 2 \cdot 5810 = 11\ 620\ см^4;$$

радиус инерции $i = \sqrt{11\ 620/81} = 12$ *см*; гибкость стержня $\lambda = l/i = 400/12 = 33{,}3$ и коэффициент $\varphi = 0{,}931$.

Допускаемая нагрузка на стержень в этом варианте может быть принята равной $P_2 = [\sigma]F\varphi = 1600 \cdot 81 \cdot 0{,}931 = 120\ 900\ кГ \approx 121\ Т$, т. е. в 1,7 раза более, чем в первом случае. Таким образом, рациональный выбор формы сечения позволил повысить несущую способность сжатой стойки на 70%.

Совместная работа составного стержня из двух ветвей (два швеллера) будет обеспечена лишь при надежном соединении их с помощью решетки или планок (рис. 395, *а* и *б*). Расстояния *а* между соединительными элементами должны быть выбраны так, чтобы отдельная ветвь не выпучилась в плоскости наименьшей жесткости сечения ветви. Это условие будет обеспечено, если гибкость отдельной ветви (в данном случае одного швеллера) на длине *а* будет не больше гибкости всей стойки. Следовательно,

$$\lambda_{ветви} = \frac{a}{i_{min}} \leqslant \lambda_{стойки}.$$

Для одного швеллера наименьший радиус инерции равен $i_{min} = 2{,}84$ *см*. Следовательно,

$$a = \lambda_y i_{min} = 33{,}3 \cdot 2{,}84 = 94{,}6\ см.$$

Значит, расстояние между соединительными планками должно быть не более 94,6 *см*.

Что касается расстояния *b* между швеллерами в сечении (рис. 396, *б*), то оно найдется из условия, что $J_z \geqslant J_y$, или

$$J_z = 2\left[J_z^0 + F_0 c^2\right] \geqslant 2J_y^0.$$

Здесь J_z^0 и J_y^0 — собственные центральные моменты инерции одного швеллера, F_0 — его площадь. Таким образом,

$$c = \sqrt{\frac{J_y^0 - J_z^0}{F_0}} = \sqrt{\frac{5810 - 327}{40{,}5}} = 11{,}6\ см.$$

Так как $b = 2(c - y_0)$, а по сортаменту $y_0 = 2{,}52$ *см*, то $b = 2(11{,}6 - 2{,}52) = 18{,}2$ *см*.

Б. Что касается выбора материала сжатых стержней, то это обусловливается следующими соображениями. Пока критические напряжения не превосходят предела пропорциональности материала, единственной механической характеристикой, определяющей сопротивляемость стержня потере устойчивости, является модуль упругости *E*. Между тем для стержней средней и в особенности малой гибкости величина критических напряжений зависит в значительной степени от предела текучести или предела прочности материала. Этими обстоятельствами и следует руководствоваться при выборе материала для сжатых стержней большой и малой гибкости.

Так, например, применение специальных сортов стали повышенной прочности для тонких и длинных сжатых стержней не имеет смысла, так как модуль *E* для всех сортов стали примерно один и тот же. Наоборот, применение высокосортных сталей окажется очень уместным для стержней с критическими напряжениями, пре-

вышающими предел пропорциональности, ибо для таких стержней увеличение предела текучести вызовет рост критических напряжений, а стало быть, повысит сопротивление нарушению устойчивости.

На рис. 397 показано примерное расположение графиков, выражающих зависимость критических напряжений от гибкости для строительных сталей — малоуглеродистой С-38/23 и более прочной С-46/33, пределы текучести которых соответственно равны 2300 и 3300 $кГ/см^2$.

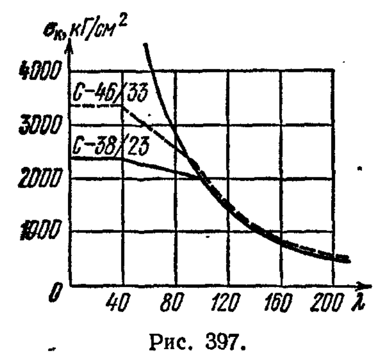


Рис. 397.

Из графиков видно, что для стержней большой гибкости (превышающей $\lambda=100$) критические напряжения, ограниченные гиперболой Эйлера (27.12), для обеих сталей одинаковы, так как одинаковы для этих сталей модули упругости E, от которых $\sigma_к$ зависит; примерно одинаковыми будут и допускаемые напряжения на устойчивость. Для стержней же малой и средней гибкости критические, а следовательно, и допускаемые напряжения на устойчивость для стали С-46/33 оказываются значительно выше, чем для малоуглеродистой стали С-38/23.

Из сказанного ясно, что применение в конструкциях высокопрочной стали для сжатых стержней большой гибкости практически выгод не приносит. Наоборот, применение более прочной стали для стержней с меньшими гибкостями может дать существенную экономию материала.

§ 160. Практическое значение проверки на устойчивость

Для инженера-практика значение проверки на устойчивость громадно. Можно сказать, что почти все значительные катастрофы инженерных сооружений произошли вследствие нарушения устойчивости сжатых элементов сооружений. Хотя с подобными катастрофами инженеры встречаются давно, однако не всегда правильно оценивают их причины. Это показывает, что инженеры-практики часто не вполне ясно представляют себе, какую роль могут играть маловажные, казалось бы, обстоятельства при работе сжатых стержней.

Особая опасность потери устойчивости заключается в том, что обычно она наступает *внезапно*. Почти до наступления критического значения сжимающей силы деформации сооружения не бросаются в глаза и не вызывают опасения. Далее, как уже указывалось, ряд обстоятельств — эксцентриситет нагрузки, начальная кривизна

стержня, местные повреждения материала — может весьма значительно понизить сопротивление сжатых стержней, в то время как те же факторы почти не отражаются на работе других элементов конструкции.

Особенно следует обратить внимание на достаточность и тщательность соединения частей сжатого стержня при составных сечениях. Недооценка этого фактора вела в прошлом к тягчайшим катастрофам, особенно частым при строительстве больших мостов.

Современный инженер имеет в своем распоряжении все средства для того, чтобы при внимательном проектировании и тщательном выполнении конструкции подобные аварии были исключены. Теория расчета при проверке устойчивости, как это показано выше (§§ 154—159), разработана достаточно надежно.

В несколько особом положении находятся расчеты на устойчивость в машиностроении. Здесь особое значение приобретает вопрос о выборе основного допускаемого напряжения $[\sigma]$. При назначении его величины не следует забывать о том, что такие детали машин, как штоки, шатуны, подвергаются интенсивной динамической нагрузке. Поэтому в формуле для вычисления допускаемого напряжения на устойчивость

$$[\sigma_у] = \varphi[\sigma]$$

под $[\sigma]$ следует подразумевать допускаемое напряжение на прочность при динамической нагрузке (см. следующий отдел — главу XXIX).

Уже в § 154 указывалось на аналогию между внезапным ростом деформаций при переходе напряжений за предел текучести и столь же внезапным увеличением прогибов при переходе за критическое напряжение. Эта аналогия приводит к мысли, что в статически неопределимых конструкциях появление критических напряжений в сжатом стержне может еще не вызвать разрушения конструкции, особенно если эти напряжения лежат в пределах упругости.

Подобный случай мы имеем в старых многорешетчатых фермах мостов при работе их под современную более тяжелую нагрузку. Часть раскосов в таких фермах может оказаться сжатой эйлеровыми критическими силами и находиться в состоянии упругого выпучивания. Работу этих раскосов возьмут на себя встречные растянутые раскосы. По удалении нагрузки конструкция вернется к первоначальному виду.

Такие же случаи имеют место в самолетостроении и судостроении, где приходится иметь дело с потерей устойчивости не только стержней, но и балок, пластинок и оболочек. Таким образом, на практике могут быть случаи, когда можно допустить в сжатом элементе критические напряжения, если они не превышают предела упругости при условии, что конструкция статически неопределима, и работу выбывшего из строя элемента возьмут на себя другие части.

Ниже мы рассмотрим некоторые более сложные задачи проверки элементов конструкций на устойчивость.

Глава XXVIII

БОЛЕЕ СЛОЖНЫЕ ВОПРОСЫ ПРОВЕРКИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

§ 161. Устойчивость плоской формы изгиба балок

С явлением потери устойчивости мы встречаемся на практике не только в случае простого сжатия стержней. Потерять устойчивость заданной формы равновесия может и балка, работающая на изгиб, например двутаврового сечения (рис. 398).

Нижний пояс такой балки представляет собой стержень, сжатый продольным усилием и прикрепленный к стенке балки. Это прикрепление не позволяет поясу выпучиться в плоскости стенки; но возможно такое соотношение размеров балки, при котором сжатый пояс сможет выпучиться в сторону, что влечет за собой повороты сечений и скручивание балки (рис. 398). Вместо работы на изгиб в плоскости наибольшей жесткости, как это было назначено конструктором, балка в целом ряде сечений начнет работать на *косой изгиб*, что вызовет резкий рост деформаций, а в дальнейшем — полное разрушение конструкции.

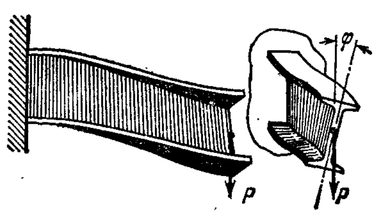


Рис. 398.

Устойчивость балки зависит от размеров поперечного сечения и от ее свободной длины. Поэтому на практике ограничивают эту длину, устраивая связи между балками. Недостаточное внимание к этим боковым креплениям при длинных одиночных балках даже малой высоты может повести к серьезным катастрофам (например, обрушение моста близ Тарба во Франции).

Потеря устойчивости может грозить и сжатым тонким пластинкам, т. е. тем элементам конструкции, у которых один размер мал по сравнению с другими. Так может покоробиться тонкий и широкий лист сжатого пояса двутавровой балки, может выпучиться недостаточно укрепленная уголками жесткости стенка и др.

Приведем приближенное определение величины критического груза для балки, при котором плоская форма изгиба становится неустойчивой и дальнейшее увеличение которого ведет к разрушению балки за счет бокового выпучивания. Рассмотрим балку на двух опорах с поперечным сечением в виде узкого прямоугольника (рис. 399) под действием поперечной силы P.

Пусть сила достигла критического значения и балка слегка выпучилась вбок, как это показано в плане и в разрезе на рис. 399, не уходят из начальной плоскости только концы балки A и B, надлежащим образом закрепленные.

С появлением боковых деформаций потенциальная энергия балки должна возрастать за счет деформации изгиба в боковом направлении и деформации кручения (энергию деформации изгиба в вертикальной плоскости можно считать неизмен-

ной). Одновременно с этим потенциальная энергия груза уменьшается вследствие опускания точки его приложения.

Обозначим потенциальную энергию бокового изгиба U_1, кручения U_2 и работу при дополнительном опускании груза за счет бокового выпучивания балки U_p.

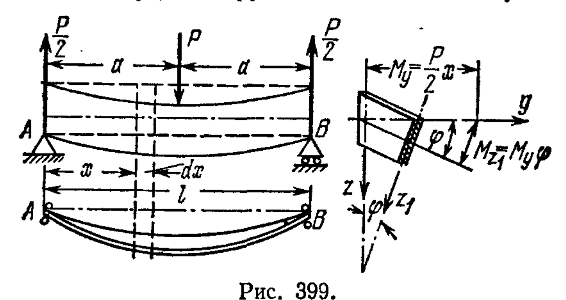


Рис. 399.

Так как при действии критической силы переход от плоской формы изгиба к боковому выпучиванию сопровождается переходом энергии груза в потенциальную энергию деформации балки, то можем считать, что

$$U_1+U_2=U_p. \tag{28.1}$$

Потенциальная энергия бокового изгиба (относительно оси z_1) равна (§ 63)

$$U_1=\int\limits_l \frac{M^2(x)\,dx}{2EJ_z};$$

здесь изгибающий момент в произвольном сечении, взятом на расстоянии x от левой опоры, будет (по малости угла поворота сечения φ)

$$M(x)=\frac{P}{2}x\cdot\sin\varphi\approx\frac{P}{2}\cdot x\cdot\varphi.$$

Подставляя значение изгибающего момента, получим

$$U_1=\frac{P^2}{8EJ_z}\cdot\int\limits_l x^2\varphi^2\,dx=\frac{P^2}{4EJ_z}\cdot\int\limits_0^{l/2} x^2\varphi^2\,dx. \tag{28.2}$$

Потенциальную энергию кручения также выразим через угол φ. Работа крутящего момента на длине dx будет

$$dU_2=\frac{M_к\,d\varphi}{2},\quad \text{где}\quad d\varphi=\frac{M_к\,dx}{GJ_к}.$$

Имея в виду, что

$$M_к=GJ_к\frac{d\varphi}{dx},\quad \text{а}\quad d\varphi=\frac{d\varphi}{dx}\cdot dx,$$

получим

$$dU_2=\frac{GJ_к}{2}\cdot\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dx}\,dx=\frac{GJ_к}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2dx.$$

Потенциальная энергия кручения, накопленная при боковом выпучивании балки, равна

$$U_2=\frac{GJ_к}{2}\int\limits_l\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2dx=GJ_к\int\limits_0^{l/2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2dx. \tag{28.3}$$

Чтобы найти работу, совершаемую грузом P при его опускании, найдем вертикальное перемещение точки его приложения (рис. 400). Заметим при этом, что смещение точки O в положение O_1 вызывается совокупностью двух причин: поворотом сечения вокруг точки O на угол φ и боковым перемещением в направлении оси Oy_1.

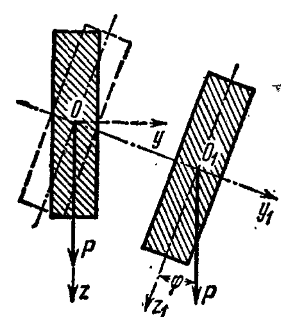


Рис. 400.

Так как при повороте сечения опускания точки O не происходит, то, очевидно, причиной опускания точки приложения силы P является боковой изгиб балки из плоскости xOz.

Величину вертикального перемещения точки O найдем по теореме Кастильяно из выражения (28.2)

$$\delta=\frac{\partial U_1}{\partial P}=\frac{P}{2EJ_z}\cdot\int\limits_0^{l/2} x^2\varphi^2\,dx. \qquad (28.4)$$

Отсюда работа силы P (достигшей в момент начавшегося бокового перемещения значения $P_к$) на перемещении δ будет

$$U_P=P\delta=\frac{P^2}{2EJ_z}\int\limits_0^{l/2} x^2\varphi^2\,dx.$$

Подставляя теперь значения U_1, U_2 и U_P в исходное уравнение (28.1), получим

$$\frac{P^2}{4EJ_z}\int\limits_0^{l/2} x^2\varphi^2\,dx+GJ_к\int\limits_0^{l/2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2dx=\frac{P^2}{2EJ_z}\int\limits_0^{l/2} x^2\varphi^2\,dx,$$

откуда

$$\frac{P^2}{4EJ_z}\int\limits_0^{l/2} x^2\varphi^2\,dx=GJ_к\int\limits_0^{l/2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2dx.$$

Обозначая жесткость при изгибе $EJ_z=C_1$, а при кручении $GJ_к=C_2$, получим для критического значения P:

$$P_к^2=4C_1C_2\,\frac{\int\limits_0^{l/2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2dx}{\int\limits_0^{l/2} x^2\varphi^2\,dx}. \qquad (28.5)$$

Под интегралами — две переменных φ и x, связанных между собой, так как углы поворота сечений φ изменяются по длине x, т. е. $\varphi=\varphi(x)$. Закон изменения φ в зависимости от x нам неизвестен. Пользуясь методами приближенного решения, зададимся для φ каким-либо уравнением, связывающим его с x так, чтобы были удовлетворены условия закрепления концов балки. Положим, например,

$$\varphi=k\cdot\sin\frac{\pi x}{l}. \qquad (28.6)$$

При $x=0$ $\varphi=0$, при $x=l/2$ $\varphi=\varphi_{max}$ и при $x=l$ $\varphi=0$. Таким образом, эта функция обращается в нуль на опорах (где углы поворота сечений равны нулю по условиям закрепления) и достигает максимума посредине пролета, т. е. удовлетворяет условиям деформации нашей балки.

Подставляя значение φ и ее производной под знаки интегралов в уравнение (28.5), получим

$$P_{\text{к}}^2 = 4C_1C_2 \cdot \frac{k^2\pi^2 \int\limits_0^{l/2} \cos^2\frac{\pi x}{l}\,dx}{k^2l^2 \int\limits_0^{l/2} x^2\sin^2\frac{\pi x}{l}\,dx}.$$

Проинтегрировав, найдем

$$P_{\text{к}} = \frac{17,2}{l^2}\sqrt{C_1C_2}. \tag{28.7}$$

Точное значение критической силы для балки на двух опорах с прямоугольным поперечным сечением (рис. 399) [1]) выражается формулой

$$P_{\text{к}} = \frac{16,93}{l^2}\sqrt{C_1C_2}.$$

Ошибка приближенного решения составляет около 1,5%. Величина критической силы зависит от произведения жесткости при боковом изгибе балки $C_1 = EJ_z$ и жесткости при кручении $C_2 = GJ_{\text{к}}$.

Если нагрузка равномерно распределена по длине осевой линии, то ее критическое значение равно

$$(ql)_{\text{к}} = \frac{28,3}{l^2}\sqrt{C_1C_2}. \tag{28.8}$$

Для консоли длиной l, загруженной по длине равномерно распределенной нагрузкой, получим

$$(ql)_{\text{к}} = \frac{12,85}{l^2}\sqrt{C_1C_2}. \tag{28.9}$$

Для консоли, несущей груз, приложенный к оси балки на свободном конце:

$$P_{\text{к}} = \frac{4,01}{l^2}\sqrt{C_1C_2}. \tag{28.10}$$

В случае двутавровой балки формулы для критических нагрузок имеют такой же вид, как и для прямоугольного сечения с той разницей, что числовой коэффициент при $\sqrt{C_1C_2}$ не является постоянной величиной, а зависит от сопротивления полок боковому изгибу и определяется отношением

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{l}{h}\right)^2.$$

Здесь h — высота двутавра.

Таким образом, для двутавровой балки

$$P_{\text{к}} = \frac{\beta}{l^2}\sqrt{C_1C_2}, \tag{28.11}$$

где β определяется для каждого значения α. Значения коэффициентов β определены для разных видов нагрузки и приведены в таблице 20.

---

[1]) Timoshenko S., Theory of elastic stability, Toronto, 1961.

Таблица 20

Значения β в формуле (28.11)

$\alpha=\frac{C_2}{C_1}\left(\frac{l}{h}\right)^2$	β_1	β_2	β_3	$\alpha=\frac{C_2}{C_1}\left(\frac{l}{h}\right)^2$	β_1	β_2	β_3
1	2	3	4	1	2	3	4
0,1	31,6	86,4	143,0	16	5,08	18,3	30,5
1,0	9,76	31,9	53,0	20	4,85	18,1	30,1
2,0	8,03	25,6	42,6	32	4,50	17,9	29,4
4,0	6,73	21,8	36,3	50	4,35	17,5	29,0
6,0	6,19	20,3	33,8	70	4,10	17,4	28,8
8,0	5,87	19,6	32,6	90	4,04	17,2	28,6
12,0	5,36	18,8	31,5	100	4,04	17,2	28,6

В графе 2 — для консоли, нагруженной силой на конце;
в графе 3 — для балки на двух опорах с силой посредине;
в графе 4 — для балки на двух опорах, равномерно нагруженной.

Как видно из таблицы, значения коэффициента β, по мере увеличения отношения l/h, приближаются к значениям коэффициентов для балки прямоугольного сечения. Для $\alpha=100$ β почти точно совпадает с числовыми коэффициентами для прямоугольных балок.

Для расчета на устойчивость плоской формы изгиба необходимо, чтобы возникающие при изгибе нормальные напряжения не превышали допускаемых напряжений на устойчивость, равных $[\sigma_y]=\sigma_к/k_y$, где k_y — коэффициент запаса.

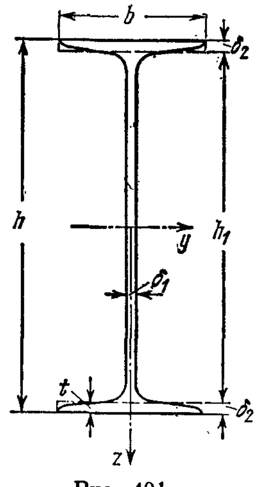


Рис. 401.

Зная величину критической нагрузки для каждого случая загружения балки, мы легко можем определить величину критических напряжений:

$$\sigma_к=\frac{M^к_{max}}{W_y},$$

где $M^к_{max}$ — наибольший изгибающий момент от критической нагрузки, а W_y — момент сопротивления сечения изгибу в плоскости стенки.

Полученные результаты справедливы лишь при условии, что критические напряжения при выпучивании балок не превосходят предела пропорциональности материала.

Если $\sigma_к>\sigma_п$, то выведенные формулы будут давать преувеличенные значения критических напряжений, как и формулы Эйлера для сжатых стержней малой гибкости. Для нахождения действительных критических напряжений при выпучивании балок, когда $\sigma_к>\sigma_п$, следует руководствоваться опытными данными. Можно воспользоваться аналогией со стержнями и полагать, что действительные напряжения находятся в том же отношении с определенными по формулам этого параграфа, в каком находятся действительные с эйлеровыми при $\sigma_к>\sigma_п$ для сжатых колонн.

Рассмотрим следующий пример. Балка двутаврового профиля № 60 (ГОСТ 8240—72) пролетом $l=6$ *м*, лежащая на двух опорах, загружена равномерно распределенной нагрузкой $q=9$ *Т/м*. Проверить прочность балки и устойчивость

плоской формы изгиба при основном допускаемом напряжении $[\sigma]=1600$ *кГ/см²* и коэффициенте запаса на прочность и устойчивость $k=1{,}7$.

Размеры сечения (рис. 401) и геометрические характеристики профиля по сортаменту равны $h=60$ *см*; $b=19$ *см*; $\delta_1=1{,}2$ *см*; $\delta_2=t=17{,}8$ *мм* $\approx 1{,}8$ *см*; $h_1=60-2\times 1{,}8=56{,}4$ *см*; $J_y=76\,800$ *см⁴*; $J_z=1725$ *см⁴*; $W_y=2560$ *см³*.

Момент инерции при кручении ($J_к$) для двутаврового профиля может быть подсчитан по формуле (9.38')

$$J_к=\frac{1}{3}\eta\sum h\delta^3,$$

где для двутавра $\eta=1{,}2$. Подставляя численные значения, получим

$$J_к=\frac{1{,}2}{3}\left(h_1\delta_1^3+2b\delta_2^3\right)=0{,}4\,(56{,}4\cdot 1{,}2^3+2\cdot 19\cdot 1{,}8^3)=127\ см^4.$$

Произведем проверку сечения балки на прочность и устойчивость плоской формы изгиба.

а) *Проверка на прочность*

$$M_{max}=\frac{ql^2}{8}=\frac{9\cdot 6^2}{8}=40{,}5\ Тм=405\cdot 10^4\ кГ\cdot см,$$

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_y}=\frac{405\cdot 10^4}{2560}=1590\ кГ/см^2<1600\ кГ/см^2.$$

б) *Проверка на устойчивость.*

Критическая нагрузка, вызывающая потерю устойчивости плоской формы изгиба, может быть вычислена по формуле (28.11)

$$Q_{кр}=(ql)_{кр}=\frac{\beta}{l^2}\sqrt{C_1C_2},$$

где $C_1=EJ_z$ — жесткость при боковом изгибе; $C_2=GJ_к$ — жесткость при кручении, а β — коэффициент, зависящий от отношения жесткости и от l/h.

Принимая величину модуля упругости для стали $E=2\cdot 10^6$ *кГ/см²*, а модуля сдвига по формуле (6.38) $G=\frac{E}{2(1+\mu)}=\frac{E}{2{,}6}$, получим

$$Q_{кр}=(ql)_{кр}=\frac{\beta}{l^2}\sqrt{C_1C_2}=\frac{\beta E}{l^2}\sqrt{\frac{1725\cdot 127}{2{,}6}}=$$

$$=\beta\frac{2\cdot 10^6}{600^2}\sqrt{84\,100}=\beta 5{,}56\cdot 290=1610\beta.$$

Так как величина коэффициента β определяется в зависимости от отношения

$$\alpha=\frac{C_2}{C_1}\left(\frac{l}{h}\right)^2=\frac{GJ_к}{EJz}\left(\frac{l}{h}\right)^2=\frac{127}{2{,}6\cdot 1725}\left(\frac{600}{60}\right)^2=2{,}84,$$

то, пользуясь таблицей 20 (столбец 4), по интерполяции между значениями $\alpha=2$ и $\alpha=4$ находим $\beta=39{,}4$, а значит, и величину критической нагрузки

$$Q_{кр}=(ql)_{кр}=1610\cdot 39{,}4=63\,400\ кГ.$$

Во избежание бокового выпучивания балки допускаемую нагрузку следует принять равной

$$[Q]=\frac{Q_{кр}}{k}=\frac{63\,400}{1{,}7}=37\,300\ кГ.$$

Интенсивность равномерно распределенной нагрузки при принятом коэффициенте запаса $k=1,7$ должна быть не более

$$q=\frac{[Q]}{l}=\frac{37\,300}{6}=6250 \text{ кГ/м}.$$

Таким образом, надежная работа балки может быть обеспечена лишь при условии уменьшения заданной нагрузки 9 $T/м$ примерно в полтора раза, либо при условии постановки поперечных связей, препятствующих боковому выпучиванию балки (если это по конструкции возможно).

Выясним, как изменится величина критической нагрузки при закреплении середины пролета с помощью поперечной связи. Это равносильно уменьшению свободной длины балки вдвое, что приводит к изменению коэффициентов α и β:

$$\alpha=\frac{C_2}{C_1}\left(\frac{0,5l}{h}\right)^2=\frac{GJ_к}{EJ_z}\cdot 0,25\left(\frac{l}{h}\right)^2=\frac{127\cdot 0,25}{2,6\cdot 1725}\left(\frac{600}{60}\right)^2=0,71.$$

По таблице 20 путем графической интерполяции между значениями $\alpha=0,1$ и $\alpha=1,0$ находим $\beta=0,57$.

Критическая нагрузка

$$Q_{кр}=\frac{\beta}{(0,5l)^2}\sqrt{C_1C_2}=0,57\frac{E}{0,25l^2}\sqrt{\frac{J_zJ_к}{2,6}}=0,57\frac{2\cdot 10^6\cdot 290}{0,25\cdot 600^2}=367\,000 \text{ кГ}.$$

Это соответствует критическим напряжениям

$$\sigma_{кр}=\frac{Q_{кр}l}{8W_y}=\frac{367\,000\cdot 600}{8\cdot 2560}=10\,300 \text{ кГ/см}^2.$$

Полученное значение $\sigma_{кр}$ значительно выше предела пропорциональности материала, вследствие чего формула (28.11) уже неприменима. Найденному значению $\sigma_{кр}$ в действительности соответствует предел текучести материала. Значит, в этом случае достаточно ограничиться проверкой на прочность.

§ 162. Расчет сжато-изогнутых стержней

В главе XXI при изучении совместного действия продольных и поперечных сил мы пользовались принципом независимости и сложения действия сил, складывая напряжения от растяжения или сжатия с напряжениями от изгиба. Условие прочности в этом случае имеет вид

$$\sigma_{max}=\frac{N}{F}+\frac{M_{max}}{W}\leqslant[\sigma]. \qquad (21.1)$$

Предположив, что продольная сила $N=\pm P$ в изгибе не участвует, мы ввели в формулу изгибающий момент M_{max} только от действия поперечных сил. Однако, как мы уже видели при решении задачи Эйлера (§ 155), продольная сжимающая сила P в случае искривления оси стержня создает добавочный изгибающий момент $M_{доб}=|Py|$, вызывающий дополнительные напряжения и перемещения вследствие дополнительного изгиба стержня (рис. 402). Формула для наибольших напряжений в опасном сечении примет вид

$$\sigma_{max}=\left|\frac{P}{F}+\frac{M_{max}}{W}+\frac{Pf}{W}\right|, \qquad (28.12)$$

где f — наибольший прогиб от действия как поперечных, так и продольных сжимающих сил. Если продольная сила вызывает растяжение, то она будет уменьшать кривизну стержня и снижать величину напряжений σ_{max}; этот случай нас мало интересует (третий член формулы (28.12) будет вычитаться).

Сопоставляя формулы (21.1) и (28.12), мы видим, что приняв принцип независимости действия сил (глава XXI), мы пренебрегли дополнительным изгибающим моментом Pf от действия продольных сил и напряжениями Pf/W. Принцип независимости действия сил при совместном действии поперечных и продольных сил, строго говоря, *вовсе неприменим*. Лишь при достаточной жесткости изгибаемого стержня и малости прогиба f пренебрежение третьим членом формулы (28.12) не вносит серьезных погрешностей. Для стержней же гибких пренебрежение участием продольных сжимающих сил в деформации изгиба может повести к серьезным ошибкам при определении напряжений.

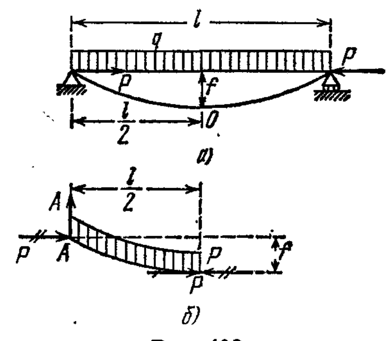


Рис. 402.

Чтобы избежать таких ошибок, необходимо учесть изгибающий момент от действия продольных сил P, для чего надо определить величину прогиба f от совместного действия поперечных и продольных сил.

Для сжато-изогнутого стержня, изображенного на рис. 402, дифференциальное уравнение упругой линии имеет вид

$$EJy''=M_0-Py. \qquad (28.13)$$

Здесь $M_0=\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}$ — изгибающий момент от действия поперечной нагрузки.

Поделив (28.13) на EJ и заменяя $\frac{P}{EJ}=k^2$, получим

$$y''+k^2y=\frac{1}{EJ}\left(\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}\right).$$

Полный интеграл этого уравнения будет

$$y=C_1\sin kx+C_2\cos kx+y^*.$$

Подобрав частное решение y^* $\left(\text{здесь } y^*=\frac{q}{2k^2EJ}\left(\frac{2}{k_2}+lx-x^2\right)\right)$ и определив произвольные постоянные C_1 и C_2 из условий закрепления концов стержня (при $x=0$ $y=0$ и при $x=l$ $y=0$), можно определить y и найти f при $x=l/2$.

Однако при действии на балку нескольких сил такой путь решения приводит к громоздким выкладкам, так как M_0 на различных участках имеет разные выражения, а изогнутая ось состоит из нескольких сопрягающихся кривых. В таких случаях проще воспользоваться приближенным методом решения. Сущность его сводится к тому, что заранее задаются формой изогнутой оси стержня, удовлетворяющей граничным условиям: это существенно облегчает решение задачи.

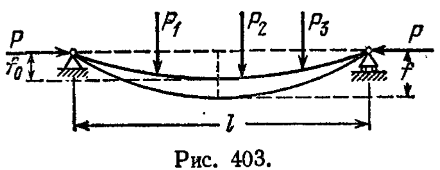


Рис. 403.

Пусть балка загружена поперечными силами P_1, P_2, P_3 и продольной сжимающей силой P (рис. 403). Помня, что при решении задачи Эйлера мы получили изогнутую ось в виде синусоиды, зададимся такой же формой упругой линии для нашей балки от действия поперечных сил, т. е.

$$y_0=f_0\sin\frac{\pi x}{l}. \qquad (28.14)$$

Нетрудно видеть, что граничные условия при таком выборе формы изогнутой оси удовлетворяются: на обеих опорах при $x=0$ и при $x=l$ прогиб $y_0=0$. Нулю также равны и изгибающие моменты на опорах (действительно, выражение $M_0=EJy_0''=-EJ\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}$ обращается в нуль при $x=0$ и при $x=l$); f_0 — это наибольший прогиб балки от действия приложенных *поперечных сил*, перпендикулярных к ее оси.

Перепишем уравнение (28.13), заменив в нем выражение для M_0 через EJy_0''. Тогда

$$EJy''=EJy_0''-Py,$$

или

$$EJy''+Py=-EJ\frac{\pi^2}{l^2}\cdot f_0\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Поделив на EJ и заменив $P/(EJ)=k^2$, получим

$$y''+k^2y=-\frac{\pi^2}{l^2}f_0\sin\frac{\pi x}{l}. \qquad (28.15)$$

Решение проще всего искать в виде $y=f\sin\frac{\pi x}{l}$, т. е. принять, что и от совместного действия поперечных и продольных сил балка изгибается по такой же синусоиде. После подстановки в (28.15) имеем

$$-\frac{\pi^2}{l^2}f\sin\frac{\pi x}{l}+k^2f\sin\frac{\pi x}{l}=-\frac{\pi^2}{l^2}f_0\sin\frac{\pi x}{l},$$

или

$$f-\frac{k^2l^2}{\pi^2}f=f_0,$$

откуда

$$f=\frac{f_0}{1-\frac{k^2l^2}{\pi^2}}. \qquad (28.16)$$

Заменив $k^2=P/(EJ)$ и имея в виду, что выражение π^2EJ/l^2 можно представить как эйлерову критическую силу, получим

$$f=\frac{f_0}{1-\frac{P}{P_к}}=Cf_0. \qquad (28.17)$$

Коэффициент C учитывает влияние продольных сил на величину прогиба

$$C=\frac{1}{1-\frac{P}{P_к}}=\frac{P_к}{P_к-P}. \qquad (28.18)$$

Из (28.18) видно, что если сжимающая сила P достигнет критического значения, то прогиб f теоретически должен стать бесконечно большим. Заметим, что критическая сила $P_к$ вошла в расчет формально, взамен дроби π^2EJ/l^2, где J — момент инерции сечения относительно нейтральной оси при изгибе балки под действием поперечных сил. Значит, J — это не J_{min}, так как обычно при изгибе сечение балки располагают так, чтобы момент инерции относительно нейтральной оси был бы наибольшим.

Применим полученное решение к частным случаям, например, к шарнирно-опертой балке, изгибаемой равномерно-распределенной нагрузкой q и сжатой силами P (рис. 402). Как было показано выше,

$$M_{\max}=M_0+Pf=\frac{ql^2}{8}+Pf_0C, \tag{28.19}$$

где $f_0=\frac{5ql^4}{384EJ}$ (см. главу XV) и, следовательно,

$$M_{\max}=\frac{ql^2}{8}+P\frac{5ql^4}{384EJ}C=\frac{ql^2}{8}\left(1+\frac{5Pl^2}{48EJ}C\right).$$

Умножив и поделив дробь в скобках на π^2, получим для нее

$$\frac{5\pi^2Pl^2}{48\pi^2EJ}=\frac{1,028P}{P_к},$$

и выражение для $M_{\max}$ примет вид

$$M_{\max}=\frac{ql^2}{8}\left(1+\frac{1,028P}{P_к}C\right)=\frac{ql^2}{8}C_1. \tag{28.20}$$

Для практических расчетов можно принять $1,028P=P$ и после подстановки коэффициента $C=\frac{P_к}{P_к-P}$ в (28.20) получим

$$M_{\max}=\frac{ql^2}{8}\left(1+\frac{P}{P_к}\frac{P_к}{P_к-P}\right)=\frac{ql^2}{8}\frac{P_к}{P_к-P}. \tag{28.20'}$$

При принятом упрощении ($1,028\approx 1$) коэффициент $C_1=\alpha C$ оказался равным C, т. е. таким же, что и для прогиба. Некоторые авторы предлагают вообще считать $C_1=C$, исходя из допущения, что изгибающие моменты пропорциональны прогибам.

Формула (28.12) для нормальных напряжений принимает вид

$$\sigma_{\max}=\frac{P}{F}+\frac{M_0}{W}\frac{1}{1-\frac{P}{P_к}}=\frac{P}{F}+\frac{M_0}{W}C_1. \tag{28.21}$$

При малых значениях дроби $P/P_к$ коэффициент C_1 близок к единице и формула (28.21) совпадает с (21.1).

Заметим, что при *симметричном* нагружении балки поперечными силами приближенные формулы (28.17) и (28.21) дают очень близкое совпадение с результатами точного решения. Несколько худшие результаты получаются при несимметричной нагрузке, но тем не менее вполне приемлемые для практических расчетов (расхождение не превышает 5—7%). Если все силы направлены в одну сторону, то прогиб f_0 можно считать наибольшим посредине пролета.

Из рассмотрения полученных формул видно, что прогибы и напряжения связаны с нагрузками нелинейной зависимостью: при возрастании всех нагрузок, например в n раз, напряжения возрастут больше, чем в n раз, вследствие увеличения коэффициента C_1. Это значит, что условие прочности $\sigma_{\max}\leqslant[\sigma]$ перестает быть справедливым.

Поэтому для обеспечения прочности сжато-изогнутого стержня необходимо перейти к расчету по допускаемым нагрузкам. Составим условие прочности для рассмотренной нами задачи.

Допустим, что при увеличении всех нагрузок в k_0 раз наибольшие напряжения в нашей балке достигнут предела текучести $\sigma_т$. Формула (28.21) перепишется так:

$$\frac{k_0P}{F}+\frac{k_0ql^2}{8W}\frac{1}{1-\frac{k_0P}{P_к}}=\sigma_т.$$

где k_0P и k_0q — предельные нагрузки. Переходя к допускаемым нагрузкам, поделим это равенство на коэффициент запаса k_0. Тогда

$$\frac{P}{F}+\frac{ql^2}{8W}\cdot\frac{1}{1-\frac{k_0P}{P_к}}=\frac{\sigma_т}{k_0}.$$

Здесь $\frac{\sigma_т}{k_0}=[\sigma]$ — основное допускаемое напряжение на сжатие. Условие прочности примет вид

$$\sigma_{max}=\frac{P}{F}+\frac{ql^2}{8W}\cdot\frac{1}{1-\frac{k_0P}{P_к}}\leqslant[\sigma]. \qquad (28.22)$$

Коэффициент, учитывающий влияние продольных сил на величину напряжений в рассматриваемом стержне, будет

$$C_0=\frac{1}{1-\frac{k_0P}{P_к}}=\frac{P_к}{P_к-k_0P}. \qquad (28.23)$$

Для ограничения величины прогиба напишем условие жесткости

$$f_{max}=f_0\frac{1}{1-\frac{k_fP}{P_к}}=f_0\frac{P_к}{P_к-k_fP}\leqslant[f], \qquad (28.24)$$

где $[f]$ — допускаемый прогиб, а k_f — коэффициент запаса по прогибу.

Помимо проверки стержня на прочность и жесткость в плоскости изгиба, необходимо также произвести проверку на устойчивость в плоскости наименьшей жесткости под действием только сжимающих сил P (§ 158), а также проверку на устойчивость плоской формы изгиба (§ 161).

Рассмотрим еще один пример. Пусть шарнирно-опертая балка изгибается силой P_0, приложенной посредине пролета, и сжимается продольной силой P. По формулам (28.17) и (28.18) прогиб балки посредине пролета будет

$$f=f_0C, \quad \text{или} \quad f=\frac{P_0l^3}{48EJ}\frac{1}{1-\frac{P}{P_к}}. \qquad (28.25)$$

Наибольшие по абсолютной величине нормальные напряжения в опасном сечении

$$\sigma_{max}=\frac{P}{F}+\frac{M_0+Pf}{W}, \qquad (28.26)$$

или

$$\sigma_{max}=\frac{P}{F}+\frac{P_0l}{4W}+\frac{P}{W}\frac{P_0l^3}{48EJ}C=\frac{P}{F}+\frac{P_0l}{4W}\left(1+\frac{Pl^2}{12EJ}\frac{1}{1-\frac{P}{P_к}}\right).$$

Заменяя $\frac{12EJ}{l^2}=\frac{\pi^2EJ}{0,822l^2}=\frac{P_к}{0,822}$, получим

$$\sigma_{max}=\frac{P}{F}+\frac{P_0l}{4W}\left(1+\frac{0,822P}{P_к}\cdot\frac{P_к}{P_к-P}\right). \qquad (28.27)$$

После преобразований находим

$$\sigma_{max}=\frac{P}{F}+\frac{P_0l}{4W}\cdot\frac{P_к-0,178P}{P_к-P}, \qquad (28.28)$$

или

$$\sigma_{max}=\frac{P}{F}+\frac{M_0}{W}C_1.$$

Здесь C_1 несколько меньше, чем C. Например, при $P=0{,}5P_к$ $C=\frac{P_к}{P_к-P}=2$, а $C_1=1{,}822$. Дальнейший ход расчета остается таким же, как и в предыдущем примере.

§ 163. Влияние эксцентриситета сжимающей силы и начальной кривизны стержня

А. При наличии эксцентриситета продольная сжимающая сила создает внецентренное сжатие, которое, как было показано (глава XXI), приводится к осевому сжатию и изгибу, рассмотренному выше (§ 162). Пользуясь полученными в § 162 результатами, можно учесть влияние начального эксцентриситета e продольной сжимающей силы P (рис. 404, a).

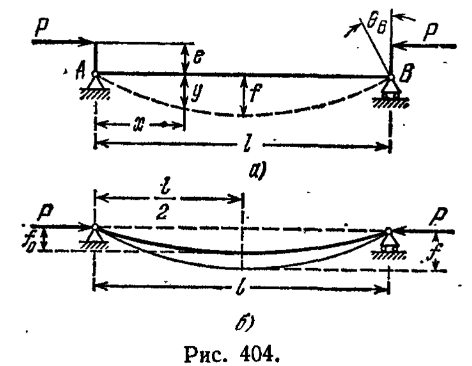


Рис. 404.

По формуле (28.17) наибольший прогиб в этом случае будет

$$f=f_0C,$$

где f_0 — прогиб от изгиба, вызываемого моментом $M_0=Pe$, равен (глава XV)

$$f_0=\frac{M_0l^2}{8EJ}=\frac{Pel^2}{8EJ},$$

а коэффициент C, учитывающий влияние продольных сил на величину прогиба (28.18):

$$C=\frac{1}{1-\frac{P}{P_к}}=\frac{P_к}{P_к-P}.$$

Следовательно,

$$f=\frac{Pel^2}{8EJ}\cdot\frac{1}{1-\frac{P}{P_к}}. \qquad (28.29)$$

Наибольшие сжимающие напряжения по формуле (28.12)

$$\sigma_{max}=\frac{P}{F}+\frac{Pe}{W}+\frac{Pf}{W}.$$

Подставляя значение f (28.29), получим

$$\sigma_{max}=\frac{P}{F}+\frac{Pe}{W}+\frac{P}{W}\,\frac{Pel^2}{8EJ}\,\frac{1}{1-\frac{P}{P_к}}=\frac{P}{F}+\frac{Pe}{W}\left(1+\frac{Pl^2}{8EJ}\,\frac{1}{1-\frac{P}{P_к}}\right). \qquad (28.30)$$

Выполнив действие в скобках, найдем

$$\sigma_{max}=\frac{P}{F}+\frac{M_0}{W}C_1, \quad где \quad C_1=\frac{P_к+0{,}235P}{P_к-P}. \qquad (28.31)$$

Б. В случае начального искривления (погиби) стержня, сжимаемого силами P (рис. 404, *б*), эксцентриситет точки приложения силы P считаем заданным; посредине пролета он равен f_0, и полный прогиб будет (28.17)

$$f=f_0C, \quad \text{или} \quad f=f_0\frac{1}{1-\frac{P}{P_к}}.$$

Как и в рассмотренном выше случае внецентренного приложения сжимающих сил, прогибы резко возрастают лишь при приближении величины сил P к критическому их значению $P_к$. Именно эйлерова величина критической силы в обоих рассмотренных здесь случаях (А и Б) и должна считаться опасной. Поэтому, независимо от наличия эксцентриситета сжимающей силы или начальной погиби стержня, проверку его на устойчивость надо производить, как и при осевом сжатии. Изменится лишь проверка на прочность, так как в этих случаях, помимо сжатии, следует учесть еще и изгиб (см. § 122).

Таким образом, при продольном сжатии стержней большой гибкости ($\sigma_{max} \leqslant \sigma_п$) потеря устойчивости их происходит при достижении критического значения силы P, определяемой по формуле Эйлера; эту эйлерову критическую силу $P=P_к$ и следует рассматривать как разрушающую нагрузку. *Ни эксцентриситет* точки приложения силы, ни наличие *начальной кривизны* (погиби) *не оказывают влияния на величину разрушающей силы для таких стержней.*

Иначе обстоит дело со стержнями малой и средней гибкости. При критических напряжениях, превосходящих предел пропорциональности, оба указанных обстоятельства значительно снижают величину $\sigma_к$. Это показывают опыты и подтверждают теоретические попытки подсчитать величину критических деформаций. Из опытов следует, что для стержней малой и средней гибкости влияние эксцентриситета весьма значительно; оно отражается на устойчивости и длинных стержней, но в значительно меньшей степени.

Влияние добавочных обстоятельств, изученных в настоящем параграфе, заставляет увеличивать коэффициент запаса при переходе к средним и малым гибкостям, а также выбирать несколько больший, чем при проверке на прочность, коэффициент запаса и для длинных стержней. Для оценки влияния эксцентриситета и начальной кривизны на крочность и устойчивость сжатых стержней необходимо дать себе отчет о численных величинах e и y_0.

В тщательно изготовленных стержнях можно ожидать начального прогиба y_0 по крайней мере в 1/1000 длины; при менее тщательном изготовлении y_0 может достигать вдвое большей величины.

Эксцентриситет при хорошей центрировке может быть оценен в 1/750 длины. Далее, следует принять во внимание допуски в размерах поперечного сечения; можно считать, что они эквивалентны эксцентриситету размером $h/40$ и начальной стрелке той же величины. Здесь h — размер поперечного сечения в плоскости возможного выпучивания. Для составных сечений следует иметь в виду добавочный эксцентриситет величиной около $h/160$ в связи с возможной разницей в площадях отдельных ветвей стержня.

Таким образом, для стержней со сплошным сечением следует считать возможными следующие минимальные элементы e и y_0:

$$e=\frac{l}{750}+\frac{h}{40} \quad \text{и} \quad y_0=\frac{l}{1000}+\frac{h}{40}.$$

Кроме эксцентриситета и начальной кривизны, имеется еще целый ряд обстоятельств, всегда возможных на практике и гораздо сильнее влияющих на грузоподъемность сжатых стержней, чем на прочность балок и растянутых деталей. Сюда относятся: влияние наклепа, величина начальных напряжений, вызванных изготовлением частей стержня, местные дефекты в отливках, сучки в дереве. Для стальных конструкций влияние этих добавочных обстоятельств учитывается некоторым (процентов на 10—20) повышением коэффициента запаса на устойчивость (см. § 153).

В заключение заметим, что нами были рассмотрены лишь некоторые задачи по определению критических нагрузок в момент перехода от заданной формы равновесия стержня к новой. При этом предполагалась только изгибная форма потери устойчивости. Как известно, возможны и иные формы нарушения устойчивости, в частности, изгибно-крутильная и чисто крутильная [1] (при продольном сжатии тонкостенных стержней).

Но не только стержни могут потерять устойчивость. В теории устойчивости рассматриваются многие сложные задачи об устойчивости целых конструкций и отдельных их элементов — арок, рам, оболочек, пластин и т. п. Особый интерес представляют задачи об устойчивости подобных конструкций и их элементов при действии на них динамических нагрузок [2], а также исследования устойчивости в процессе упруго-пластического деформирования и при упруго-вязкой деформации (см. главу XXXII).

Решение таких задач невозможно при статическом подходе к вопросам устойчивости как к вопросам о той или иной форме равновесия. Все подобные задачи требуют рассмотрения процесса деформирования во времени, т. е. исследования устойчивости движения. На основе этих новых принципов в настоящее время и решаются многие сложные задачи устойчивости. С ними можно познакомиться в специальной литературе [3].

---

[1]) См. Беляев Н. М., Сопротивление материалов, «Наука», 1965, § 213.

[2]) Впервые задача о динамической устойчивости призматического стержня под действием переменной нагрузки была решена в 1924 г. См. Беляев Н. М., Сборник инженерных сооружений, Ленинград, 1924.

[3]) См., например, Гольденблат И. И., Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений, Стройиздат, 1948; Болотин В. В., Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1956; Вольмир А. С., Устойчивость деформируемых систем, «Наука», 1967 и др.

Отдел IX

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК

Глава XXIX

УЧЕТ СИЛ ИНЕРЦИИ. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ

§ 164. Введение

До сих пор мы решали основную задачу сопротивления материалов, определяли размеры поперечных сечеиий частей конструкции и выбирали для них материал лишь при *статическом* действии нагрузок.

Как уже было указано в § 2, статическое действие нагрузок имеет место, когда при передаче давления от одной части конструкции на другую или при действии объемных сил механическое движение этих частей не меняется с течением времени. В этом случае каждый элемент конструкции находится в равновесии под действием внешних нагрузок и напряжений.

Постоянство движения характеризуется тем, что скорость рассматриваемых деталей в каждой их части *не меняется* — отсутствует *ускорение* частиц этих элементов. Наличие же ускорения частиц рассматриваемого тела или соприкасающихся с ним деталей характеризует уже воздействие *динамической* нагрузки. Так, давление земли на подпорную стенку будет *статической* нагрузкой, так как ни стенка, ни земляная масса не движутся,— скорость их постоянна и равна нулю.

Точно так же статическим будет действие поднимаемого груза на канат при *постоянной* скорости подъема груза. Наоборот, это действие будет *динамическим*, если груз поднимается с ускорением. Динамическую нагрузку испытывают шатуны шаровых машин и двигателей внутреннего сгорания, так как отдельные элементы их движутся с переменной скоростью. В качестве других примеров конструкций, работающих на динамическую нагрузку, можно указать на фундамент машины, имеющей вращающиеся части, расположенные внецентренно относительно оси вращения,— они будут испытывать центростремительное ускорение; можно указать на фундамент и шток парового молота, так как боек молота при ковке теряет свою скорость за очень короткий период времени, что связано с сообщением ему весьма больших ускорений.

Уже из этих примеров видно, что на практике мы можем встречаться с различными видами ускорения рассматриваемой детали или

соприкасающихся с ней тел; оно может быть постоянным по величине и направлению или только по направлению; может быть знакопеременным.

При переменных и знакопеременных напряжениях мы встречаемся с явлением разрушения от постепенно развивающейся трещины — с явлением усталости. При *резком изменении скорости* движения элемента конструкции в зависимости от передачи на него давлений от соседних деталей, когда имеет место явление *удара*, может обнаружиться хрупкость в таких материалах, которые при статическом действии нагрузок оказывались пластичными. Поэтому при проверке прочности деталей конструкций, подвергающихся действию динамических нагрузок, приходится интересоваться влиянием этих нагрузок — не только на величину напряжений в детали, но и на сопротивляемость материала.

Влияние ускорений точек деталей конструкции на *напряженное* состояние материала может быть учтено следующим образом. Если какое-либо тело движется с ускорением, то это значит, что на него передаются (к нему приложены) силы (давления) от других тел; по закону равенства действия и противодействия оно передает на эти тела равные приложенным силам и противоположно направленные реакции, называемые силами инерции. Это рассуждение применимо также и к каждому *элементу* движущегося с ускорением тела; этот элемент будет передавать на прилегающие части материала усилия, равные силе инерции этого элемента.

Таким образом, при ускоренном движении частей конструкции в них возникают *добавочные вполне реальные* напряжения, которые эквивалентны *статическим* напряжениям, вызванным силами инерции; от каждого элемента стержня на соседние части материала будут передаваться такие напряжения, как будто бы к нему была приложена соответствующая сила инерции.

Отсюда получаем практическое правило для определения напряжений в части конструкции, точки которой испытывают ускорения: надо вычислить эти ускорения и в дополнение к внешним силам, действующим на рассматриваемый элемент конструкции, нагрузить его соответствующими силами инерции. Дальше следует вести расчет так, как будто на стержень *действует статическая нагрузка*.

Здесь надо различать три случая. Если величина и расположение внешних сил, приложенных к рассматриваемому элементу, не зависят от его деформаций, если эти деформации не изменяют характера движения стержня, то ускорения его точек вычисляются по правилам кинематики твердого тела и учет динамических воздействий сводится к *добавочной статической нагрузке соответствующими силами инерции*. Это имеет место в большинстве практически важных случаев (за исключением удара).

Если при этом ускорение будет меняться, то, как правило, возникнут колебания рассматриваемой части конструкции, которые

могут в некоторых случаях дать явление резонанса, связанное с резким увеличением деформаций и напряжений. Эти напряжения могут достигать весьма большой величины и будут прибавляться к тем, которые учитываются путем введения в расчет статической нагрузки силами инерции.

Наконец, могут быть случаи (удар), когда величина ускорений, а значит, и соответствующих сил инерции будет зависеть от деформируемости рассматриваемых элементов; в этом случае при вычислении сил инерции приходится использовать и данные сопротивления материалов.

Способ проверки прочности для каждого из указанных случаев покажем на примерах.

§ 165. Вычисление напряжений при равноускоренном движении

Решение задачи о проверке прочности при динамических напряжениях мы начнем с простейшего случая, когда точки рассматриваемой части конструкции имеют постоянное ускорение, не вызывающее колебаний; примером возьмем равноускоренный подъем груза Q, подвешенного на стальном тросе площадью F; объемный вес материала троса равен γ; груз поднимается с ускорением a *см/сек*^{2} (рис. 405). Найдем напряжения в каком-либо сечении на расстоянии x от нижнего конца троса. Разрежем трос в этом сечении и рассмотрим нижнюю отсеченную часть. Она будет двигаться вверх с ускорением a; значит, на нее от верхней части троса будет передаваться помимо силы, уравновешивающей ее вес, еще направленная вверх сила, равная произведению ее массы на ускорение a, т. е. $\frac{Q+\gamma Fx}{g}a$, где g— ускорение силы тяжести.

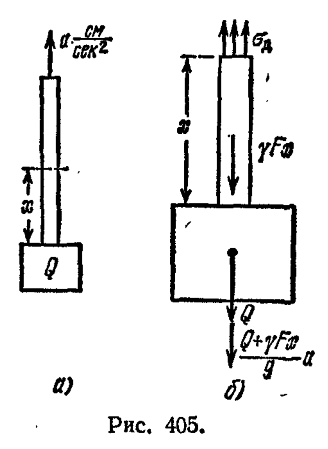


Рис. 405.

По закону равенства действия и противодействия на верхнюю часть от нижней будет передаваться такая же сила, но направленная вниз. Таким образом, динамические напряжения $\sigma_д$, действующие по проведенному сечению на нижнюю часть, будут уравновешивать не только статическую нагрузку $Q+\gamma Fx$, но и добавочную силу $\frac{Q+\gamma Fx}{g}a$; чтобы вычислить эти напряжения, надо рассмотреть равновесие выделенной нижней части под действием $\sigma_д$, статической нагрузки $Q+\gamma Fx$ и силы инерции $\frac{Q+\gamma Fx}{g}a$, направленной вниз

(рис. 405). Тогда

$$\sigma_д=\frac{Q+\gamma Fx}{F}+\frac{Q+\gamma Fx}{gF}a=\frac{Q+\gamma Fx}{F}\left(1+\frac{a}{g}\right);$$

дробь $\frac{Q+\gamma Fx}{F}$ представляет собой статическое напряжение σ_c в проведенном сечении; поэтому

$$\sigma_д=\sigma_c\left(1+\frac{a}{g}\right), \tag{29.1}$$

т. е. динамическое напряжение равно статическому, умноженному на коэффициент $1+a/g$. Эта величина называется *динамическим коэффициентом* $K_д$:

$$\sigma_д=K_д\sigma_c. \tag{29.2}$$

Такой вид формулы для динамических напряжений объясняет нам, почему мы главным образом уделяли внимание вычислению напряжений при статическом действии нагрузок; в очень многих случаях динамические напряжения могут быть выражены через статические путем умножения на соответствующий динамический коэффициент.

Условие прочности получит вид

$$\sigma_{д\,max}=\sigma_{c\,max}\left(1+\frac{a}{g}\right)=K_д\sigma_{c\,max}\leqslant[\sigma].$$

Отсюда

$$\sigma_{c\,max}\leqslant\frac{[\sigma]}{1+\frac{a}{g}}=\frac{[\sigma]}{K_д}. \tag{29.3}$$

Таким образом, можно в ряде случаев *динамический расчет заменить статическим*, понизив только допускаемое напряжение делением его на динамический коэффициент $K_д$.

Так поступают в тех случаях, когда при расчете оказывается затруднительным теоретическое определение динамического коэффициента, а приходится пользоваться его значениями, полученными из экспериментов. Подобным образом, например, учитывается динамичность временной нагрузки, действующей на мосты.

§ 166. Расчет вращающегося кольца (обод маховика)

В качестве второго примера рассмотрим вычисление напряжений в быстро вращающемся кольце постоянного сечения (рис. 406, *а*). С известным приближением в подобных условиях, если пренебречь влиянием спиц, находится обод маховика.

Обозначим через F площадь поперечного сечения кольца; γ — объемный вес материала; n — число оборотов в единицу времени; ω — угловая скорость вращения; D — диаметр оси кольца.

Выделим элемент кольца длиной ds. При вращении кольца этот элемент движется по окружности с постоянной угловой скоростью ω. Угловое ускорение ε равно нулю, поэтому тангенциальное ускорение элемента равно $w_t=\varepsilon D/2=0$; радиальное же (центростремительное) ускорение элемента равно $w_n=\omega^2 D/2$ и направлено к центру кольца. Чтобы вычислить напряжения $\sigma_д$, надо к каждому выделенному элементу кольца приложить его силу инерции. Она направлена наружу и равна

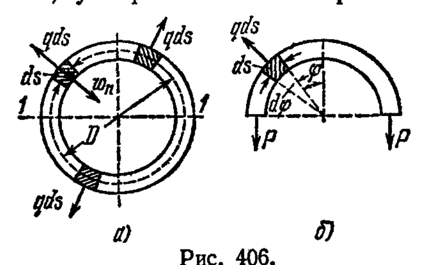


Рис. 406.

$$w_n \frac{F\gamma}{g} ds = \frac{F\gamma}{g} \frac{\omega^2 D}{2} ds = q\, ds,$$

где q — интенсивность сил инерции на единицу длины обода. Таким образом, в кольце разовьются такие напряжения, как будто оно было загружено радиальной нагрузкой интенсивности q на единицу длины (рис. 406, *б*). Усилия P, растягивающие обод, равны (§ 19)

$$P=\frac{Dq}{2}.$$

Напряжение $\sigma_д$ равно

$$\sigma_д=\frac{P}{F}=\frac{Dq}{2F}=\frac{DF\gamma}{2gF}\cdot\frac{\omega^2 D}{2}=\frac{\gamma\omega^2 D^2}{4g}=\frac{\gamma v^2}{g},$$

где $v=\omega\frac{D}{2}$ — окружная скорость точек кольца. Таким образом, напряжение в ободе маховика зависит лишь от объемного веса материала и линейной скорости частей обода. Чтобы отдать себе отчет в возможной величине этих напряжений, сделаем подсчет при следующих числовых данных:

$$n=360\ об/мин;\quad D=4\ м;\quad \gamma=7{,}5\ Г/см^3.$$

Угловая скорость в секунду $\omega=2\pi n/60=2\pi\cdot 360/60=12\pi$; напряжение равно

$$\sigma_д=\frac{\gamma\omega^2 D^2}{4g}=\frac{7{,}5\cdot 144\pi^2\cdot 16\cdot 10^4}{4\cdot 10^3\cdot 981}=435\ кГ/см^2.$$

§ 167. Напряжения в спарниках и шатунах

Проверим прочность спарника AB, соединяющего две оси локомотива (рис. 407); на ось O_1, ведущую, передается вращающий момент от машины локомотива.

В точках A и B спарник прикреплен к колесам при помощи цилиндрических шарниров, расстояния AO_2 и BO_1 равны r, диаметр колес D, длина спарника l, локомотив движется с постоянной скоростью v.

Так как спарник движется, то для проверки его прочности надо прежде всего установить, будет ли движение иметь ускорение, т. е. решить чисто кинематическую задачу. Спарник движется сам относительно локомотива и участвует вместе с ним в переносном движении со скоростью v.

Так как переносное движение является поступательным с постоянной скоростью, то ускорение может появиться лишь в относительном движении. Так как в этом движении спарника две его точки A и B движутся одинаково, описывая в одной плоскости окружности радиуса r, то это движение будет плоским и поступательным, следовательно, все точки спарника будут иметь те же скорости и ускорения, что и точки A и B.

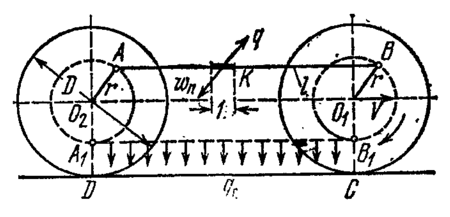


Рис. 407.

Точка A движется вместе со вторым колесом, описывая окружность радиуса r. При постоянной скорости движения паровоза угловая скорость вращения колес ω будет постоянна, значит, угловое ускорение равно нулю, а следовательно, равно нулю и тангенциальное ускорение точки A, т. е. $w_t=0$; остается центростремительное ускорение w_n, напряженное от A к O_2 и равное $\omega^2 r$. Любая точка спарника, например K, тоже будет испытывать такое же ускорение, направленное параллельно O_2A.

Чтобы проверить прочность спарника, надо добавить к его собственному весу еще нагрузку силами инерции. На каждую единицу длины спарника будет действовать сила инерции

$$q=\frac{1\cdot F\cdot\gamma}{g}w_n=\frac{F\gamma}{g}\omega^2 r;$$

направлена эта сила инерции параллельно радиусу O_2A в сторону, противоположную ускорению.

При изображенном на чертеже положении спарника собственный вес его вызывает изгиб в сторону, противоположную изгибу от сил инерции. Наиболее опасным будет крайнее нижнее положение спарника A_1B_1, когда обе нагрузки будут действовать в одном направлении. Тогда полная нагрузка $q_д$ на единицу длины спарника будет равна

$$q_д=\gamma F+\frac{\gamma F}{g}\omega^2 r=\gamma F\left[1+\frac{\omega^2 r}{g}\right].$$

Спарник надо рассматривать как балку, шарнирно-опертую в точках A и B и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой $q_д$. Наибольший изгибающий момент будет посредине пролета

$$M_{\max}=\frac{q_д l^2}{8}=\frac{\gamma F l^2}{8}\left[1+\frac{\omega^2 r}{g}\right].$$

Наибольшие напряжения в этом сечении

$$\sigma_{\text{д max}} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{F}{W}\frac{\gamma l^2}{8}\left[1+\frac{\omega^2 r}{g}\right].$$

Пример. Исследовать два варианта поперечного сечения спарника: а) прямоугольное сечение и б) двутавровое сечение (рис. 408), при следующих данных:

$$\omega=30\ 1/сек;\quad \gamma=7{,}86\ Г/см^3;\quad r=50\ см \text{ и } l=150\ см.$$

В этом случае

$$\frac{\gamma l^2}{8}\left[1+\frac{\omega^2 r}{g}\right]=\frac{0{,}00786\cdot 150^2}{8}\left[1+\frac{50\cdot 30^2}{981}\right]=1036\ кГ/см.$$

Для прямоугольного сечения:

$$F=10\cdot 4{,}5=45\ см^2;\quad W=\frac{4{,}5\cdot 10^2}{6}=75\ см^3;$$

$$\frac{F}{W}=\frac{45}{75}=0{,}6\ 1/см \quad \text{и} \quad \sigma_{\text{д max}}=0{,}6\cdot 1036=622\ кГ/см^2.$$

Для двутаврового сечения:

$$F=10\cdot 4{,}5-2{,}6\cdot 1{,}5=27\ см^2;\quad W=\frac{4{,}5\cdot 10^3-2\cdot 1{,}5\cdot 6^3}{12\cdot 5}=64{,}2\ см^3;$$

$$\frac{F}{W}=\frac{27}{64{,}2}=0{,}42\ 1/см \quad \text{и} \quad \sigma_{\text{д max}}=0{,}42\cdot 1036=435\ кГ/см^2.$$

Таким образом, несмотря на уменьшение момента сопротивления сечения (почти на 15%), наибольшие напряжения во втором случае, благодаря значительному уменьшению веса спарника, понижаются почти в 1,5 раза.

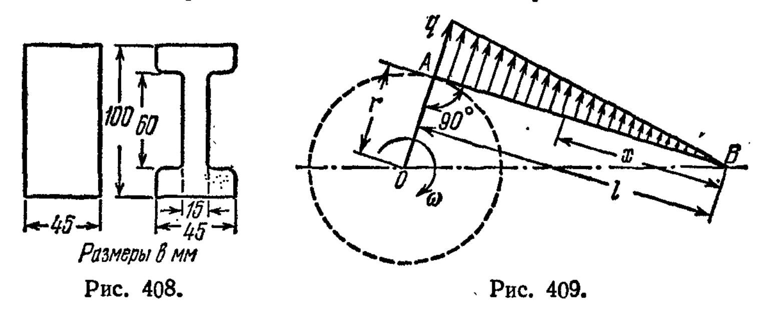


Рис. 408. Рис. 409.

Кроме изгиба спарник испытывает еще сжатие или растяжение силами P, передающими вращение от колеса O_1 колесу O_2. В положении A_1B_1 спарник будет сжат. Тогда, пренебрегая влиянием прогиба на величину изгибающего момента, получаем условие прочности

$$\sigma_{\max}=\left\{\frac{P}{F}+\frac{\gamma F l^2}{8W}\left[1+\frac{\omega^2 r}{g}\right]\right\}\leqslant[\sigma].$$

Кроме проверки на прочность, спарник следует проверить на устойчивость, как стержень с шарнирно-опертыми концами, в пло-

скости изгиба нагрузкой $q_д$ и, как стержень с защемленными концами, в перпендикулярной плоскости. В первом случае при вычислении гибкости в расчет следует вводить наибольший, а во втором случае — наименьший радиусы инерции.

Подобным же образом может быть выполнен и расчет шатуна AB, шарнирно-скрепленного в точке A с кривошипом OA, вращающимся вокруг точки O с угловой скоростью ω (рис. 409). При вращении кривошипа с постоянной угловой скоростью точка A шатуна испытывает только одно центростремительное ускорение, а точка B — только тангенциальное ускорение. Все точки шатуна, расположенные между точками A и B, имеют и то и другое ускорения. Ограничиваясь здесь учетом сил инерции, возникающих в шатуне в результате одного только центростремительного ускорения, рассмотрим такое положение шатуна, в котором он перпендикулярен к кривошипу, а следовательно, направление центростремительного ускорения в точке A перпендикулярно к оси шатуна. Предположим, что центробежные силы инерции q везде перпендикулярны к оси шатуна и по длине его меняются по линейному закону от $q=q_0$ в точке A до $q=0$ в точке B. Это предположение будет тем ближе к истине, чем больше длина шатуна по сравнению с длиной кривошипа. Шатун будем рассматривать как балку AB на двух шарнирных опорах A и B. Изгибающий момент достигает наибольшего значения при $x=l/\sqrt{3}$ (x отсчитывается от точки B) и равен (см. § 59)

$$M_{max}=\frac{q_0l^2}{9\sqrt{3}}.$$

Так как

$$q_0=\frac{F\cdot\gamma\cdot 1}{g}\omega^2r \quad \text{и} \quad \sigma_{д\,max}=\frac{M_{max}}{W},$$

то

$$\sigma_{д\,max}=\frac{q_0l^2}{9\sqrt{3}W}=\frac{F\gamma l^2\omega^2r}{9\sqrt{3}Wg}.$$

§ 168. Вращающийся диск постоянной толщины

Значительный интерес представляет задача о напряжениях и деформациях в быстро вращающихся валах и дисках. Высокие скорости вращения валов паровых турбин обусловливают появление в валах и дисках значительных центробежных усилий. Вызванные ими напряжения распределяются симметрично относительно оси вращения диска.

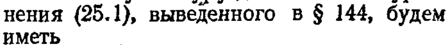
Рассмотрим наиболее простую задачу о расчете диска постоянной толщины. Расчет такого диска положен в основу некоторых приближенных способов расчета дисков любого профиля. Воспользуемся некоторыми результатами, полученными при выводе формул для расчета толстостенных цилиндров (§ 144). Предположим, что по толщине диска, принимаемой равной единице, напряжения σ_r и σ_t не меняются; осевое напряжение σ_z будем считать равным нулю.

Составим условия равновесия элемента AB, выделенного из диска двумя меридиональными сечениями и двумя концентрическими цилиндрическими поверх-

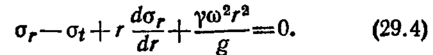
ностями (рис. 410). В данном случае, кроме сил, действующих по граням элемента AB, необходимо принять во внимание также и силу инерции

$$dj=\omega^2 r\,\frac{\gamma_r\cdot 1\cdot dr\,d\theta}{g},$$

направленную вдоль радиуса от центра к внешнему контуру диска. Вместо уравнения (25.1), выведенного в § 144, будем иметь



$$\sigma_r-\sigma_t+r\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{\gamma\omega^2r^2}{g}=0. \tag{29.4}$$



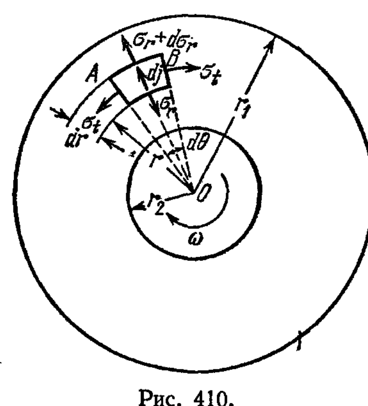


Рис. 410.

Уравнение (25.4) того же параграфа (условие совместности деформаций) остается в силе и для данной задачи, т. е.

$$\frac{d\sigma_t}{dr}-\mu\frac{d\sigma_r}{dr}=\frac{1+\mu}{r}(\sigma_r-\sigma_t). \tag{29.5}$$

Подставляя в это уравнение значение разности $\sigma_r-\sigma_t$ из (29.4), находим

$$\frac{d\sigma_t}{dr}=-\frac{d\sigma_r}{dr}-\frac{1+\mu}{g}\gamma\omega^2r. \tag{29.6}$$

Дифференцируя уравнение (29.4) по r и подставляя в него вместо $\frac{d\sigma_t}{dr}$ его значение из формулы (29.6), получаем линейное дифференциальное уравнение

$$r\frac{d^2\sigma_r}{dr^2}+3\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{3+\mu}{g}\gamma\omega^2r=0,$$

или

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2\sigma_r)\right]+\frac{3+\mu}{g}\gamma\omega^2r=0.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\sigma_r=A+\frac{B}{r^2}-\frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2r^2. \tag{29.7}$$

Из (29.4) и (29.7) следует, что

$$\sigma_t=\sigma_r+r\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{\gamma\omega^2r^2}{g}=A-\frac{B}{r^2}-\frac{1+3\mu}{8g}\gamma\omega^2r^2. \tag{29.8}$$

В формулах (29.7) и (29.8) A и B — постоянные интегрирования, которые должны быть определены из условий на контуре диска. При определении постоянных рассмотрим два случая: 1) диск с отверстием в центре и 2) сплошной диск. При этом вначале предположим, что края диска свободны от внешних усилий.

Для диска с центральным отверстием напряжение σ_r должно быть равно нулю как при $r=r_1$, так и при $r=r_2$ (рис. 410). Эти условия на контуре при подстановке их в формулу (29.7) приводят к уравнениям

$$A+\frac{B}{r_2^2}-\frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2r_2^2=0$$

и

$$A+\frac{B}{r_1^2}-\frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2r_1^2=0,$$

откуда

$$A=\frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2(r_1^2+r_2^2) \text{ и } B=-\frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2 r_1^2 r_2^2.$$

Подставляя значения A и B в формулы (29.7) и (29.8), получаем

$$\sigma_r=\frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2\left(r_1^2+r_2^2-r^2-\frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}\right)$$

и

$$\sigma_t=\frac{\gamma\omega^2}{8g}\left[(3+\mu)\left(r_1^2+r_2^2+\frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}\right)-(1+3\mu)r^2\right].$$

Полагая для краткости

$$\frac{r_2}{r_1}=\alpha, \quad \frac{r}{r_1}=\rho; \quad \frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2 r_1^2=p \quad \text{и} \quad \frac{1+3\mu}{3+\mu}=m,$$

можем написать

$$\sigma_r=p\left[1+\alpha^2\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)-\rho^2\right] \tag{29.9}$$

и

$$\sigma_t=p\left[1+\alpha^2\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)-m\rho^2\right]. \tag{29.10}$$

Замечаем, что напряжение σ_r обращается в нуль при $\rho=1$ и $\rho=\alpha$, т. е. на внутреннем и наружном контурах диска; при значениях ρ между 1 и α напряжение σ_r положительно и, как нетрудно убедиться, достигает наибольшей величины при $\rho=\sqrt{\alpha}=\sqrt{r_2/r_1}$. При этом

$$(\sigma_r)_{max}=p(1-\alpha)^2. \tag{29.11}$$

Напряжение σ_t при всех значениях ρ также положительно и наибольшей величины достигает у внутреннего края диска, где $\rho=\alpha$:

$$(\sigma_t)_{max}=p[2+(1-m)\alpha^2]. \tag{29.12}$$

Сравнивая (29.11) и (29.12), убеждаемся, что $(\sigma_t)_{max}$ всегда больше $(\sigma_r)_{max}$. Поэтому при проверке прочности диска как по теории наибольших касательных напряжений, так и по теории потенциальной энергии формоизменения условие прочности должно быть написано в таком виде:

$$(\sigma_t)_{max}=\frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2 r_1^2[2+(1-m)\alpha^2]\leqslant[\sigma]. \tag{29.13}$$

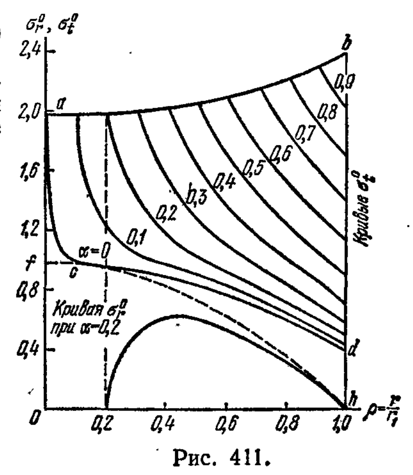


Рис. 411.

На рис. 411 представлены кривые изменения значений $\sigma_t^0=\sigma_t/p$ вдоль радиуса диска для разных α от 0 до 1 при $\mu=0,3$. Там же приведена кривая для $\sigma_r^0=\sigma_r/p$ при $\alpha=0,2$. Замечаем, что наибольшие значения напряжения σ_t (29.12) (у внутреннего края диска) мало меняются с изменением радиуса отверстия, т. е. величины α (кривая ab). При $\alpha\approx 0$, т. е. при очень маленьком радиусе центрального отверстия,

у края отверстия имеет место резкое изменение напряжения σ_t — концентрация напряжений (кривая acd). При этом

$$(\sigma_t)_{\max}=2p=\frac{3+\mu}{4g}\gamma\omega^2 r_1^2. \tag{29.14}$$

Для очень тонкого кольца, при $r_1\approx r_2$ и $\alpha\approx 1$,

$$(\sigma_t)_{\max}=\frac{\gamma\omega^2 r_1^2}{g}, \tag{29.15}$$

что совпадает с выводом § 166. В этом случае наибольшее напряжение σ_t (29.15) всего только на 20% больше $(\sigma_t)_{\max}$ для диска с весьма малым отверстием (29.14).

Из формул (29.9) и (29.10) видно, что напряжения σ_r и σ_t очень быстро растут с увеличением наружной скорости диска $v=\omega r_1$. Отметим, что, кроме скорости v и характеристик материала μ и γ, эти напряжения зависят только от безразмерных величин ρ и α. Таким образом, в геометрически подобных дисках при одних и тех же значениях ρ напряжения σ_t и σ_r будут одинаковы. Это обстоятельство позволяет заменить заводские испытания дисков большого диаметра лабораторными испытаниями их моделей.

В случае сплошного диска напряжения σ_r и σ_t в центре диска, т. е. при $r=0$, должны быть равны друг другу. Сравнивая формулы (29.7) и (29.8), убеждаемся, что для выполнения этого условия постоянная B должна быть равна нулю. Постоянная A найдется из условия: при $r=r_1$, т. е. у наружного края диска, напряжение σ_r равно нулю. Имеем

$$A=\frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2 r_1^2=p.$$

Подставляя это значение A, а также $B=0$ в формулы (29.7) и (29.8), получаем

$$\sigma_r=p(1-\rho^2) \tag{29.16}$$

и

$$\sigma_t=p(1-m\rho^2). \tag{29.17}$$

Соответствующие кривые изменения $\sigma_r^0=\sigma_r/p$ и $\sigma_t^0=\sigma_t/p$ вдоль радиуса приведены на рис. 411 (кривые fh и fcd). Оба напряжения положительны при всех значениях ρ и увеличиваются по мере уменьшения ρ, т. е. по мере приближения к центру диска. При $\rho=0$

$$(\sigma_r)_{\max}=(\sigma_t)_{\max}=p=\frac{3+\mu}{8g}\gamma\omega^2 r_1^2. \tag{29.18}$$

Таким образом, в диске с весьма малым центральным отверстием напряжение σ_t у края отверстия за счет концентрации напряжений вдвое больше, чем в центре сплошного диска (см. формулу (29.14)).

Все рассуждения велись до сих пор в предположении, что края диска свободны от действия внешних усилий. Это предположение обычно не соответствует действительности. Посадка диска на вал выполняется в горячем состоянии или с помощью гидравлического пресса с таким натягом, чтобы деформация отверстия диска, вызванная центробежными усилиями, всегда была меньше, чем обратная ей по знаку деформация при посадке диска, т. е. чтобы в рабочем состоянии диск плотно сидел на вале. Наружный край диска обычно снабжается ободом для закрепления в нем лопаток турбины, при вращении которого возникают дополнительные центробежные усилия, передающиеся на диск. Таким образом, по наружному и внутреннему краю диска обычно действуют некоторые равномерно распределенные растягивающие или сжимающие усилия. Вызванные этими усилиями напряжения в диске могут быть вычислены по формулам, выведенным для расчета толстостенных цилиндров (формулы (25.9) § 144). Складывая напряжения по формулам (25.9), а также (29.9) и (29.10), получаем возможность построить полную картину распределения напряжений во вращающемся диске.

§ 169. Диск равного сопротивления

Как показывают формулы предыдущего параграфа и кривые рис. 411, изменение напряжений σ_r и σ_t вдоль радиуса диска постоянной толщины весьма значительно. Наиболее неравномерное распределение напряжений имеет место в дисках постоянной толщины с отверстием в центре. При расчете подобных дисков приходится ориентироваться на наибольшее напряжение σ_t у внутреннего края диска, что сильно ограничивает возможность повышения предельных скоростей. Для достижения высоких скоростей вращения диск приходится делать с переменной толщиной, уменьшающейся от центра к окружности диска. Наиболее выгодным является такой профиль диска, в котором напряжения во всех точках диска сохраняют постоянное значение. Подобные диски называются *дисками равного сопротивления*. При расчете этих дисков исходят из предположения, что по толщине диска напряжения не меняются, что обычно влечет за собой небольшие погрешности в величинах напряжений.

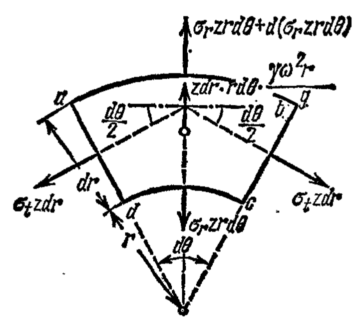


Рис. 412.

Основные формулы для расчета дисков переменной толщины по-прежнему могут быть выведены из рассмотрения усилий равновесия элемента диска $abcd$ (рис. 410 и 412). Переменную толщину диска, являющуюся некоторой функцией радиуса r, обозначим через z. На элемент $abcd$ по меридиональным сечениям ad и bc действуют две силы $\sigma_t z\,dr$, составляющие между собой угол $d\theta$; по грани dc на этот элемент действует радиальное усилие $\sigma_r zr\,d\theta$, направленное к центру диска, а по грани ab — радиальное усилие $\sigma_r zr\,d\theta + d(\sigma_r zr\,d\theta)$, направленное от центра к наружной поверхности диска. К этим усилиям должна быть присоединена еще и сила инерции массы элемента

$$z\,dr\cdot r\,d\theta\cdot\frac{\gamma\omega^2 r}{g},$$

направленная от центра к окружности диска.

Проектируя все перечисленные выше усилия на направление радиуса, получаем такое дифференциальное уравнение равновесия диска переменной толщины:

$$d(\sigma_r zr\,d\theta)-\sigma_t z\,dr\,d\theta+z\,dr\,d\theta\cdot\frac{\gamma\omega^2 r^2}{g}=0,$$

или

$$\frac{d}{dr}(rz\sigma_r)-z\sigma_t+z\frac{\gamma\omega^2 r^2}{g}=0.$$

При $z=\text{const}$ это уравнение обращается в уравнение (29.4) предыдущего параграфа.

В случае диска равного сопротивления напряжения σ_r и σ_t всюду постоянны и равны между собой. Приравнивая их величине допускаемого напряжения $[\sigma]$, можем так переписать уравнение равновесия:

$$\frac{d}{dr}(zr)-z+z\frac{\gamma\omega^2 r^2}{[\sigma]\cdot g}=0,$$

или

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dr}=-\frac{\gamma\omega^2 r}{[\sigma]\cdot g}=-2nr,$$

где

$$n=\frac{\gamma\omega^2}{2[\sigma]g}.$$

Интегрируя это уравиеиие, находим

$$z = Ce^{-nr^2},$$

где C — постояниая иитегрироваиия. Если диск ие имеет отверстия в цеитре, то из условия, что при $r=0$ $z=z_0$, следует $C=z_0$. Толщина диска в центре (z_0) определяется из условий на контуре диска.

Сплошной диск равиого сопротивления может быть примеиеи даже при очень высоких окружиых скоростях. Одиако по коиструктивиым соображениям иа практике обычио примеияются диски перемеииой толщииы с отверстием в цеитре, профиль которых, близкий к профилю диска равиого сопротивления, обеспечивает иаиболее выгодиое распределеиие иапряжений вдоль радиуса. Методы расчета таких дисков рассматриваются в специальных курсах.

§ 170. Влияние резонанса на величину напряжений

В двух первых задачах, рассмотренных в §§ 165 и 167, ускорение не меняло своего направления *по отношению к элементу материала*, на который оно действовало; в последнем же примере за один оборот колеса ускорение непрерывно меняло свое направление на 360°. В этом случае напряжения и деформации периодически меняют свой знак, начинаются так называемые вибрации, колебания стержня.

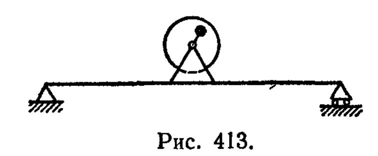


Рис. 413.

Подобный же случай будет иметь место, если на балке расположена машина с вращающимся грузом, имеющим эксцентриситет по отношению к оси вращения (рис. 413). Сила инерции груза будет вызывать в балке напряжения и деформации, периодически меняющие свой знак. Балка будет совершать колебания с периодом, равным периоду вращения груза. Это будут так называемые *вынужденные* колебания. Если период вынужденных колебаний совпадет с периодом *свободных* колебаний стержня, то мы получим явление *резонанса*, при котором *амплитуда и размах* колебаний будут резко расти с течением времени. Наличие сил трения, сопротивление воздуха и т. д. ограничивают на практике рост этой амплитуды; однако она может достичь очень большой величины, значительно превышающей те деформации, которые испытывала бы конструкция под действием ускорений той же величины, но не меняющих знака.

Известен случай, когда при резонансе угол закручивания вала увеличился в шесть раз по сравнению с тем углом, который был до наступления резонанса,— это был случай поломки коленчатых валов двигателей «Цеппелина» при первом его перелете через Атлантический океан.

Таким образом, явление резонанса, если оно длится некоторое время, а не сбивается немедленно по возникновении, ведет к постепенному росту *деформаций* и пропорциональных им *напряжений* в конструкции, что может вызвать поломку. Поэтому, как правило,

при проектировании конструкций, испытывающих переменные ускорения с постоянным периодом, необходимо избежать возникновения явления резонанса.

Так как период раскачивающих (возмущающих) сил обычно является заданным, то в распоряжении проектировщика остается лишь период собственных свободных колебаний конструкции, который надо подобрать так, чтобы он в должной мере отличался от периода изменений возмущающей силы.

Вопросы, связанные с определением периода, частоты и амплитуды свободных и вынужденных колебаний, рассматриваются в курсах теоретической механики[1]). Поэтому ниже (§ 171) мы ограничимся лишь приложением полученных там выводов к определению напряжений и проверке прочности элементов конструкции при колебаниях.

§ 171. Вычисление напряжений при колебаниях

А. Упругая система, выведенная каким-либо путем из равновесия, приходит в колебательное движение. Колебания происходят около положения упругого равновесия, при котором в нагруженной системе имели место статические деформации δ_c и соответствующие им статические напряжения p_c (σ_c или τ_c — в зависимости от вида деформации). При колебаниях к статическим деформациям добавляются динамические, зависящие от вида колебательного движения и от величины размаха (амплитуды) колебаний. В связи с этим изменяются и напряжения p_c. Таким образом, при расчете колеблющейся системы на прочность необходимо уметь вычислять динамические добавки к статическим деформациям и соответствующим им напряжениям.

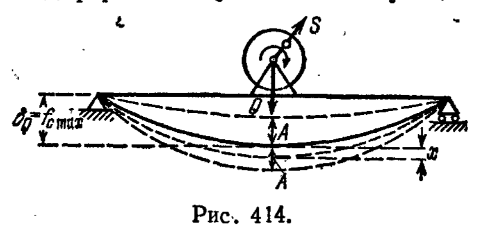


Рис. 414.

Во многих случаях характер колебаний системы может быть определен одной какой-нибудь величиной (одной координатой). Такие системы называются системами с одной степенью свободы; таковы, например, растянутая или сжатая незначительного веса пружина с грузом на конце, совершающая продольные колебания; небольшого (сравнительно с грузом Q) собственного веса балка, изображенная на рис. 414, колеблющаяся в направлении, перпендикулярном к ее оси, и т. п.

При колебаниях систем с одною степенью свободы полные деформации системы в каком-либо сечении могут быть найдены путем

[1]) См., например, Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И., Курс теоретической механики, Гостехиздат, 1955, часть II.

сложения статической деформации с добавочной деформацией при колебаниях. Для проверки прочности системы, очевидно, необходимо найти наиболее опасное сечение с наибольшей в процессе колебаний суммарной величиной деформации. В простейших случаях для этого потребуется сложить наибольшую статическую деформацию $\delta_{c\,max}$ с наибольшей амплитудой колебаний A, т. е.

$$\delta_д = \delta_{c\,max} + A = \delta_{c\,max}\left(1+\frac{A}{\delta_{c\,max}}\right)K_д\delta_{c\,max}. \quad (29.19)$$

Пока система деформируется в пределах упругости, напряжения пропорциональны деформациям. Поэтому

$$p_д = p_c\left(1+\frac{A}{\delta_{c\,max}}\right) = K_д p_c, \quad (29.20)$$

где

$$K_д = 1+\frac{A}{\delta_{c\,max}} \quad (29.21)$$

— коэффициент динамичности при колебаниях. Условие прочности в этом случае должно иметь такой вид:

$$p_д = K_д p_c \leqslant [p]. \quad (29.22)$$

Таким образом, как при учете сил инерции, не меняющих своего направления, задача нахождения динамических напряжений и проверки прочности при колебаниях может быть сведена к определению статических напряжений и коэффициента динамичности $K_д$. Так как последний зависит от величины A, то нужно уметь определять наибольшее значение амплитуды колебаний в разных случаях.

Как известно, дифференциальное уравнение движения колеблющегося груза Q в случае свободных колебаний можно представить в виде уравнения равновесия, в котором кроме внешней силы (веса груза Q) и силы упругого сопротивления системы учитывается также и сила инерции:

$$\frac{Q}{g}x'' + P - Q = \frac{Q}{g}x'' + P_1 = \frac{Q}{g}x'' + cx = 0. \quad (29.23)$$

Здесь x — координата, полностью определяющая положение груза Q во время колебаний (см., например, рис. 414); P — полное упругое сопротивление системы при колебаниях; $P-Q=P_1$ — так называемая восстанавливающая сила (добавочное упругое усилие, возникающее в системе в результате перемещения точки приложения груза Q на расстояние x при колебаниях), которую в пределах упругости можно считать пропорциональной координате x $(P_1=cx)$; c — коэффициент пропорциональности, представляющий собой усилие, необходимое для того, чтобы вызвать равную единице статическую деформацию системы в направлеиии действия груза Q. Если статическая деформация от груза Q равна δ_Q, то $c=Q/\delta_Q$.

Решение уравнения (29.23) приводит к таким формулам для вычисления частоты ω_0 и периода t_0 свободных колебаний:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{gc}{Q}}=\sqrt{\frac{g}{\delta_Q}} \quad \text{и} \quad t_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{\delta_Q}{g}}.$$

Свободные колебания невесомого тела суть простые гармонические колебания с частотой (периодом), равной частоте (периоду) колебаний математического маятника, длина которого равна статической деформации системы от груза Q. Так, например, если груз Q растягивает призматический стержень,

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{\Delta l}}=\sqrt{\frac{gEF}{Ql}};$$

при изгибе балки на двух шарнирных опорах грузом Q посредине пролета

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{f_{max}}}=\sqrt{\frac{48EJg}{Ql^3}}$$

и т. д.

Б. Если на упругую систему, кроме груза Q и силы упругого сопротивления системы P, в том же направлении действует периодически меняющаяся возмущающая сила S и сила сопротивления среды R, то дифференциальное уравнение движения груза Q при колебаниях также может быть представлено в виде уравнения равновесия, подобного уравнению (29.23)

$$\frac{Q}{g}x''+P-Q-S+R=\frac{Q}{g}x''+P_1-S+R=\frac{Q}{g}x''+cx-S+R=0. \tag{29.24}$$

Силу сопротивления среды R на практике в довольно большом числе случаев можно считать пропорциональной первой степени скорости колебательного движения, т. е. $R=rx'$. Если возмущающая сила S меняется по синусоидальному закону

$$S=H\sin\omega t,$$

где $H=S_{max}$, а ω — частота возмущающей силы, то уравнение (29.24) может быть переписано так:

$$\frac{Q}{g}x''+rx'+cx=H\sin\omega t,$$

или

$$x''+2nx'+\omega_0^2x=\frac{gH}{Q}\sin\omega t. \tag{29.25}$$

Здесь $n=0{,}5rg/Q$ — так называемый *коэффициент затухания колебаний*, а ω_0 — найденная выше частота свободных колебаний системы, возникающих при отсутствии как возмущающей силы S, так и силы сопротивления R.

Решение уравнения (29.25) приводит к такому выражению для амплитуды A *вынужденных* колебаний при наличии сил сопротивления:

$$A=\frac{H}{\frac{Q}{g}\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}=\frac{gH}{Q\omega_0^2}\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+4\left(\frac{n}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\delta_H}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+4\left(\frac{n}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (29.26)$$

Здесь

$$\frac{gH}{Q\omega_0^2}=\frac{gH}{Q}\cdot\frac{\delta_Q}{g}=\frac{H}{Q}\delta_Q=\delta_H$$

— статическая деформация системы от наибольшей величины возмущающей силы S $(S_{max}=H)$. Отношение амплитуды вынужденных колебаний A к величине деформации σ_H называется *коэффициентом нарастания колебаний* β:

$$\beta=\frac{A}{\delta_H}=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+4\left(\frac{n}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (29.27)$$

Таким образом, формула (29.21) для динамического коэффициента $K_д$ получает теперь такой вид;

$$K_д=1+\frac{A}{\delta_{c\,max}}=1+\frac{\delta_H}{\delta_Q}\beta. \quad (29.28)$$

В этом выражении не учтена амплитуда собственных колебаний системы, которая может иметь сколько-нибудь существенное значение лишь в самом начале процесса колебаний; при наличии сил сопротивления она довольно быстро уменьшается с течением времени.

На рис. 415 приведены графики изменения коэффициента нарастания колебаний β в зависимости от величины отношения ω/ω_0 при разных значениях коэффициента затухания колебаний n (отношения n/ω_0). Если частота изменения возмущающей силы близка к частоте свободных колебаний системы, т. е. $(\omega/\omega_0)\approx 1$, и если величина коэффициента затухания колебаний сравнительно невелика, то знаменатели формул (29.26) и (29.27) для A и β будут очень малыми, амплитуда колебаний и коэффициент нарастания колебаний будут очень большими (рис. 415). В этом случае даже небольшая возмущающая сила может вызвать высокие напряжения (явление резонанса).

С увеличением сил сопротивления явление резонанса становится все менее заметным. Заметим, однако, что силы сопротивления значительно уменьшают величину амплитуды вынужденных колебаний

только вблизи от резонанса ($0,75 \leqslant (\omega/\omega_0) \leqslant 1,25$); при других величинах отношения ω/ω_0 влияние сил сопротивления незначительно.

Из формул (29.26), (29.27) и (29.28) и рис. 415 видно, что если частота ω изменения возмущающей силы S очень мала, то амплитуда колебаний приближается к величине δ_H, коэффициент нарастания колебаний стремится к единице и наибольшие напряжения в системе могут быть вычислены как статические напряжения от груза Q и

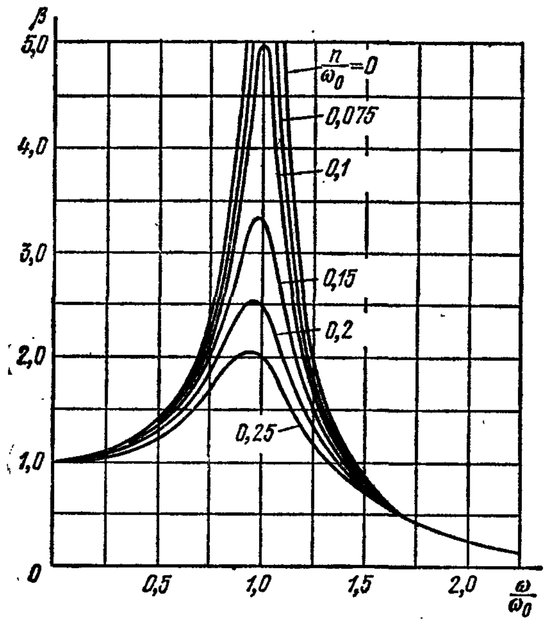


Рис. 415.

и наибольшего значения возмущающей силы S ($S_{max}=H$). При очень большой частоте изменения возмущающей силы S амплитуда колебаний и коэффициент нарастания колебаний стремятся к нулю, груз Q можно рассматривать как *неподвижный;* поэтому наибольшее напряжение в системе равно *статическому напряжению* от груза Q.

Это обстоятельство имеет очень большое практическое значение; оно используется при конструировании разного рода поглотителей колебаний, сейсмографов, вибрографов и других приборов. В машиностроении амортизаторы, предохраняющие основания машин от усилий, возникающих при колебаниях, подбираются так, чтобы частота собственных колебаний машины на амортизаторах была значительно меньше частоты изменения возмущающей силы.

§ 172. Учет массы упругой системы при колебаниях

А. Если колеблющаяся система, несущая груз Q, обладает довольно значительной распределенной массой (число степеней свободы, следовательно, велико), упрощенные расчеты, приведенные в предыдущем параграфе, будут иметь уже значительную погрешность. В этом случае дифференциальные уравнения движения составляются с учетом массы системы. При решении подобного рода задач удобнее исходить не из условий равновесия, на основе которых составлены уравнения (29.23) и (29.24), а из закона сохранения энергии.

Полагая, что количество энергии, сообщенное системе при выведении ее из положения равновесия и представляющее собой сумму кинетической и потенциальной энергии груза и упругой системы, при свободных колебаниях постоянно, получаем уравнение

$$U+T=\text{const}. \tag{29.29}$$

Это уравнение показывает, что при колебаниях происходит непрерывный процесс преобразования энергии из одного вида в другой, не сопровождающийся какими-либо потерями энергии. Когда упругая система достигает одного из крайних положений, в котором скорость колебательного движения равна нулю, а следовательно, равна нулю и кинетическая энергия ($T=0$), потенциальная энергия груза и системы достигает наибольшего значения $U=U_{max}$; наоборот, в положении равновесия $U=0$ и $T=T_{max}$.

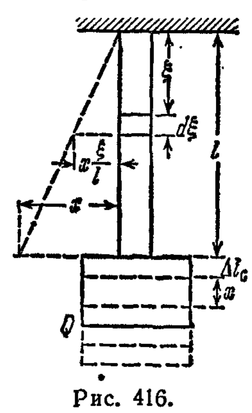


Рис. 416.

Заметим, что принцип, положенный в основу уравнения (29.29), применим лишь для систем с одной степенью свободы, так как закон сохранения энергии не учитывает обмена энергии, происходящего в системах с несколькими степенями свободы. Таким образом, решение задачи о колебаниях системы с большим числом степеней свободы здесь сводится к простейшей задаче, разобранной в § 171, и мы сможем приближенно найти лишь одну (первую) частоту свободных колебаний.

Рассмотрим теперь некоторые примеры использования уравнения (29.29).

Б. В качестве первого примера исследуем колебания груза Q, подвешенного к нижнему концу призматического стержня длиной l, площадью поперечного сечения F и удельным весом γ (рис. 416). Выведенный из положения равновесия и затем предоставленный самому себе груз начнет совершать продольные колебания около положения равновесия. Составим выражения для U и T колеблющейся системы: груз — стержень.

Потенциальная энергия системы по сравнению с положением равновесия изменится на $U=U_t-U_0$, где U_0 — потенциальная энергия системы в начальный момент (в положении равновесия), а U_t — в момент t.

Потенциальную энергию груза Q в начальный момент обозначим через U_Q; потенциальная энергия стержня в тот же момент равна $Q\Delta l_c/2$, где Δl_c — статическая деформация стержня от груза Q.

Таким образом,

$$U_0=U_Q+\frac{Q\Delta l_c}{2}.$$

В момент t, когда груз переместится на расстояние x и стержень получит такую же дополнительную деформацию x, потенциальная энергия груза уменьшится на Qx, а сила упругого сопротивления стержня и статическая деформация его увеличатся в отношении $\frac{\Delta l_c+x}{\Delta l_c}$. Поэтому

$$U_t=U_Q-Qx+\frac{1}{2}Q\frac{\Delta l_c+x}{\Delta l_c}\cdot\Delta l_c\cdot\frac{\Delta l_c+x}{\Delta l_c}=$$
$$=U_Q-Qx+\frac{Q\cdot\Delta l_c}{2}+Qx+\frac{Qx^2}{2\Delta l_c}=U_0+\frac{Qx^2}{2\Delta l_c}$$

и

$$U=U_t-U_0=\frac{Qx^2}{2\Delta l_c}. \qquad (29.30)$$

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии груза T_1 и стержня T_2. Кинетическая энергия груза $T_1=\frac{Q}{2g}(x')^2$. При вычислении кинетической энергии стержня учтем, что в некоторый момент t скорость груза и нижнего конца стержня равна x', а верхнего — нулю. Скорости промежуточных сечений будут иметь значения, заключающиеся между этими двумя.

Предположим, что при колебаниях перемещения всех сечений стержня по отношению к закрепленному концу меняются по тому же закону, что и при статическом растяжении, т. е. пропорционально расстоянию от закрепленного сечения. Таким образом (рис. 416), если нижнее сечение стержня переместилось на величину x, то сечение, отстоящее от места защемления на ξ, переместится на величину $x\frac{\xi}{l}$, скорость этого сечения будет равна $x'\frac{\xi}{l}$. Живая сила элемента стержня длиной $d\xi$, отстоящего на ξ от закрепленного конца, будет равна $dT_2=\frac{\gamma F\,d\xi}{2g}x'^2\left(\frac{\xi}{l}\right)^2$.

Кинетическая энергия всего стержня будет равна сумме величин dT_2, т. е.

$$T_2=\int_0^l\frac{\gamma F\,d\xi}{2g}x'^2\frac{\xi^2}{l^2}=\frac{x'^2}{2g}\frac{\gamma Fl}{3}.$$

Таким образом, живая сила стержня равна живой силе груза, имеющего массу $\gamma Fl/(3g)$, т. е. равную трети массы стержня, и двигающегося с той же скоростью x', что и груз Q. Полная же кинетическая энергия системы груз — стержень будет

$$T = T_1 + T_2 = \frac{(x')^2}{2g}\left(Q + \frac{\gamma Fl}{3}\right).$$

Подставляя T и выражение U (29.30) в уравнение (29.29), дифференцируем последнее по t и находим

$$\frac{1}{g}\left(Q + \frac{\gamma Fl}{3}\right)x'' + \frac{EF}{l}x = \frac{1}{g}\left(Q + \frac{\gamma Fl}{3}\right)x'' + \frac{Q}{\Delta l_Q}x = 0,$$

или

$$x'' + \frac{g}{\Delta l_Q}\cdot\frac{Q}{Q + \frac{\gamma Fl}{3}}x = x'' + \frac{g}{\Delta l_{пр}}x = 0.$$

Здесь $\Delta l_{пр}$ — статическая деформация от груза $Q + \gamma Fl/3$. Полученное нами дифференциальное уравнение движения с учетом массы колеблющегося стержня отличается от уравнения (29.23) только величиной множителя при x и полностью совпадает с ним, если пренебречь массой стержня. Поэтому поправка на массу стержня, которую нужно ввести в расчеты предыдущего параграфа, состоит в том, что при определении частоты свободных колебаний стержня статическая деформация его вычисляется не от груза Q, но от груза Q, сложенного с одной третью веса стержня. Таким образом, учет массы колеблющегося стержня уменьшает частоту свободных колебаний и увеличивает их период. Величину $\gamma Fl/(3g)$ называют *приведенной массой стержня.*

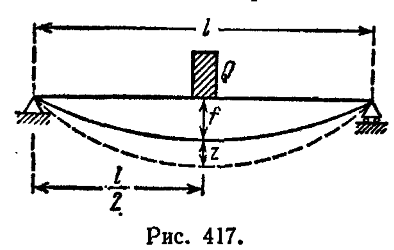


Рис. 417.

В. В качестве второго примера рассмотрим балку на двух шарнирных опорах с грузом Q посредине пролета (рис. 417).

Обозначим через $f = Ql^3/(48EJ)$ наибольший статический прогиб балки под действием груза Q, а через z — переменный добавочный прогиб среднего сечения балки при колебаниях. Предположим, что при свободных колебаниях добавочные прогибы балки меняются по ее длине по тому же уравнению, что и при статической нагрузке силой Q; это последнее имеет вид (см. § 85)

$$y = \frac{Ql^3}{48EJ}\cdot\frac{3l^2x - 4x^3}{l^3} = \frac{f}{l^3}(3l^2x - 4x^3). \qquad (29.31)$$

Таким образом, если при колебаниях среднее сечение балки дополнительно переместится на z от положения статического равнове-

сия, то сечение на расстоянии x от левого конца переместится на

$$y = \frac{z}{l^3}(3l^2x - 4x^3).$$

Скорость перемещения центра тяжести этого сечения будет

$$\frac{z'}{l^3}(3l^2x - 4x^3).$$

Кинетическая энергия элемента балки длиной dx выразится формулой

$$dT_2 = \frac{\gamma F\,dx}{2g} z'^2 \left\{\frac{3l^2x - 4x^3}{l^3}\right\}^2,$$

а кинетическая энергия всей балки будет равна

$$T_2 = 2\frac{\gamma F}{2g} z'^2 \frac{1}{l^6}\int_0^{l/2}(3l^2x - 4x^3)^2\,dx = \frac{17}{35}\frac{\gamma F l}{2g} z'^2. \tag{29.32}$$

Кинетическая энергия груза равна

$$T_1 = \frac{Q}{2g}(z')^2.$$

Так как потенциальная энергия при изгибе балки вычисляется по формуле $U = \int_l \frac{M^2\,dx}{2EJ}$, а $M = EJ\frac{d^2y}{dx^2}$, то

$$U = \int_l \frac{EJ}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx.$$

Но при перемещении среднего сечения балки на расстояние z от положения статического равновесия $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{24}{l^3}zx$; поэтому

$$U = \int_l \frac{EJ}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx = 2\cdot\frac{EJ}{2}\int_0^{l/2}\left(\frac{24zx}{l^3}\right)^2 dx = \frac{24EJ}{l^3}z^2.$$

Подставляя выражения для U и $T = T_1 + T_2$ в уравнение (29.29) и дифференцируя его по t, имеем

$$z'' + \frac{48EJ}{l^3}\cdot\frac{g}{\left(Q + \frac{17}{35}\gamma F l\right)} z = z'' + \frac{g}{f_{\text{пр}}} z = 0.$$

Отсюда ясно, что для учета массы балки при определении частоты и периода свободных колебаний следует ее считать невесомой, а к весу груза Q прибавить $\frac{17}{35} = 0{,}486$ веса балки. Величина $\frac{17}{35}\frac{\gamma F l}{g}$ называется приведенной массой балки.

Заметим, что если за изогнутую ось балки приближенно взять синусоиду $y=f\sin\frac{\pi x}{l}$, то приведенная масса получилась бы равной не $\frac{17}{35}\frac{\gamma Fl}{g}$, а $\frac{1}{2}\frac{\gamma Fl}{g}$, что достаточно близко к более точному значению.

Определенная таким образом величина приведенной массы балки получена все же в предположении, что масса балки невелика по сравнению с массой груза Q, так как мы пренебрегаем влиянием собственного веса балки на кривую изгиба ее оси; уравнение же изогнутой оси (29.31) соответствует случаю приложения одного сосредоточенного груза посредине пролета.

Г. Возьмем теперь другой крайний случай, когда масса балки очень велика по сравнению с грузом Q или когда колеблющаяся балка загружена сплошной, равномерно распределенной нагрузкой q (в которую включен и собственный вес балки). Тогда кривая изогнутой оси будет иметь уравнение (см. § 86)

$$y=-\frac{q}{24EJ}[l^3x-2lx^3+x^4]=-\frac{16\cdot f}{5l^4}[l^3x-2lx^3+x^4],$$

где f — прогиб посредине пролета.

Живая сила элемента балки длиной dx, находящегося на расстоянии x от левой опоры, выразится через скорость среднего сечения балки z' такой формулой:

$$dT=\frac{q\,dx}{2g}z'^2\left(\frac{16}{5l^4}\right)^2(l^3x-2lx^3+x^4)^2.$$

Вся кинетическая энергия балки будет равна

$$T=\frac{q}{2g}z'^2\left(\frac{16}{5l^4}\right)^2\int_0^l(l^3x-2lx^3+x^4)^2\,dx=\frac{ql}{2g}z'^2\,\frac{3968}{7875}.$$

Потенциальная энергия балки равна

$$U=\frac{EJ}{2}\int_0^l\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2dx=\frac{EJ}{2}\int_0^l\left[\frac{192}{5}\frac{z}{l^4}(x^2-lx)\right]^2dx=\frac{3072}{125}\frac{EJz^2}{l^3}.$$

Подставляя выражения для U и T в уравнение (29.29) и дифференцируя его по t, имеем

$$z''+\frac{48EJg}{\left(\frac{31}{63}ql\right)l^3}z=0.$$

Приведенная масса балки в этом случае равна $\frac{31}{63}\frac{ql}{g}=0{,}492\frac{ql}{g}$.

Таким образом, при подсчете периода собственных колебаний уравнение кривой изгиба играет весьма малую роль, лишь бы был сохранен *общий характер* изогнутой оси балки.

Для шарнирно-опертой балки при изгибе ее по кривой без точек перегиба можно всегда принимать за уравнение изогнутой оси уравнение синусоиды с одной полуволной $y=f\sin\frac{\pi x}{l}$ и приведенную массу балки считать равной $0{,}5\frac{ql}{g}$.

Итак, при определении первой частоты свободных колебаний системы с распределенной массой можно считать систему невесомой, а к массе сосредоточенного груза добавлять приведенную массу системы; операция «приведения» имеет силу и в том случае, если $Q=0$.

Пример. Стержень длиной l переменного сечения, несущий на одном конце груз Q (рис. 418), вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, к которой он прикреплен другим концом. Расстояние центра тяжести груза Q от оси вращения равно r.

Найти зависимость площади сечения стержня F_x от расстояния сечения x до свободного конца стержня при условии, что напряжения во всех сечениях равны $[\sigma]$. Объемный вес материала γ.

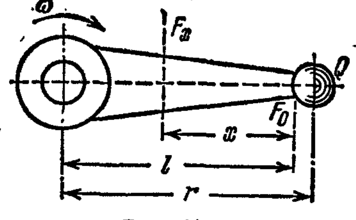


Рис. 418.

Каждая точка стержня с абсциссой x испытывает центростремительное ускорение, равное $\omega^2(l-x)$; поэтому для определения напряжений надо нагрузить все элементы стержня силами инерции, направленными от центра и равными массе элемента, умноженной на $\omega^2(l-x)$. Элемент длиной dx между двумя смежными сечениями с абсциссами x и $x+dx$, площади которых равны F_x и F_x+dF_x, нагружен силой инерции $\frac{F_x\gamma\,dx}{g}(l-x)\,\omega^2$, где g — ускорение силы тяжести.

Сечения стержня должны меняться таким образом, чтобы эта сила инерции вызвала на площади dF_x напряжение $[\sigma]$ (см. расчет для стержня равного сопротивления при растяжении и сжатии в § 25). Таким образом, получаем дифференциальное уравнение для F_x:

$$[\sigma]\cdot dF_x=\frac{F_x\gamma\,dx}{g}(l-x)\,\omega^2.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{dF_x}{F_x}=\frac{\gamma\omega^2}{g[\sigma]}(l-x)\,dx \quad \text{и} \quad \ln F_x=\frac{\gamma\omega^2}{g[\sigma]}\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)+C.$$

Для определения постоянной C полагаем $x=0$, тогда $F_x=F_0$ — площади на конце стержня. Эта площадь определяется в зависимости от силы инерции груза Q, растягивающей концевой элемент стержня:

$$F_0=\frac{Qr\omega^2}{g[\sigma]}.$$

Подставляя в уравнение для F_x значение $\ln F_0=C$, получаем

$$\ln F_x=\frac{\gamma\omega^2x}{2g[\sigma]}[2l-x]+\ln F_0 \quad \text{и} \quad F_x=F_0e^{\frac{\gamma\omega^2}{2g[\sigma]}(2l-x)\,x}.$$

Глава XXX

НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ УДАРЕ

§ 173. Основные положения

Явление удара получается в том случае, когда скорость рассматриваемой части конструкции или соприкасающихся с ней частей изменяется в *очень короткий период* времени.

При забивке свай тяжелый груз падает с некоторой высоты на верхний торец сваи и погружает ее в грунт; баба останавливается почти мгновенно, вызывая удар. Аналогичные явления происходят при ковке; удар испытывают и проковываемое изделие и шток молота с бойком, так как последний очень быстро останавливается при соприкосновении с изделием. Во время удара между обеими ударяющимися деталями возникают весьма большие взаимные давления. Скорость ударяющего тела *за очень короткий* промежуток времени изменяется и в частном случае падает до нуля; тело останавливается. Значит, на него от ударяемой детали передаются очень большие ускорения, направленные в сторону, обратную его движению, т. е. передается реакция $P_д$, равная произведению массы *ударяющего* тела на это ускорение.

$P_д$

Рис. 419.

Обозначая это ускорение через a, можно написать, что реакция $P_д = \frac{Q}{g} a$, где Q — вес ударяющего тела. По закону равенства действия и противодействия на ударяемую часть конструкции передается такая же сила, но обратно направленная (рис. 419). Эти силы и вызывают напряжения в обоих телах. Таким образом, в ударяемой части конструкции возникают такие напряжения, как будто к ней была приложена *сила инерции* ударяющего тела; мы можем вычислить эти напряжения, рассматривая (§ 164) силу инерции $P_д$ как *статическую* нагрузку нашей конструкции. Затруднение заключается в вычислении этой силы инерции. Продолжительности удара, т. е. величины того промежутка времени, в течение которого происходит падение скорости до нуля, мы не знаем. Поэтому остается неизвестной величина ускорения a, а стало быть, и силы $P_д$. Таким образом, хотя вычисление напряжений при ударе представляет собой частный случай задачи учета сил инерции (§ 164), однако для вычисления силы $P_д$ и связанных с ней напряжений и деформаций здесь приходится применять иной прием и пользоваться законом сохранения энергии.

При ударе происходит очень быстрое превращение одного вида энергии в другой: кинетическая энергия ударяющего тела превращается в потенциальную энергию деформации. Выражая эту энергию в функции силы $P_д$ или напряжений, или деформаций (§ 98), мы получаем возможность вычислить эти величины.

Решение инженерных задач строится обычно на основе приближенной теории упругого удара, в которой принимаются следующие основные допущения:

1. Кинетическая энергия ударяющего тела полностью переходит в потенциальную энергию деформации ударяемого тела; при этом пренебрегают энергией, идущей на деформацию ударяющего тела и основания, на котором находится ударяемое тело.

2. Закон распределения напряжений и деформаций по объему ударяемого тела остается таким же, как и при статическом действии сил; при этом не учитывается изменение распределения напряжений и деформаций в том месте, где происходит соударение тел, а также за счет колебаний высокой частоты, сопровождающих явление удара во всем объеме тела.

Первое допущение идет обычно в запас прочности, так как ставит ударяемое тело в худшие условия, чем это имеет место в действительности; второе допущение пойдет не в запас прочности для наиболее напряженных частей ударяемого тела.

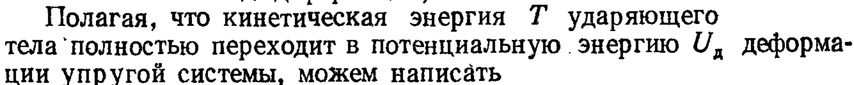
§ 174. Общий прием вычисления напряжений при ударе

А. Предположим, что очень жесткое тело A весом Q, деформацией которого можно пренебречь, падая с некоторой высоты H, ударяет по другому телу B, опирающемуся на упругую систему C (рис. 420). В частном случае это может быть падение груза на конец призматического стержня, другой конец которого закреплен (продольный удар), падение груза на балку, лежащую на опорах (изгибающий удар), и т. п.

В течение очень короткого промежутка времени упругая система C испытает некоторую деформацию. Обозначим через $\delta_д$ перемещение тела B (местной деформацией которого пренебрежем) в направлении удара. В упомянутых частных случаях при продольном ударе за перемещение $\delta_д$ соответственно нужно считать продольную деформацию стержня $\Delta l_д$, при изгибающем ударе — прогиб балки $f_д$ в ударяемом сечении и т. п. В результате удара в системе C возникнут напряжения $p_д$ ($\sigma_д$ или $\tau_д$ — в зависимости от вида деформации).

Рис. 420.

Полагая, что кинетическая энергия T ударяющего тела полностью переходит в потенциальную энергию $U_д$ деформации упругой системы, можем написать



$$T = U_д. \qquad (30.1)$$

Так как к моменту окончания деформации ударяющее тело пройдет путь $H+\delta_д$, то его запас энергии будет измеряться произведенной

им работой $A_д$ и будет равен

$$T = A_д = Q\,(H + \delta_д). \qquad (30.2)$$

Вычислим теперь $U_д$. При статической деформации потенциальная энергия $U_с$ численно равна половине произведения действующей силы на соответствующую деформацию (§ 98):

$$U_с = \frac{1}{2}\,Q\,\delta_с. \qquad (30.3)$$

Статическая деформация $\delta_с$ в ударяемом сечении может быть вычислена по закону Гука, который в общем виде можно записать так:

$$\delta_с = \frac{Q}{c}, \text{ или } Q = c\delta_с.$$

Здесь (см. § 171) c — некоторый коэффициент пропорциональности (называемый иногда жесткостью системы); он зависит от свойств материала, формы и размеров тела, вида деформации и положения ударяемого сечения. Так, при простом растяжении или сжатии $\delta_с = \Delta l_с = Ql/(EF)$ и $c = EF/l$; при изгибе балки, шарнирно-закрепленной по концам, сосредоточенной силой Q посредине пролета $\delta_с = f_{с\,max} = Ql^3/(48EJ)$ и $c = 48EJ/l^3$ и т. д.

Таким образом, формула (30.3) может быть переписана так:

$$U_с = \frac{1}{2}\,Q\,\delta_с = \frac{c}{2}\,\delta_с^2.$$

В основу этой формулы положены две предпосылки: а) справедливость закона Гука и б) постепенный — от нуля до окончательного значения — рост силы Q, напряжений $p_с$ и пропорциональных им деформаций $\delta_с$.

Опыты с определением модуля упругости по наблюдениям над упругими колебаниями стержней показывают, что и при динамическом действии нагрузок закон Гука остается в силе, и модуль упругости сохраняет свою величину. Что касается характера нарастания напряжений и деформаций, то и при ударе деформация происходит, хотя и быстро, но не мгновенно; $\delta_д$ постепенно растет в течение очень короткого промежутка времени от нуля до окончательного значения; параллельно росту деформаций возрастают и напряжения $p_д$.

Реакция системы C на действие упавшего груза Q (назовем ее $P_д$) является следствием развития деформации $\delta_д$; она растет параллельно $\delta_д$ от нуля до окончательной, максимальной величины и, если напряжения $p_д$ не превосходят предела пропорциональности материала, связана с ней законом Гука:

$$\delta_д = \frac{P_д}{c},$$

где c — упомянутый выше коэффициент пропорциональности, сохраняющий свое значение и при ударе.

Таким образом, обе предпосылки для правильности формулы (30.3) принимаются и при ударе. Поэтому можно считать, что вид формулы для $U_д$ при ударе будет тот же, что и при статическом нагружении системы C силой инерции $P_д$, т. е.

$$U_д = \frac{1}{2} P_д \delta_д = \frac{c}{2} \delta_д^2 = \frac{Q}{2\delta_c} \delta_д^2. \qquad (30.4)$$

(Здесь учтено, что по предыдущему $c=Q/\delta_c$.) Подставляя значения T и $U_д$ в уравнение (30.1), получаем

$$Q(H+\delta_д) = \frac{Q}{2\delta_c} \delta_д^2, \qquad (30.5)$$

или

$$\delta_д^2 - 2\delta_c\delta_д - 2H\delta_c = 0. \qquad (30.6)$$

Отсюда

$$\delta_д = \delta_c \pm \sqrt{\delta_c^2 + 2H\delta_c}$$

или, удерживая перед радикалом для определения наибольшей величины деформации системы в направлении удара знак плюс, получаем

$$\delta_д = \delta_c \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}}\right] = K_д\delta_c. \qquad (30.7)$$

Так как напряжения и усилия по закону Гука пропорциональны деформации, то

$$p_д = p_c \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}}\right] = K_д p_c \qquad (30.8)$$

и

$$P_д = Q \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}}\right] = K_д Q. \qquad (30.9)$$

Из этих формул видно, что величина динамических деформаций, напряжений и усилий зависит от величины статической деформации, т. е. от жесткости и продольных размеров ударяемого тела; ниже это дополнительно будет показано на отдельных примерах. Величина

$$K_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} \qquad (30.10)$$

в данном случае представляет собой динамический коэффициент. Заменяя в формуле (30.10) H на $0{,}5v^2/g$, где v — скорость ударяющего тела в начальный момент удара, получаем

$$K_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_c}}. \qquad (30.11)$$

Кроме того, так как

$$\frac{2H}{\delta_c} = \frac{QH}{\frac{1}{2}Q\delta_c} = \frac{T_0}{U_c},$$

где $T_0 = QH$ — энергия ударяющего тела к моменту начала удара,

то выражение для динамического коэффициента может быть представлено еще и в таком виде:

$$K_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_c}}. \qquad (30.12)$$

Б. Если мы в формулах (30.7) и (30.8) положим $H=0$, т. е. просто сразу приложим груз Q, то $\delta_д = 2\delta_c$ и $p_д = 2p_c$; при внезапном приложении силы Q деформации и напряжеиия вдвое больше, чем при статическом действии той же силы.

Наоборот, если высота падения груза H (или скорость v) велика по сравнению с деформацией δ_c, то в подкореином выражении формул (30.7) — (30.11) можно пренебречь единицей по сравнению с величиной отношения $2H/\delta_c$. Тогда для $\delta_д$ и $p_д$ получаются следующие выражения:

$$\delta_д = \delta_c\left(1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}}\right) \quad и \quad p_д = p_c\left(1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}}\right). \qquad (30.13)$$

При очень большой величине отношения $2H/\delta_c$ можно пренебречь и единицей, стоящей перед корнем, т. е. написать

$$\delta_д = \delta_c \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} \quad и \quad p_д = p_c \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}}. \qquad (30.14)$$

Динамический коэффициент в этом случае определяется по формуле

$$K_д = \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} = \sqrt{\frac{T_0}{U_c}}. \qquad (30.15)$$

Необходимо отметить, что в то время как пренебрежение единицей в подкоренном выражении допустимо уже при $2H/\delta_c \geqslant 10$ (неточность приближенных формул будет не больше 5%), пренебрежение единицей, стоящей перед корнем, допустимо лишь при очень большой величине отношения $2H/\delta_c$. Так, например, для того чтобы приближенные формулы (30.14) и (30.15) давали погрешность не более 10%, отношение $2H/\delta_c$ должно быть больше 110.

Формулы $\delta_д = K_д\delta_c$ и $p_д = K_д p_c$, в которых $K_д$ — выражается через T_0/U_c (30.12), могут быть использованы также для решеиия задачи о встречном ударе тел, двигающихся с некоторой скоростью, при определении напряжений в цилиндре двигателя виутреннего сгорания, вызванных резким повышением давления газа при вспышке горючей смеси и др. На этом основанин их можно считать общими формулами для расчета на удар.

Обобщая сказанное выше, можем наметить следующий общий прием решения задач на определение напряжений при ударе. Применяя закон сохранения энергии, надо:

1) вычислить кинетическую энергию ударяющего тела T;

2) вычислить потенциальную энергию $U_д$ тел, воспринимающих удар, под нагрузкой их силами инерции при ударе; потенциальная

энергия должна быть выражена через напряжение ($\sigma_д$, $\tau_д$) в каком-либо сечении, через деформацию (удлинение, прогиб) или через силу инерции $P_д$ ударяющего тела;

3) приравнять величины $U_д$ и T и из полученного уравнения найти или непосредственно динамическое напряжение, или деформацию, а по ней, пользуясь законом Гука, напряжение или силу $P_д$ и соответствующие ей динамические напряжения и деформации.

Описанный общий прием расчета на удар предполагает, что вся кинетическая энергия ударяющего тела целиком переходит в потенциальную энергию деформации упругой системы. Это предположение не точно. Кинетическая энергия падающего груза частично превращается в тепловую энергию и энергию неупругой деформации основания, на которое опирается система.

Вместе с тем при высоких скоростях удара деформация за время удара не успевает распространиться на весь объем ударяемого тела и в месте удара возникают значительные местные напряжения, иногда превосходящие предел текучести материала. Так, например, при ударе свинцовым молотком по стальной балке большая часть кинетической энергии превращается в энергию местных деформаций. Подобное же явление может иметь место даже и в том случае, когда скорость удара мала, но жесткость или масса ударяемой конструкции велика.

Указанные случаи соответствуют большим величинам дроби $2H/\delta_c$. Поэтому можно сказать, что описанный выше метод расчета применим, пока дробь $2H/\delta_c$ не превышает определенной величины. Более точные исследования показывают, что ошибка не превышает 10%, если $2H/\delta_c \leqslant 100$. Так как эта дробь может быть представлена в виде отношения T_0/U_c (см. выше), *то можно сказать, что изложенный метод применим, пока энергия удара превышает не более чем в 100 раз потенциальную энергию деформации,* соответствующую *статической* нагрузке конструкции весом ударяющего груза. Учет массы ударяемого тела при ударе (см. § 178) позволяет несколько расширить пределы применимости этого метода в тех случаях, когда масса ударяемого тела велика.

Более точная теория удара излагается в курсах теории упругости.

§ 175. Частные случаи вычисления напряжений и проверки прочности при ударе

А. Вид формул, выведенных в § 174, показывает, какие большие качественные различия ведет за собой количественное изменение периода действия силы на тело.

Рассмотрим некоторые случаи удара при простейших деформациях. При этом для нахождения коэффициента динамичности применим основные формулы (30.10) и (30.12) и приближенную формулу (30.15).

Для определения $\delta_д$, $p_д$ и $P_д$ используем зависимости

$$\delta_д = K_д\delta_c; \quad p_д = K_д p_c \quad и \quad P_д = K_д Q.$$

В случае продольного растягивающего или сжимающего удара (рис. 421)

$$\delta_c = \Delta l_c = \frac{Ql}{EF}; \quad p_c = \sigma_c = \frac{Q}{F}$$

и

$$U_c = \frac{Q^2 l}{2EF} = \frac{\sigma_c^2 Fl}{2E} = \frac{\Delta l_c^2 EF}{2l}.$$

Для вычисления динамического коэффициента $K_д$ может быть выбраио одно из следующих выражений:

$$K_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 EF}{Q^2 l}} =$$
$$= 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 E}{\sigma_c^2 Fl}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 l}{\Delta l_c^2 EF}}. \qquad (30.16)$$

После этого без затруднений вычисляются $\Delta l_д$, $\sigma_д$ и $P_д$.

Приближенная формула для вычисления напряжеиий в данном частиом случае получает такой вид:

$$K_д = \frac{1}{\sigma_c}\sqrt{\frac{2T_0 E}{Fl}} \quad и \quad \sigma_д = \sigma_c K_д = \sqrt{\frac{2T_0 E}{Fl}}. \qquad (30.17)$$

Замечаем, что как при статической, так и при динамической нагрузке напряжение в сжатом стержне зависит от величины сжимающей силы и от площади поперечного сечения стержня.

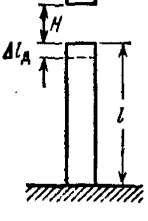


Рис. 421.

Но при статическом действии груза Q передающаяся на стержень сила равна Q и не зависит от размеров и материала стержня, при ударе же величина силы $P_д$, вызывающей напряжения в стержне, зависит от ускореиия, передающегося от ударяемого тела на ударяющее, т. е. от величины промежутка времени, в течение которого изменяется скорость ударяющего тела. В свою очередь этот промежуток времени зависит от величины динамической продольной деформации $\Delta l_д$, от *податливости* стержня. Чем эта величина больше, т. е. чем меньше модуль E и чем больше длина стержия l, тем больше продолжительность удара, меньше ускорение и меньше давлеиие $P_д$.

Таким образом, при *равномерном* распределении напряжений, одинаковом во всех сечениях стержня, *динамическое* напряжение будет *уменьшаться* с увеличением площади поперечного сечения стерж-

ня и с увеличением его податливости (т. е. с увеличением длины и уменьшением модуля упругости E); именно поэтому смягчают удар всякие рессоры и пружины, расположенные между ударяющимися деталями. Все это и отражают приведенные выше формулы. В частности, исходя из формул (30.17), с известным приближением можно считать, что при продольном ударе величина напряжений зависит уже не от площади, а от объема стержня.

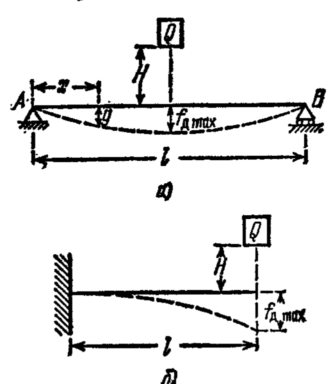


Рис. 422.

Найдя по формулам (30.8) и (30.16) или (30.17) величину динамического напряжения, мы можем теперь написать условие прочности в виде

$$\sigma_д \leqslant [\sigma_д], \qquad (30.18)$$

где $[\sigma_д]$ — допускаемая величина нормальных напряжений при ударе, равная для пластичного материала $[\sigma_д]=\sigma_т/k_д$. Величину коэффициента запаса $k_д$ можно было бы выбрать равной величине основного коэффициента запаса k_0 при статическом действии нагрузок (т. е. 1,5÷1,6, § 16), так как динамичность нагрузки уже отражена в формулах (30.16) и (30.17); однако, ввиду некоторой упрощенности изложенного метода расчета, этот коэффициент принимают несколько повышенным — до 2. Кроме того, обычно в этих случаях применяют материал более высокого качества (в отношении однородности и пластических свойств).

Б. При изгибе величина статической деформации $\delta_с$, представляющей собой статический прогиб балки $f_с$ в месте удара, зависит от схемы нагружения и условий опирания балки.

Так, например, для балки пролетом l, шарнирно-закрепленной по концам и испытывающей посредине пролета удар от падающего с высоты H груза Q (рис. 422, a), получаем

$$\delta_с = f_{с\,max} = \frac{Ql^3}{48EJ}, \qquad p_с = \sigma_{с\,max} = \frac{Ql}{4W}$$

и

$$U_с = \frac{Qf_{с\,max}}{2} = \frac{Q^2l^3}{96EJ};$$

для консоли, испытывающей удар от груза Q, падающего на свободный конец консоли (рис. 422, $б$):

$$\delta_с = f_{с\,max} = \frac{Ql^3}{3EJ}, \quad p_с = \sigma_{с\,max} = \frac{Ql}{W}$$

и

$$U_{\text{с}}=\frac{Qf_{\text{с max}}}{2}=\frac{Q^2l^3}{6EJ}.$$

Подставляя в формулу для коэффициента динамичности $K_{\text{д}}$ значения $\delta_{\text{с}}=f_{\text{с max}}$ или $U_{\text{с}}$, находим $K_{\text{д}}$, а затем и величину динамических напряжений и деформаций. Так, например, в случае балки на двух опорах при вычислении динамического напряжения $\sigma_{\text{д max}}$ имеем такую формулу:

$$\sigma_{\text{д max}}=K_{\text{д}}\sigma_{\text{с max}}=\frac{Ql}{4W}\left[1+\sqrt{1+\frac{96T_0EJ}{Q^2l^3}}\right]. \qquad (30.19)$$

Условие прочности (30.18) в этом случае напишется так:

$$\sigma_{\text{д max}}=\frac{Ql}{4W}\left[1+\sqrt{1+\frac{96T_0EJ}{Q^2l^3}}\right]\leqslant[\sigma_{\text{д}}]=\frac{\sigma_{\text{т}}}{k_{\text{д}}}. \qquad (30.20)$$

Приближенные формулы для вычисления $f_{\text{д max}}$ и $\sigma_{\text{д max}}$ в случае удара по балке на двух опорах (рис. 422, *а*) получают такой вид:

$$f_{\text{д max}}=K_{\text{д}}f_{\text{с max}}=f_{\text{с max}}\sqrt{\frac{T_0}{U_{\text{с}}}}=\frac{Ql^3}{48EJ}\sqrt{\frac{96T_0EJ}{Q^2l^3}}=\sqrt{\frac{T_0l^3}{24EJ}} \qquad (30.21)$$

и

$$\sigma_{\text{д max}}=K_{\text{д}}\sigma_{\text{с max}}=\frac{Ql}{4W}\sqrt{\frac{96T_0EJ}{Q^2l^3}}=\sqrt{\frac{6T_0EJ}{W^2l}}. \qquad (30.22)$$

Аналогичные выражения для $f_{\text{д max}}$ и $\sigma_{\text{д max}}$ получаются и в случае удара по консоли (рис. 422, *б*). Имея в виду, что

$$J=i^2F, \quad W=\frac{J}{z_{\max}}$$

и

$$\frac{J}{W^2}=\left(\frac{z_{\max}}{i}\right)^2\frac{1}{F},$$

можем представить формулу (30.22) еще и в таком виде:

$$\sigma_{\text{д max}}=\frac{z_{\max}}{i}\sqrt{\frac{6T_0E}{Fl}}. \qquad (30.23)$$

Из приближенной формулы (30.23) видно, что динамические напряжения при изгибе балки зависят от модуля упругости материала, объема балки, формы ее поперечного сечения (отношение $z_{\max}/i$), а также от схемы нагружения и условий опирания балки (в данном случае в подкоренном выражении стоит $6T_0$; для балок, иначе загруженных и закрепленных, числовой коэффициент у T_0 будет другим). Таким образом, в балке прямоугольного сечения высотой h и шириной b, поставленной на ребро или положенной плашмя, наи-

большие напряжения при ударе будут одинаковы и равны (по приближенной формуле)

$$\sigma_{д\,max}=\sqrt{\frac{18T_0E}{Fl}},$$

так как в обоих случаях

$$\frac{z_{max}}{i}=\frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{\frac{bh^3}{12bh}}}=\frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{hb^3}{12bh}}}=\sqrt{3}.$$

Как известно, при одинаковой статической нагрузке наибольшие напряжения в балке, положенной плашмя, будут в отношении h/b больше, чем напряжения в балке, поставленной на ребро. Сказанное выше, разумеется, справедливо лишь до тех пор, пока явление удара происходит в пределах упругости.

Сопротивление балок ударным нагрузкам зависит и от момента сопротивления и от жесткости балки. Чем больше податливость, деформируемость балки, тем бо́льшую кинетическую энергию удара она может принять при одних и тех же допускаемых напряжениях. Наибольший прогиб балка дает в том случае, когда во всех ее сечениях наибольшие напряжения будут одинаковыми, т. е. если это будет *балка равного сопротивления*; такие балки при одном и том же допускаемом напряжении дают бо́льшие прогибы, чем балки постоянного сечения, и, значит, могут поглощать большую энергию удара. Поэтому рессоры обычно и делают в форме балок равного сопротивления.

В. Рассмотрим теперь задачу определения напряжений при скручивающем ударе.

Если вращающийся вал внезапно останавливается торможением одного из его концов, а на другом его конце на него передается живая сила маховика T_0, скручивающая вал, то напряжения также могут быть определены указанным выше методом. Вал будет скручиваться двумя парами сил (силы инерции маховика и силы торможения) с моментом M.

В данном случае

$$\delta_c=\varphi_c=\frac{Ml}{GJ_p};\quad p_c=\tau_{c\,max}=\frac{M}{W_p}$$

и

$$U_c=\frac{M^2l}{2GJ_p}=\frac{\tau_{c\,max}^2 lW_p^2}{2GJ_p}=\frac{\varphi_c^2GJ_p}{2l}.$$

Следовательно,

$$\delta_д=\varphi_д=K_д\varphi_c=\varphi_c\sqrt{\frac{T_0}{U_c}}=\sqrt{\frac{2T_0l}{GJ_p}} \qquad (30.24)$$

и

$$p_д = \tau_{д\,max} = K_д \tau_{c\,max} = \tau_{c\,max}\sqrt{\frac{T_0}{U_c}} = \sqrt{\frac{2T_0 G J_p}{l W_p^2}} = 2\sqrt{\frac{T_0 G}{Fl}}, \tag{30.25}$$

так как

$$J_p = \frac{\pi r^4}{2}; \quad W_p = \frac{\pi r^3}{2} \quad и \quad \frac{J_p}{W_p^2} = \frac{2}{\pi r^2} = \frac{2}{F}.$$

Имея в виду, что живая сила маховика T_0 равна

$$T_0 = \frac{J_0}{2}\omega^2,$$

где J_0 — момент инерции массы маховика, а ω — угловая скорость, можем написать

$$\tau_{д\,max} = \omega\sqrt{\frac{2J_0 G}{Fl}}. \tag{30.26}$$

Замечаем, что и при скручивающем ударе наибольшие напряжения зависят от модуля упругости и от объема вала.

§ 176. Напряжения в стержнях переменного сечения при ударе

В § 175 показано, что для снижения напряжений при продольном ударе следует увеличивать объем стержня. Однако надо помнить, что это правильно лишь для того случая, когда площадь сечения стержня по его длине не меняется — напряжения во всех сечениях одинаковы. Совершенно иначе может обстоять дело, если разные участки длины стержня будут иметь неодинаковую площадь поперечного сечения (рис. 423).

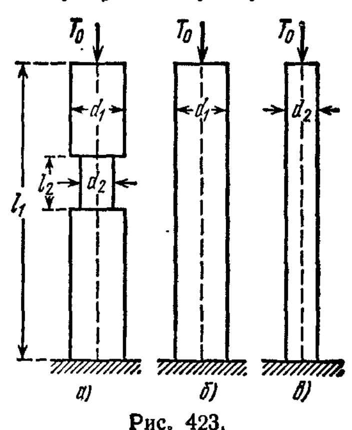


Рис. 423.

Мы знаем (формулы (30.16) или (30.17)), что динамическое напряжение при продольном ударе зависит и от площади поперечного сечения стержня и от его податливости, деформируемости. Наибольшие напряжения в стержне с выточкой (рис. 423, *а*) будут, таким образом, определяться величиной наименьшей площади (в месте выточки) и *сжимаемостью* стержня, которая зависит от деформаций уже всего стержня, а не только его ослабленной части.

Понижение напряжений в этом случае может быть достигнуто двумя путями. Можно увеличить площадь в наиболее ослабленном месте (если конструкция это позволяет) — вернуться к стержню одного диаметра d_1 (рис. 423, *б*); в этом случае мы увеличиваем площадь и в меньшей степени уменьшаем сжимаемость. Сила инерции немного возрастает, но в большей степени возрастет площадь в ослабленном сечении, и напряжение понизится.

Однако обычно этот (первый) путь неприменим, ибо конструкция может требовать сохранения выточки. Тогда для повышения прочности стержня необходимо увеличить его податливость, уменьшая площадь его сечения в утолщенной части. Если мы выполним весь стержень диаметром d_2 (рис. 423, *в*), то этим значительно увеличим сжимаемость стержня, уменьшим силу $P_д$ и динамическое напряжение. Таким образом, снижение напряжений может быть достигнуто двумя путями, ведущими *к выравниванию* напряжений,— *увеличением* объема путем уничтожения выточки и уменьшением объема за счет уменьшения площади утолщенной части.

Эти выводы легко проверить расчетом; определим наибольшие динамические напряжения, вызванные одним и тем же продольным ударом с запасом энергии $T_0=QH$ для трех стержней, показанных на рис. 423, *а*, *б* и *в*. Площадь утолщенной части стержня *а* назовем F_1, а тонкой F_2; обозначим $F_2/F_1=q$ и $l_2/l_1=p$. Напряжения в стержнях найдем по приближенным формулам (30.14) и (30.17). Наибольшее динамическое напряжение в стержне *а* по формуле (30.14)

$$p_д=\sigma_a=\sigma_c\sqrt{\frac{2H}{\Delta l_c}}=\sigma_2\sqrt{\frac{2H}{\Delta l_c}}=\frac{Q}{F_2}\sqrt{\frac{2H}{\Delta l_c}}=\sqrt{\frac{2T_0Q}{F_2^2\Delta l_c}}.$$

Так как

$$\Delta l_c=\frac{Ql_2}{EF_2}+\frac{Q(l_1-l_2)}{EF_1}=\frac{Ql_1}{EF_2}[p+q(1-p)],$$

то

$$\sigma_a=\sqrt{\frac{2T_0Q}{F_2^2\frac{Ql_1}{EF_2}[p+q(1-p)]}}=\sqrt{\frac{2T_0E}{F_1l_1q[p+q(1-p)]}}. \quad (30.27)$$

Напряжения в стержнях постоянного сечения *б* и *в* найдем по формуле (30.17)

$$\sigma_б=\sqrt{\frac{2T_0E}{F_1l_1}} \quad и \quad \sigma_в=\sqrt{\frac{2T_0E}{F_2l_1}}=\sqrt{\frac{2T_0E}{F_1ql_1}}; \quad (30.28)$$

так как

$$[p+q(1-p)]<q<1, \text{ то } \sigma_a>\sigma_в>\sigma_б.$$

Так, если $d_2/d_1=0{,}8$, а $l_2/l_1=0{,}1$, то $q=0{,}64$ и $p=0{,}1$; в этом случае вычисления дают $\sigma_a=1{,}52\,\sigma_б$; $\sigma_в=0{,}82\,\sigma_a=1{,}25\,\sigma_б$. Таким образом, наличие выточки, уменьшающей диаметр на 20% на одной десятой длины стержня, вызывает повышение напряжений на 50%; если

теперь дать этому стержню минимальную площадь по всей длине, то напряжения снизятся примерно на 20%.

Хотя эти подсчеты и сделаны по приближенным формулам, однако найденные таким путем соотношения между σ_a, $\sigma_б$ и $\sigma_в$ оказываются достаточно близкими к тем, которые могут быть получены по более точной формуле (30.8), если энергия удара T_0 не очень мала.

§ 177. Практические выводы из полученных результатов

Результаты приведенных выше подсчетов имеют громадное практическое значение. Прежде всего они показывают, что характер сопротивления стержней удару качественно резко отличается от сопротивления их статической деформации. Утолщение одной половины стержня при статическом сжатии не вызывает изменений напряжений в сечениях другой половины; при ударе же оно *повышает* их. Местные *уменьшения* площади поперечного сечения на *небольшой* длине стержня вызывают *резкое* повышение напряжений.

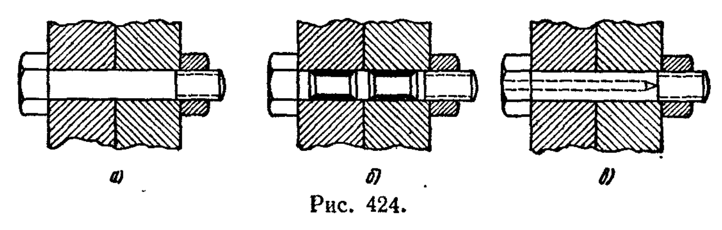


Рис. 424.

Для снижения напряжений надо стремиться главным образом к увеличению податливости стержня путем увеличения его длины, добавления буферной пружины, замены материала другим, с более низким модулем упругости, *выравнивания* площадей поперечных сечений. Наиболее эффективным может оказаться выравнивание площадей поперечных сечений по *наименьшей*.

Поэтому при конструировании стержней, работающих на удар, надо добиваться постоянной площади сечения по всей длине стержня; местные *утолщения* допустимы лишь на небольших участках длины; местные же выточки небольшой протяженности *крайне нежелательны*. Если при *таких условиях* не удается сконструировать достаточно прочный стержень, необходимо удлинение стержня или равномерное увеличение площади.

В качестве примера можно привести болт, передающий от одной части конструкции на другую растягивающий удар. Конструкция, показанная на рис. 424, *а*, будет плохо сопротивляться удару, так как участок болта с нарезкой, имеющий меньший диаметр, будет работать как выточка. Бóльшая часть энергии удара будет поглощаться частью болта, имеющей нарезку. Обрыв весьма вероятен.

Для улучшения конструкции надо заставить весь объем болта более или менее равномерно поглощать энергию удара; для этого надо сделать его площадь всюду (или почти всюду) равной площади по внутреннему диаметру нарезки. Этого можно достигнуть или обтачиванием тела болта (рис. 424, *б*), или высверливанием в нем канала (рис. 424, *в*).

В качестве примера увеличения сопротивления болтов путем их удлинения можно привести конструкцию, изображенную на

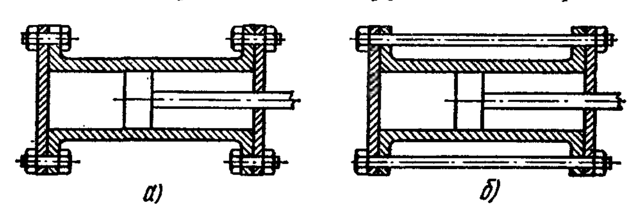


Рис. 425.

рис. 425, *а* и *б*. Крышки цилиндра бурового инструмента иногда испытывают сильные удары поршня. Короткие болты, прикрепляющие крышку к цилиндру по варианту рис. 425, *а*, давали обрыв. Выход был найден путем удлинения болтов по варианту рис. 425, *б*.

§ 178. Учет массы упругой системы, испытывающей удар

Исследуем, как отразится на величине расчетных напряжений при ударе учет массы ударяемого тела. В качестве примера рассмотрим случай удара при изгибе (рис. 422). Груз Q, падая на балку AB, в начальный момент удара имеет скорость $v_{гр}=\sqrt{2gH}$, балка в этот момент имеет скорость $v_б=0$ (неподвижна). В результате соударения за короткий промежуток времени все элементы балки приобретут некоторую (притом разную) скорость, а груз Q соответственно замедлит свое движеиие. В месте удара скорости груза и соприкасающихся с ним волокон балки будут одинаковы и равны $v_{ср}$; величину $v_{ср}$ можно найти, исходя из теоремы Карно:

$$v_{ср}=\frac{M_{гр}v_{гр}}{M_{гр}+\alpha M_0}=\frac{Q}{Q+\alpha Q_0}v_{гр}; \qquad (30.29)$$

здесь Q и $M_{гр}$ — вес и масса ударяющего тела; Q_0 и M_0 — вес и масса ударяемого тела (балки), а α — некоторый коэффициент приведения массы (меньший единицы), который приходится вводить вследствие того, что не все части ударяемого тела после соударения движутся с одинаковой скоростью $v_{ср}$ (см., например, рис. 422). В случае растяжения или сжатия стержня $\alpha=1/3$, при изгибе балки по схеме на

рис. 422, *а* $\alpha=17/35\approx 1/2$ и т. д. [1]). Из (30.29) видно, что $v_{\text{ср}}<v_{\text{гр}}=\sqrt{2gH}$; чем больше будет масса ударяемого тела M_0, тем меньше будет $v_{\text{ср}}$ по сравнению с $v_{\text{гр}}$. Кинетическая энергия, остающаяся в системе груз — балка после соударения равна

$$T_1=\frac{M_{\text{гр}}v_{\text{ср}}^2}{2}+\frac{\alpha M_0 v_{\text{ср}}^2}{2}=\frac{1}{2}(M_{\text{гр}}+\alpha M_0)\frac{M_{\text{гр}}^2 v_{\text{ср}}^2}{(M_{\text{гр}}+\alpha M_0)^2}=$$
$$=\frac{M_{\text{гр}}v_{\text{гр}}^2}{2}\cdot\frac{1}{1+\alpha\frac{Q_0}{Q}}=\frac{T_0}{1+\beta}, \qquad (30.30)$$

т. е. она в $1+\beta$ раз меньше кинетической энергии груза при ударе по невесомой балке. Таким образом, при учете массы ударяемого тела динамический коэффициент должен быть вычислен не по формулам (30.10), (30.11) и (30.12), а по формуле

$$K_{\text{д}}=1+\sqrt{1+\frac{T_0}{U_{\text{с}}(1+\beta)}}=1+\sqrt{1+\frac{2H}{\delta_{\text{с}}(1+\beta)}}=$$
$$=1+\sqrt{1+\frac{v_{\text{гр}}^2}{g\delta_{\text{с}}(1+\beta)}}, \qquad (30.31)$$

т. е. учет массы ударяемого тела снижает величину расчетных напряжений при ударе.

В качестве примера расчета на удар сложной конструкции разберем случай удара груза Q посредине пролета балки, опирающейся в A на шарнирную неподвижную опору, а в B — на шарнирную опору, поставленную на вторую балку посредине ее пролета (рис. 426). Пролет первой балки равен l_1, момент инерции J_1, модуль упругости E; для второй балки соответствующие величины равны l_2, J_2, E. Наибольшие динамические напряжения возникнут в крайних волокнах средних сечений балок: первой и второй. Найдем эти напряжения.

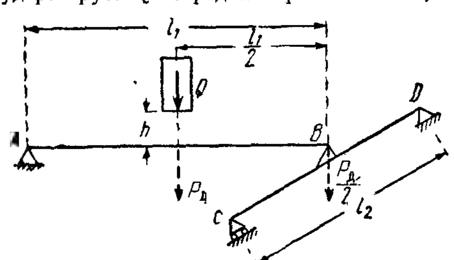


Рис. 426.

Поставленную задачу решим, умножая статические напряжения от груза Q в первой (AB) и второй (CD) балках на динамический коэффициент

$$K_{\text{д}}=1+\sqrt{1+\frac{2H}{f_{\text{с}}}}.$$

Статический прогиб первой балки в ударяемом сечении определяется деформацией всей конструкции и равен $f_0=f_1+\frac{1}{2}f_2$, где f_1 и f_2 — соответственно наибольшие

[1]) Подробный вывод выражения для коэффициента α в случае удара при изгибе балки по схеме рис. 422, *а* приведен в § 231 книги Беляева Н. М. «Сопротивление материалов», издания 7÷14.

статические прогибы первой балки от груза Q и второй — от груза $Q/2$. Так как

$$f_1=\frac{Ql_1^3}{48EJ_1} \quad \text{и} \quad f_2=\frac{Ql_2^3}{96EJ_2},$$

то

$$f_0=\frac{Ql_1^3}{48EJ_1}+\frac{Ql_2^3}{192EJ_2}=\frac{Ql_1^3}{48EJ_1}\left[1+\frac{J_1}{4J_2}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3\right]$$

и

$$K_д=1+\sqrt{1+\frac{96EJ_1H}{Ql_1^3\left[1+\frac{J_1}{4J_2}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3\right]}}.$$

Наибольшие напряжения в первой и второй балках будут

$$\sigma_{д_1}=K_д\sigma_{c_1}=K_д\frac{Ql_1}{4W_1} \quad \text{и} \quad \sigma_{д_2}=K_д\sigma_{c_2}=K_д\frac{Ql_2}{8W_2}.$$

Так как количества потенциальной энергии, накапливающейся при ударе в первой балке ($U_{д_1}$), во второй балке ($U_{д_2}$) и в обеих балках вместе ($U_д=U_{д_1}+U_{д_2}=T_0$) соответственно пропорциональны U_{c_1}, U_{c_2} и U_c (коэффициентом пропорциональности служит квадрат динамического коэффициента), то

$$\frac{U_{д_1}}{U_д}=\frac{U_{д_1}}{T_0}=\frac{U_{c_1}}{U_c}=\frac{\frac{1}{2}Qf_1}{\frac{1}{2}Qf_1+\frac{1}{4}Qf_2}=\frac{f_1}{f_1+\frac{1}{2}f_2}=\frac{f_{01}}{f_0} \qquad (а)$$

и

$$\frac{U_{д_2}}{U_д}=\frac{U_{д_2}}{T_0}=\frac{U_{c_2}}{U_c}=\frac{\frac{1}{4}Qf_2}{\frac{1}{2}Qf_1+\frac{1}{4}Qf_2}=\frac{\frac{1}{2}f_2}{f_1+\frac{1}{2}f_2}=\frac{f_{02}}{f_0}. \qquad (б)$$

Прогиб f_0 является общей *податливостью всей конструкции* в точке, где она испытывает удар; прогибы же f_{01} и f_{02} являются *долями* этой *податливости*, зависящими от деформаций первой и второй балок в отдельности. Из формул (а) и (б) следует, что

$$U_{д_1}=T_0\frac{f_{01}}{f_0} \quad \text{и} \quad U_{д_2}=T_0\frac{f_{02}}{f_0}.$$

Таким образом, энергия удара распределяется между балками пропорционально их долям в общей податливости конструкции в месте удара. Если размеры балок будут выбраны так, что $f_{01}=f_{02}$, то $U_{д_1}=U_{д_2}=\frac{1}{2}T_0$; если бы вместо второй балки была жесткая опора, то вся энергия удара была бы целиком воспринята первой балкой; наличие второй балки смягчает удар, приходящийся на первую.

Подобный же эффект получится, если вместо жестких опор мы расположим по концам балки очень податливые опоры в виде резиновых прокладок или винтовых пружин.

§ 179. Испытания на удар до разрушения. Ударная проба

Выше было указано, что динамическое действие нагрузок не ограничивается тем, что напряжения (в пределах упругости) оказываются иными, чем при статических нагрузках. Сам материал иначе реагирует на динамическую нагрузку, чем на медленно возрастающую. Особенно это заметно при ударе.

Опыты с ударным разрывом образцов показывают, что диаграмма растяжения в этом случае имеет совершенно другой вид, чем при статическом разрыве. На рис. 427 изображены статическая и динамическая диаграммы растяжения образца мягкой стали; при ударе характерным является резкое повышение предела текучести

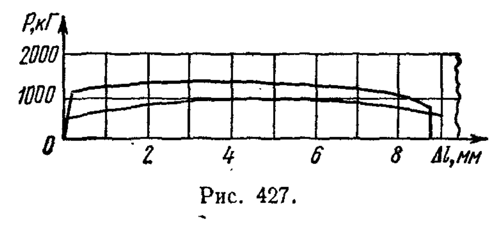


Рис. 427.

и смещение положения наибольшего груза влево. Это показывает, что влияние скорости при ударном действии нагрузки меняет и механические характеристики материала. Бывают случаи, когда материал, отличающийся при статическом испытании прекрасными пластическими качествами, при ударном действии нагрузки оказывается хрупким. Поэтому при выборе материала для деталей, подвергающихся динамическим воздействиям, вводят так называемую *ударную* пробу. Эта проба заключается в том, что образцы материала подвергают разрушению ударом при растяжении, а чаще при изгибе, и оценивают количество энергии, затраченной на разрушение образца. Наиболее распространена проба на удар при изгибе[1]).

Если количество энергии, затраченной на излом образца, равно T, а площадь поперечного сечения образца в месте излома равна F, то, деля T на F, получаем так называемую величину ударной вязкости

$$a_к = \frac{T}{F} \ кГм/см^2.$$

Для того чтобы выявить свойства материала при ударной пробе, образцу придают специальную форму — в том сечении, где наносится удар, делают надрез. На практике встречаются различные формы надрезов, изображенные на рис. 428; наиболее распространенным в настоящее время является надрез типа *б*).

[1]) Описание см. Беляев Н. М., Лабораторные работы по сопротивлению материалов, Гостехиздат, 1951, § 89.

Смысл устройства надреза заключается в том, что стараются поставить материал в наиболее тяжелые условия работы в отношении ударных нагрузок. Надрез создает значительное ослабление сечений посредине пролета и, значит, резкое повышение напряжений изгиба на протяжении небольшой длины образца.

Мы уже видели (§ 176), как сильно влияет на величину напряжений подобное местное ослабление сечения. Почти вся энергия удара поглощается небольшим объемом материала в зоне местного ослабления, что и вызывает резкое повышение динамических напряжений. Кроме того, наличие надреза вызывает вблизи его дна еще *местные* повышенные напряжения, подобные тем, которые возникают около краев отверстий (§ 15).

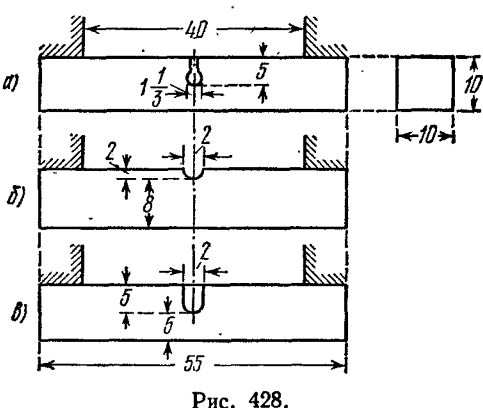


Рис. 428.

На рис. 429 показано распределение напряжений в сечении балки, ослабленном надрезом. Диаграмма *а* показывает эпюру напря-

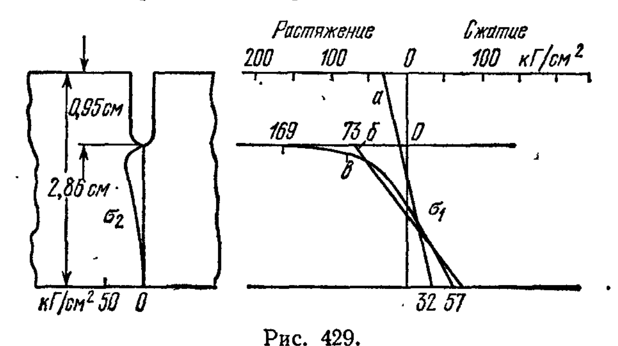


Рис. 429.

жений σ_1 в сечении без надреза; эпюра *б* дает нам распределение нормальных напряжений в надрезанном сечении без учета местного повышения; наконец, на эпюре *в* показана полная картина нормальных напряжений σ_1 при изгибе.

Мы видим, что одно уменьшение высоты сечения повышает напряжения в 2,25 раза; вместе же с местными напряжениями коэффициент концентрации достигает 5,22 по отношению к основной балке и 2,32 по отношению к балке пониженной высоты.

Местные напряжения обычно представляют собой такую систему напряжений, при которой материал находится в объемном напряженном состоянии; в этом случае затрудняются пластические деформации, и материал вблизи дна надреза оказывается в хрупком состоянии.

Так, в рассматриваемом примере помимо нормальных напряжений σ_1 по сечениям, перпендикулярным к оси образца, имеются еще растягивающие напряжения σ_2 по сечениям, параллельным оси. Их эпюра показана тоже на рис. 429. Кроме того, внутри образца имеет место и третье главное напряжение σ_3, тоже растягивающее. Таким образом, материал вблизи дна надреза подвергается всестороннему растяжению, при котором затрудняются пластические деформации. В самом деле, если предел текучести для материала при простом растяжении равен $\sigma_т$, а напряжения σ_2 и σ_3 составляют некоторую долю от σ_1, например $0{,}2\,\sigma_1$, то наступление текучести при сложном напряженном состоянии определится по третьей теории прочности равенством

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_т, \quad \text{или} \quad \sigma_1 - 0{,}2\sigma_1 = 0{,}8\sigma_1 = \sigma_т.$$

Таким образом, материал вблизи дна надреза получит пластические деформации при значении напряжения σ_1, большем чем $\sigma_т$, а именно, $1{,}25\,\sigma_т$. При таком затруднении пластических деформаций материал может оказаться в хрупком состоянии. Это в свою очередь усиливает эффект ударной нагрузки.

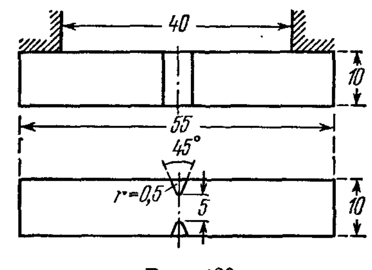


Рис. 430.

Таким образом, наличие надреза в образце помогает резче разграничить материалы более чувствительные к неблагоприятному действию удара от менее чувствительных. В этом отношении различные формы надреза влияют неодинаково; так, острый надрез более обостряет действие удара, чем закругленный надрез. Поэтому величины ударной вязкости, получаемые при испытании различных материалов, могут быть сравнимы лишь при условии однотипности образцов.

Показанные на рис. 428 формы образцов имеют тот недостаток, что дно надреза попадает на растянутую сторону образца, где и начинается разрушение; таким образом, сопротивление такого образца в известной мере зависит от тщательности выполнения надреза, а с другой стороны, оказывается невозможным испытание на удар образцов с сохранением наружной поверхности изделия, что иногда имеет существенное значение.

Эти недостатки избегнуты в образце, применявшемся нами в механической лаборатории Ленинградского института инженеров ж.-д. транспорта (рис. 430). При изломе образца этого типа надрез

располагается параллельно направлению удара; при этом по-прежнему почти вся энергия удара сосредоточивается в ослабленном месте, но картина разрушения оказывается более естественной.

Вид сломанных образцов этого типа пластичного и хрупкого материала резко отличен; для материала, малочувствительного к ударам, в растянутой зоне наблюдается значительная пластическая деформация; для материала же в хрупком состоянии разрушение происходит почти без всяких остаточных деформаций.

§ 180. Влияние различных факторов на результаты ударной пробы

Как правило, испытание на удар производят при комнатной температуре над партией однотипных образцов, количеством не меньше четырех. Такое число образцов необходимо потому, что случайные обстоятельства изготовления и испытания образцов могут иногда очень сильно сказаться на величине их ударной вязкости.

Таблица 21

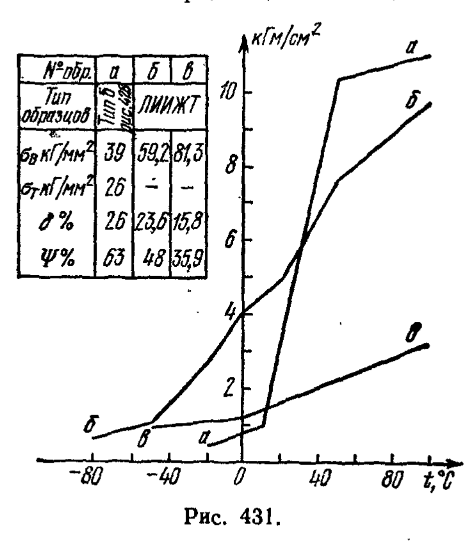
Ударная вязкость для некоторых материалов

Характеристика стали и химический состав	Термическая обработка: отжиг		Термическая обработка: закалка и отпуск	
	$\sigma_в$, $кГ/мм^2$	$a_к$, $кГ/см^2$	$\sigma_в$, $кГ/мм^2$	$a_к$, $кГ/см^2$
Углеродистые стали				
C<0,15	35÷45	>25	36÷50	>25
C 0,15÷0,20	40÷50	>22	45÷65	>20
C 0,20÷0,30	50÷60	>20	55÷75	>15
C 0,30÷0,40	60÷70	>16	70÷85	>12
C 0,40÷0,50	70÷80	>12	80÷95	>8
C 0,50÷0,60	80÷90	>10	90÷105	>5
C 0,60÷0,70	85÷95	>8	>100	>3
C>0,7	>95	>6	>105	>2
Специальные стали				
Никелевая, C 0,20; Ni 3,0	50÷58	25÷20	70÷80	24÷18
Хромоникелевая, C 0,3; Ni 2,5÷3,0; Cr 0,5÷0,8	>65	>7	75÷90	>20
Хромоникелемолибденовая, C 0,25÷0,35; Ni 2,5÷3,5; Cr 0,8÷1,2; Mo 0,3÷0,5	65÷70	13	95÷100	20÷16

В качестве примера в таблице 21 приведены приближенные значения ударной вязкости для ряда материалов при комнатной температуре; испытания производились на образцах типа *б*) (рис. 428.).

Однако оказывается, что на величине ударной вязкости сильно отражается ряд обстоятельств, а именно, форма образцов, скорость удара и особенно температура образца.

Ударная вязкость образцов одного и того же материала падает по мере понижения температуры опыта. Для некоторых материалов (мягкая сталь) это падение происходит очень резко; для сталей повышенной твердости, а также для специальных сталей (хромоникелевая) этот переход сглаживается. На рис. 431 показаны диаграммы ударной вязкости, полученные в механической лаборатории Ленинградского института инженеров ж.-д. транспорта.



№ обр.	а	б	в
Тип образцов	Тип б рис. 428	ЛИИЖТ	
$\sigma_в$ кГ/мм²	39	59,2	81,3
$\sigma_т$ кГ/мм²	26	–	–
δ %	26	23,6	15,8
ψ %	63	48	35,9

Рис. 431.

Перед испытанием образец доводится до заданной температуры в ванне, или подогреваемой на электроплитке или охлаждаемой при помощи жидкого воздуха. Изображенные на рис. 431 кривые *а*, *б*, *в* показывают, что понижение температуры вызывает резкое уменьшение ударной вязкости и, таким образом, может вызвать хрупкое разрушение частей конструкций. Это явление неоднократно наблюдалось на практике; так называемая хладноломкость рельсов, бандажей и других деталей конструкций железнодорожного транспорта неоднократно вызывала большие затруднения.

Наиболее существенно то обстоятельство, что для некоторых материалов (рис. 431, кривая *а*) переход от пластичных изломов с большой ударной вязкостью к хрупким происходит на протяжении весьма небольшого интервала температур. Таким образом, материал, хорошо сопротивляющийся удару при комнатной или близкой к ней температуре, может дать хрупкий излом уже при сравнительно небольшом понижении температуры. Поэтому результаты обычного испытания на удар при комнатной температуре недостаточно характеризуют сопротивляемость материала динамическим воздействием; следовало бы получить полную кривую ударной вязкости в зависимости от температуры (рис. 431, кривые *а*, *б*, *в*).

Чем левее располагается так называемый «критический» интервал падения ударной вязкости, тем материал менее чувствителен к воздействиям температуры при ударных нагрузках, тем более он надежен в работе.

Изменением формы образца можно в известной мере заменить испытание материала при разных температурах. Опыты показали, что переход к более широким образцам сдвигает «критический» интервал температур вправо. Поэтому если обычная проба на удар при комнатной температуре дает удовлетворительный результат, то для проверки того, не находимся ли мы вблизи критического интервала, можно произвести испытание на удар уширенных образцов; если это испытание дает хрупкий излом, то «критический» интервал расположен близко к температуре опыта.

Наконец, следует отметить, что на хрупкость материала могут очень сильно влиять так называемые остаточные напряжения, которые могут получиться в материале при закалке, при холодной прокатке или при недостаточной температуре горячей прокатки, когда материал получает наклеп. Опытами на растяжение такие напряжения, как правило, не могут быть выявлены. Остаточные напряжения обычно связаны с возникновением объемного напряженного состояния в материале; в связи с этим возможно хрупкое разрушение. Такие случаи встречались при изготовлении мощных двутавровых балок со сравнительно тонкими полками. В нашей практике был случай хрупкого разрушения двутавровой балки № 50 при сбрасывании ее на землю в морозный день. Результаты статических испытаний, химического и металлографического анализа показали, что материал как будто вполне доброкачественный. Лишь ударные испытания при различных температурах обнаружили резкую хладноломкость для образцов, вырезанных у края полки двутавра,— в наиболее наклепанном месте. Что касается влияния на хрупкость химического состава сталей, то ударная вязкость понижается, как это видно из таблицы 21, с увеличением количества углерода, т. е. с повышением предела прочности и уменьшением пластических свойств стали. Весьма неблагоприятно отражается на сопротивлении удару, особенно при низких температурах, наличие фосфора. Поэтому на практике при изготовлении материала для деталей, работающих на удар, всячески ограничивают примесь этого элемента.

Глава XXXI

ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛА ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

§ 181. Основные понятия о влиянии переменных напряжений на прочность материала

Сопротивление материалов действию нагрузок, систематически изменяющих свою величину или величину и знак, существенно отличается от сопротивления тех же материалов статическому и ударному действию нагрузок. Поэтому вопрос о проверке прочности

материала при действии переменных нагрузок требует особого изучения.

Давно известно, что части машин, подвергающиеся усилиям, переменным по величине и повторяющимся большое число раз, иногда ломаются внезапно, без наличия заметных остаточных деформаций, при напряжениях, которым они сопротивляются при статических нагрузках вполне надежно. Внимание инженеров прежде всего привлекло именно то обстоятельство, что элементы машины, изготовленные из материалов, обладающих при обычных испытаниях прекрасными пластическими свойствами — достаточным удлинением, сужением, ударной вязкостью, разрушаются без всяких видимых остаточных деформаций, как будто бы они были выполнены из хрупкого материала.

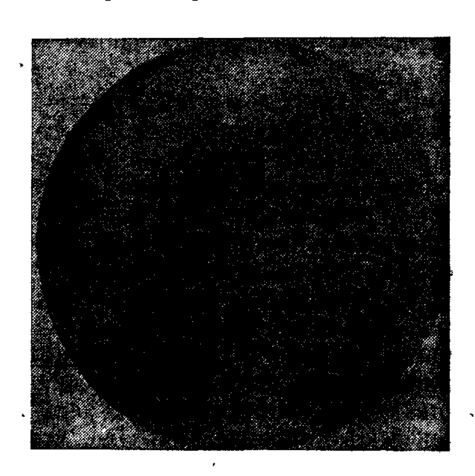


Рис. 432.

В ту эпоху, когда инженеры стали изучать подобные случаи разрушения (первая половина XIX века), не было ясного представления о строении металлов; пластичные металлы считали обладающими «волокнистой» структурой, а хрупкие — «кристаллической». Так как изломы деталей происходили обычно не сразу, а спустя известный, иногда довольно значительный, период времени работы машины, то возникла гипотеза, что при действии переменных напряжений металл «устает», изменяет свою структуру, из пластичного делается хрупким, обладающим кристаллическим строением.

Сам вид поверхности излома, казалось, подтверждал такое предположение; эта поверхность, как правило, имела две зоны: одну — гладкую, притертую (поверхность постепенно развивающейся трещины), другую — грубозернистую (поверхность окончательного излома в ослабленном трещиной сечении стержня). На рис. 432 дана фотография излома вагонной оси; мы видим наружную, кольцеобразную зону с гладкой поверхностью и внутреннюю — зону хрупкого, грубозернистого излома, действительно характерного для хрупкого состояния материала.

Однако уже с начала XX столетия, после исследований структуры металлов при помощи микроскопа, стало ясно, что указанная гипотеза неверна. Металлы и в пластичном состоянии оказались обладающими кристаллической структурой; никаких *принципиальных* из-

менений ни в их строении, наблюдаемом под микроскопом, ни в механических свойствах при действии переменных напряжений обнаружено не было. Материал штока поршня паровой машины или вагонной оси сохраняет свою структуру и свои пластические свойства, как бы долго он ни работал.

Таким образом, ни о каком «перерождении», перекристаллизации металла под действием *только* переменных напряжений говорить не приходится.

Механизм разрушения от переменных нагрузок был раскрыт лишь в начале текущего столетия. Многочисленные исследования показали, что при действии переменных напряжений в металле возникает трещина, постепенно проникающая в глубь изделия. При переменных деформациях края трещины то сближаются и нажимают друг на друга, то расходятся; этим объясняется наличие гладкой, притертой зоны излома. По мере развития трещины усталости поперечное сечение ослабляется все сильнее, и наконец, при случайном толчке или ударе наступает окончательное разрушение, когда сопротивление оставшейся части сечения оказывается недостаточным.

Трещина усталости является очень острым поперечным надрезом, аналогичным надрезу в образцах для ударной пробы. У дна этой трещины создается объемное напряженное состояние, обусловливающее хрупкий характер разрушения материала при ударе (см. § 179). Этим и объясняется наличие в изломе грубозернистой зоны, соответствующей хрупкому излому.

Таким образом, хрупкий характер окончательного излома при переменных нагрузках объясняется не тем, что материал изменился, переродился, стал хрупким, а тем, что он оказался благодаря наличию трещины усталости в таком напряженном состоянии, которое обусловливает хрупкое, без остаточных деформаций, разрушение.

Разрушение при переменных нагрузках носит *местный* характер, не затрагивающий всего материала конструкции в целом. Поэтому при обнаружении развивающихся трещин при переменных нагрузках во многих случаях нет необходимости ставить вопрос о смене всей конструкции; достаточно заменить поврежденные части и уничтожить причины, вызвавшие возникновение трещин.

Изложенная точка зрения является теперь общепринятой среди инженеров; таким образом, само понятие «усталость» материала потеряло свой физический смысл; описывая явление разрушения при действии переменных нагрузок, надо говорить не о разрушении от «усталости», а о разрушении путем постепенного развития трещины.

Однако благодаря краткости этого термина и широкому распространению его в технических кругах выражение «усталость материалов» удержалось в литературе до настоящего времени, изменив лишь

свой смысл: под этим термином мы в дальнейшем и будем подразумевать *разрушение при постепенном развитии трещины.*

Нашей задачей теперь будет установить обстоятельства, вызывающие появление трещин усталости, и дать такие правила конструирования элементов машин и сооружений и проверки их прочности, которые гарантировали бы их от разрушения при переменных нагрузках.

Эта задача является чрезвычайно важной, особенно для машиностроения, где мы чаще всего встречаемся с многократным повторением переменных напряжений. Можно считать, что примерно 90% всех поломок частей машин являются следствием развития трещин усталости. Эти поломки чрезвычайно опасны и зачастую ведут к очень тяжелым катастрофам, так как обнаружить развивающуюся волосную трещину усталости далеко не всегда удается. Изломы вагонных осей и осей локомотивов на железнодорожном транспорте обычно вызываются подобными трещинами и сопровождаются почти неизбежно сходом поезда с рельсов с крайне тяжелыми последствиями. Подобного же рода катастрофы известны и в авиации и в других отраслях машиностроения.

§ 182. Циклические напряжения

Изменение величины напряжений в деталях машин и сооружений может происходить или вследствие изменения величины нагрузки (так, напряжения в шатуне и в стенке цилиндра двигателя внутреннего сгорания меняются благодаря изменению давления газовой смеси внутри цилиндра), или вследствие изменения положения детали при действии постоянной нагрузки (так, при постоянной величине веса вагона, передающегося на оси, жестко соединенные с колесами, напряжения от изгиба в какой-либо точке сечения оси будут меняться вследствие изменения положения этой точки при вращении оси).

Характер (режим) изменения напряжений в детали машины или сооружения может быть неустановившимся (например, изменение напряжений в какой-либо детали пролетного строения моста вследствие движения по нему трамваев, автомобилей, пешеходов и проч.) и установившимся (например, изменение напряжений в шатуне и в стенке цилиндра внутреннего сгорания, во вращающейся вагонной оси, в трансмиссионном вале и т. п.). Из различных видов установившихся переменных напряжений наибольшее значение имеют *циклические напряжения*; действие этих напряжений к тому же наиболее хорошо изучено. *Циклом изменения* напряжения называется однократная смена напряжения (от наименьшего напряжения к наибольшему и обратно); если такой цикл во время работы детали непрерывно повторяется, то *напряжения* в ней называются *циклическими*. Действию циклических напряжений подвергаются оси вагонов,

валы, шатуны, спарники, лопатки турбин и многие другие детали машин и сооружений.

На рис. 433 в координатах «напряжение p (σ или τ) время t» изображены различные виды циклических напряжений: 1) знакопостоянный цикл (рис. 433, *а*) — напряжение меняется только по величине; 2) пульсирующий (отнулевой) цикл (рис. 433, *г*) — знакопостоянный цикл, при котором напряжение меняется от нуля до какой-либо наибольшей величины; 3) постоянное напряжение

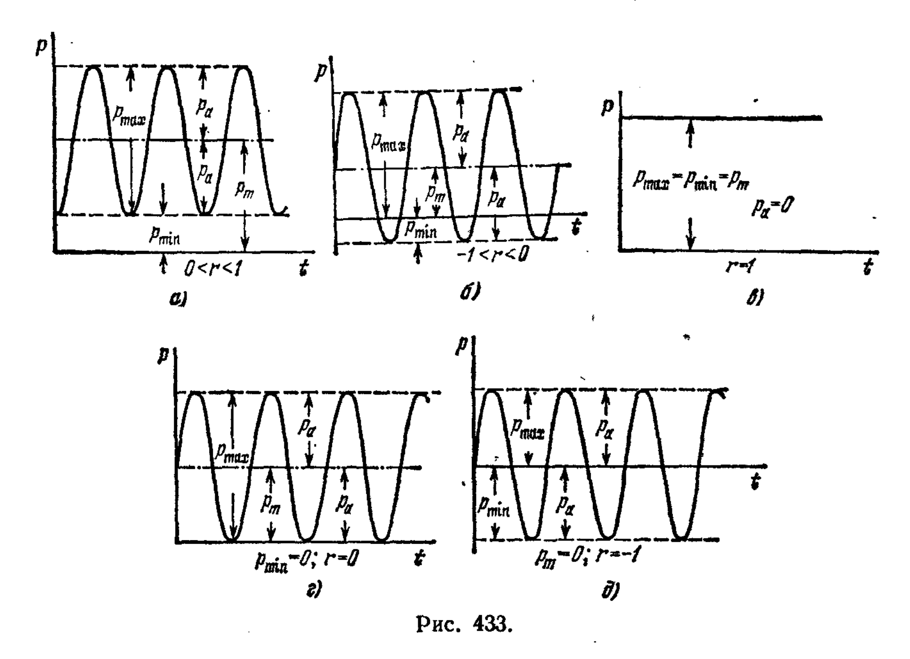


Рис. 433.

(рис. 433, *в*); 4) знакопеременный цикл (рис. 433, *б*) — напряжение меняется по величине и по знаку (все перечисленные циклы называются *асимметричными*); 5) *симметричный* цикл (рис. 433, *д*)— знакопеременный цикл при одинаковых абсолютных значениях верхнего и нижнего пределов изменения напряжения. Вид кривой, которая характеризует изменение напряжения во времени, может быть весьма различным; в деталях машин измеиение напряжеиий нередко происходит по синусоидальному закону.

Наибольшее по абсолютной величине напряжение цикла обозначается p_{max} (σ_{max}, τ_{max}), а наименьшее — p_{min} (σ_{min}, τ_{min}). Отношение наименьшего напряжения цикла к наибольшему, взятое с учетом их знаков, называется *характеристикой цикла* или коэффициентом ассиметрии цикла: $r=p_{min}/p_{max}$. Значения этого коэффициента заключаются между -1 и $+1$ — на рис. 433 они указаны для каж-

дого из изображенных на нем циклов. Полусумма наибольшего и наименьшего напряжения цикла (с учетом их знаков) называется *постоянной составляющей цикла* или *средним напряжением цикла*

$$p_m = \frac{p_{max} + p_{min}}{2} = \frac{1+r}{2} p_{max}, \tag{31.1}$$

а полуразность тех же напряжений (также с учетом их знаков) называется *переменной составляющей* или *амплитудой напряжений цикла*

$$p_a = \frac{p_{max} - p_{min}}{2} = \frac{1-r}{2} p_{max}. \tag{31.2}$$

Таким образом, любой цикл изменения напряжений можно получить наложением симметричного цикла напряжений $p'_{max} = -p_{min} = p_a$ на постоянное напряжение $p''_{max} = p_{min} = p_m$.

§ 183. Составление условия прочности при переменных напряжениях

Опыты показывают, что постепенно развивающаяся трещина возникает только при *переменных* напряжениях, колеблющихся систематически между двумя крайними значениями.

С другой стороны, известно, что большое количество элементов машин и конструкций благополучно сопротивляется переменным нагрузкам в течение весьма продолжительного срока, если напряжения в них остаются в определенных границах. Таким образом, одной *переменности* напряжений недостаточно; для образования трещины усталости необходимо, чтобы действительная величина наибольшего значения систематически колеблющегося напряжения превзошла определенную границу, так называемый *предел усталости*, или *предел выносливости*.

Пределом выносливости p_r мы будем называть наибольшую величину периодически меняющегося напряжения, которой материал может противостоять практически неограниченно долго без появления трещин усталости.

Значение предела выносливости для любого цикла переменных напряжений будем обозначать через p_r, σ_r или τ_r со знаком внизу, указывающим на соответствующую характеристику цикла. Так, p_{-1} — предел выносливости при несимметричном цикле с характеристикой $r=-1$, $p_{0,2}$ — предел выносливости при несимметричном цикле с характеристикой $r=0,2$ и т. п.

Таким образом, возможность разрушения путем постепенного развития трещины обусловливается двумя обстоятельствами:

а) периодическим колебанием напряжений между определенными крайними пределами;

б) превышением наибольшими действительными напряжениями в элементе конструкции предела выносливости материала.

Условие прочности в данном случае должно выражать, что наибольшие действительные напряжения $p^{д}_{max}$ должны быть с некоторым запасом меньше предела выносливости p_r:

$$p^{д}_{max} \leqslant \frac{p_r}{k_r},$$

где k_r — коэффициент запаса.

Для практического применения этого условия надо установить методы определения предела выносливости и вычисления наибольших действительных напряжений.

В настоящее время определение предела выносливости материала возможно лишь чисто экспериментальным путем. Величина этого предела зависит в *основном* от:

а) материала (сталь, чугун, цветные металлы),

б) типа деформации (изгиб, кручение и т. д.),

в) степени несимметрии цикла, т. е. соотношения между крайними значениями меняющегося напряжения.

Некоторые дополнительные обстоятельства, влияющие на величину предела выносливости (коррозия, размеры деталей), будут рассмотрены отдельно (§§ 186 и 187).

Что касается наибольшего значения действительных напряжений $p^{д}_{max}$, то опыты показывают, что в противоположность разрушению от статической нагрузки появление трещин усталости не только у хрупких, но и у пластичных материалов связано не с теми расчетными наибольшими напряжениями p_{max}, которые получаются для чисто призматических стержней (например, при изгибе $\sigma_{max}=M/W$), а с так называемыми (§ 15) *местными* напряжениями, возникающими в местах нарушения призматической формы стержня (надрезы, выточки, отверстия, переход от тонкой к утолщенной части и т. д.).

Эти местные напряжения $p_м$ оказываются значительно выше наибольших общих напряжений p_{max}, вычисляемых для призматических стержней, и могут быть представлены формулой

$$p_м = \alpha_к p_{max},$$

где $\alpha_к$ — так называемый *коэффициент концентрации напряжений*; его величина зависит от характера нарушения призматической формы стержня.

В дальнейших параграфах рассмотрено определение предела выносливости и коэффициентов концентрации напряжений.

§ 184. Определение предела выносливости при симметричном цикле

Наибольший интерес представляет определение величины предела выносливости при симметричном ($p_m=0$) цикле, как наименьшего. Эта величина оказывается различной для случая деформации изгиба, осевой деформации (растяжение и сжатие) и кручения.

Для определения предела выносливости при изгибе применяются машины, в которых образец круглого поперечного сечения нагружается через шарикоподшипники, или, как консоль,— силой на конце, или, как шарнирно-опертая балка,— симметрично расположенными равными силами; образец вращается со скоростью около 2000—3000 *об/мин*. При каждом обороте материал образца в наиболее напряженных местах испытывает симметричный цикл изменения напряжений от наибольшего сжатия до такого же наибольшего растяжения, и обратно. Число циклов, испытанных образцом, определяется числом его оборотов N, отмечаемым специальным счетчиком [1]).

Образцам придается форма с весьма плавными очертаниями, исключающими возможность появления местных напряжений. Опыт по определению предела выносливости производится следующим образом. Заготовляется партия образцов испытываемого материала в количестве 6—10 штук; образцам дается последовательная нумерация: 1, 2, 3, ...

Первый образец накладывается в машину и нагружается так, чтобы получить определенную величину наибольшего нормального напряжения σ'; эту величину обычно берут равной 0,5—0,6 от предела прочности материала; затем машина пускается в ход, и образец вращается, испытывая переменные напряжения от $+\sigma'$ до $-\sigma'$ до тех пор, пока не произойдет излом. В этот момент специальное приспособление выключает мотор, машина останавливатся, и счетчик оборотов показывает число циклов N_1, необходимое для излома образца при напряжении σ'.

Тем же порядком испытывают второй образец при напряжении σ'', *меньшем* σ', третий — при напряжении $\sigma'''<\sigma''$, и т. д. Соответственно возрастает число циклов, необходимое для излома. Уменьшая для каждого нового образца рабочее напряжение, мы, наконец, для какого-то из них не получаем излома, даже при очень большом числе оборотов образца. Соответствующее напряжение будет очень близко к пределу выносливости.

Опыты показали, что если стальной образец не разрушился после $10\cdot10^6$ циклов, то он может выдержать практически неограниченное число циклов ($100\cdot10^6$ — $200\cdot10^6$). Поэтому при определении предела выносливости для того или иного сорта стали прекращают опыт, если образец испытал $10\cdot10^6$ циклов и не сломался. В ряде случаев при испытаниях ограничиваются и меньшим предельным числом циклов, однако, не меньше $5\cdot10^6$.

Для цветных металлов подобной зависимости нет, и чтобы обнаружить, действительно ли при заданиом напряжении образец может выдержать очень большое число перемен знака, приходится давать до $200\cdot10^6$ и даже $500\cdot10^6$ циклов. В этом случае можно говорить

---

[1]) Описание см. Беляев Н. М., Лабораторные работы по сопротивлению материалов, Гостехиздат, 1951.

об условном пределе выносливости, соответствующем отсутствию излома при определенном числе перемен знака напряжений,— при $10 \cdot 10^6$, $30 \cdot 10^6$ и т. д.

Для нахождения числовой величины предела выносливости полученные результаты обрабатываются графически. На рис. 434 и 435 показаны два метода подобной обработки. На первом из них по оси ординат откладываются величины σ', σ'', . . ., а по оси абсцисс N_1, N_2 и т. д. Ордината горизонтальной касательной к полученной

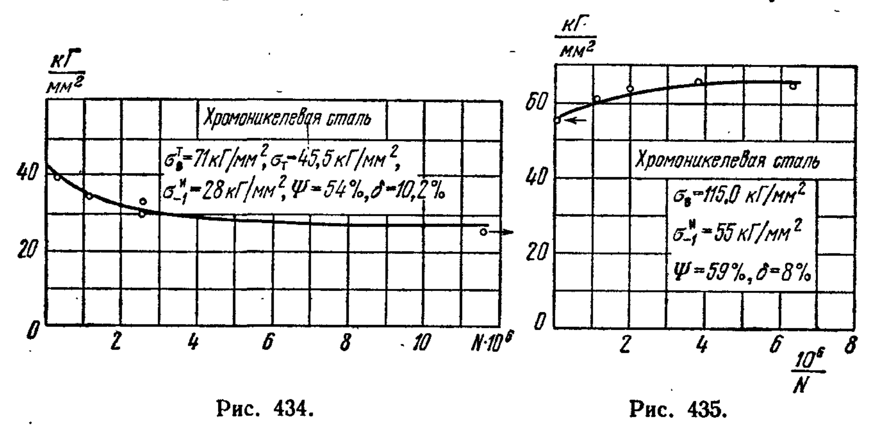


Рис. 434. Рис. 435.

кривой (асимптоты) и будет равна пределу выносливости $\sigma_{-1}^и$. На втором чертеже по оси абсцисс откладываются величины, равные $10^6/N$. В этом случае предел выносливости определяется как отрезок, отсекаемый на оси ординат продолжением полученной кривой, так как начало координат соответствует $N = \infty$. В настоящее время более употребительным является второй метод.

Подобным же образом определяется предел выносливости для осевых усилий (растяжение и сжатие) и для кручения; для этой цели также применяются специальные испытательные машины (пульсаторы и др.[1])).

В настоящее время получено громадное количество экспериментальных результатов по определению предела выносливости различных материалов. Бóльшая часть произведенных исследований относится к стали, как наиболее употребительному материалу в машиностроении. Результаты этих исследований показали, что предел выносливости *стали всех сортов* связан более или менее определенным соотношением лишь с величиной предела прочности при растяжении $\sigma_в$. Для катаного и кованого материала предел выносливости при симметричном цикле в случае изгиба составляет от 0,40 до

[1]) См. сноску на стр. 540.

0,60 $\sigma_в$; для литья это соотношение заключается в пределах от 0,40 до 0,46.

Таким образом, *в запас прочности с достаточной для целей практики точностью* можно принять для всех сортов стали

$$\sigma_{-1}^{и} = 0{,}4\sigma_в = \beta_r\sigma_в.$$

Если подвергать образец стали *осевым* усилиям при симметричном цикле (попеременному растяжению и сжатию), то соответствующий предел выносливости σ_{-1}^{0}, как показывают опыты, будет ниже, чем при изгибе; соотношение между этими пределами выносливости может быть принято равным, как показывают опыты, 0,7, т. е. $\sigma_{-1}^{0} = 0{,}7\sigma_{-1}^{и}$.

Это снижение объясняется тем, что при растяжении и сжатии все сечение подвергается одинаковым напряжениям; при изгибе же наибольшие напряжения имеют место лишь в крайних волокнах; остальная часть материала работает слабее и, таким образом, затрудняет образование трещин усталости; кроме того, на практике всегда имеет место некоторый эксцентриситет осевой нагрузки.

Наконец, при кручении для симметричного цикла предел выносливости по касательным напряжениям составляет в среднем 0,55 от предела выносливости при изгибе. Таким образом, для стали при симметричном цикле

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{-1}^{и} &= 0{,}40\sigma_в, \\ \sigma_{-1}^{0} &= 0{,}7\sigma_{-1}^{и} = 0{,}28\sigma_в, \\ \tau_{-1}^{к} &= 0{,}55\sigma_{-1}^{и} = 0{,}22\sigma_в. \end{aligned}\right\} \qquad (31.3)$$

Эти данные и могут быть положены в основу расчетных формул при проверке прочности.

Для цветных металлов мы имеем менее устойчивое соотношение между пределом выносливости и пределом прочности; опыты дают

$$\sigma_{-1}^{и} = (0{,}24 \div 0{,}50)\,\sigma_в.$$

При пользовании приведенными выше соотношениями (31.3) надо иметь в виду, что предел выносливости для данного материала является характеристикой, зависящей от очень большого числа факторов (§ 187); данные (31.3) относятся к опытам с образцами сравнительно *малого диаметра* ($7 \div 10$ *мм*) с полированной поверхностью и отсутствием резких изменений формы поперечного сечения.

§ 185. Предел выносливости при несимметричном цикле

Определение пределов выносливости при несимметричных циклах требует значительно более сложного оборудования, чем при экспериментах с симметричным циклом напряжений.

Применение простейщих машин с изгибом вращающегося образца требует добавления специальной пружины, растягивающей или

сжимающей образец; чаще приходится пользоваться еще более сложными машинами, осуществляющими осевую нагрузку образца (растяжение, сжатие) при различных крайних значениях напряжений.

Однако в настоящее время мы имеем уже достаточное количество опытных данных, чтобы иметь возможность представить графически или аналитически зависимость предела выносливости металла от характеристики цикла r, т. е. от соотношения p_{min}/p_{max}.

Напомним принятые нами обозначения: $p_в$ — предел прочности материала, $p_т$ — предел текучести, p_r — предел выносливости при любом цикле напряжений с характеристикой r, p_{-1} — предел выносливости при симметричном цикле, p_{max} и p_{min} — верхняя и нижняя границы цикла, $p_m = \frac{p_{max}+p_{min}}{2}$ — среднее напряжение цикла, $p_a = \frac{p_{max}-p_{min}}{2}$ — амплитуда колебаний напряжения цикла, $2p_a$ — «размах» цикла, $r = \frac{p_{min}}{p_{max}}$ — характеристика цикла.

Те значения напряжений p_{max}, p_{min}, p_a, p_m, при которых материал будет работать на пределе выносливости, обозначим индексом r внизу:

$$p_{r\,max}, \quad p_{r\,min}, \quad p_{rm}, \quad p_{ra};$$

наибольшее по абсолютной величине значение $p_{r\,max}$ или $p_{r\,min}$ совпадает с p_r.

Результаты опытов по определению пределов выносливости при разных циклах напряжений удобно представлять в виде диаграмм. Наиболее простой из таких диаграмм является диаграмма в координатах p_m и p_a (диаграмма Хея), изображенная на рис. 436. На этой диаграмме по оси абсцисс в некотором масштабе откладываются значения p_m, а по оси ординат в том же масштабе — значения p_a. Кривая $ABCD$ построена на основании экспериментов по определению предела выносливости при разных циклах переменных напряжений. Для определения с помощью диаграммы предела выносливости p_r при каком-либо значении коэффициента ассиметрии цикла r нужно из начала координат O под углом β к оси абсцисс, тангенс которого равен (см. (31.1) и (31.3))

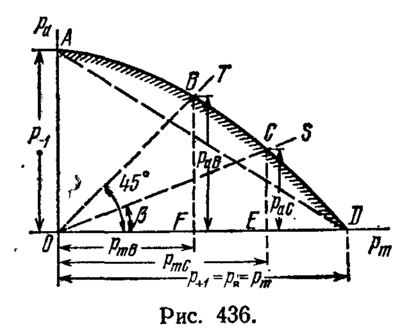


Рис. 436.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{p_a}{p_m} = \frac{1-r}{1+r}, \tag{31.4}$$

провести прямую OS до пересечения с кривой $ABCD$ в точке C и опустить из этой точки на ось абсцисс перпендикуляр CE. Сумма отрезков CE и EO, соответственно равных p_{aC} и p_{mC}, определяет величину предела выносливости p_{rC}:

$$p_{rC}=p_{\max}=p_{aC}+p_{mC}. \qquad (31.5)$$

Таким образом, точке A, имеющей ординату $OA=p_a=p_{-1}$ и абсциссу $p_m=0$, отвечает предел выносливости при симметричном цикле: $r=-1$, $\beta=\pi/2$, а точке D, имеющей ординату $p_a=0$ и абсциссу $OD=p_m=p_{+1}=p_в$, отвечает предел выносливости при постоянной нагрузке: $r=+1$, $\beta=0$, равный временному сопротивлению материала. Если из начала координат провести прямую OT под углом $\beta=45°$, то точке B пересечения этой прямой с кривой $ABCD$ будет отвечать предел выносливости при пульсирующем (отнулевом) цикле, так как ордината точки B $BF=p_{aB}$ равна абсциссе $OF=p_{mB}$, т. е. по (31.1) и (31.2) $1+r=1-r$ и $r=0$.

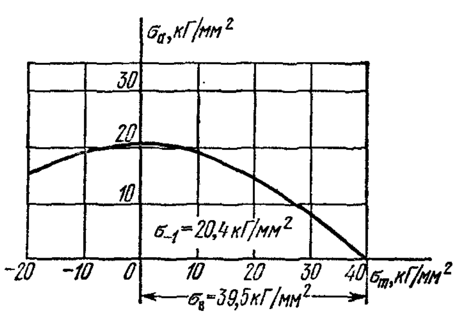


Рис. 437.

В качестве примера на рис. 437 приведена диаграмма Хея для обычной малоуглеродистой стали, а на рис. 438 диаграмма для

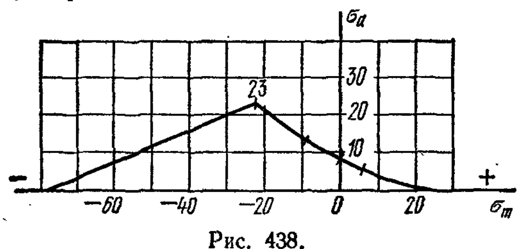


Рис. 438.

серого чугуна с характеристиками: $\sigma_{вс}=78$ *кГ/мм²*; $\sigma_{вр}=22$ *кГ/мм²*; $\sigma_{-1}=7,3$ *кГ/мм²* и $\sigma_{0с}=46$ *кГ/мм²*, $\sigma_{0с}$ — предел выносливости при пульсирующем цикле при сжатии. Эта диаграмма свидетельствует о том, что и при переменных нагрузках чугун на сжатие работает значительно лучше, чем на растяжение.

Предел выносливости следует рассматривать как *опасное* напряжение, подобное пределу прочности материала при статических нагрузках, так как при напряжениях немного выше предела выносливости разрушение материала наступает при каком-то практически достижимом числе перемен нагрузки. Поэтому кривая $ABCD$ на

рис. 436 представляет кривую опасных (предельных) напряжений для материалов, не имеющих площадки текучести. Если же материал пластичен и опасным пределом напряжений для него при статических нагрузках является предел текучести $p_т$, то, как нетрудно убедиться, рассматривая рис. 439, за линию опасных напряжений должна быть принята линия AGH. Действительно, если на диаграмме пределов выносливости, определяемых кривой ABD (рис. 436 и 439), от начала координат O по осям абсцисс и ординат отложить отрезки OH и ON, равные пределу текучести материала $p_т$ и соединить точки N и H прямой NH, то сумма абсциссы и ординаты любой точки этой прямой всегда будет равна $p_т$ (например, для точки K $OL+LK=p_{mK}+p_{aK}=OL+LH=p_т$, так как $LK=LH$). Таким образом, прямая NH определяет опасный предел напряжений при статических нагрузках, а кривая ABD — опасный предел напряжений при переменных нагрузках. Там, где прямая NH располагается выше кривой ABD (от оси ординат до точки G — пересечения этих линий), опасный предел напряжений определяется по кривой AG; там же, где прямая NH лежит ниже кривой ABD, опасный предел напряжений определяется по прямой NH. На рис. 436 и 439 линии опасных напряжений отмечены штриховкой.

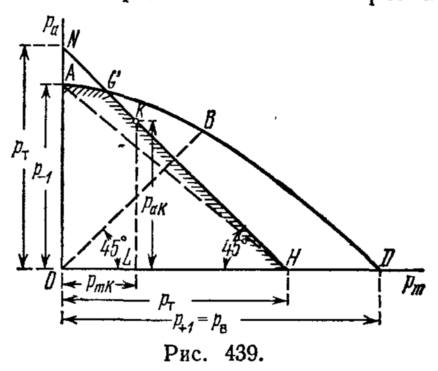


Рис. 439.

В связи с тем, что опытами обычно устанавливаются значения $p_т$, $p_в$ и p_{-1}, а пределы выносливости при других значениях r нередко не определяются, за линию опасных напряжений из-за отсутствия опытных данных нередко приходится принимать прямую AD (рис. 436) или AH (рис. 439). К такому же спрямлению кривых опасных напряжений иногда прибегают для упрощения расчетов; заметим, что таким путем создается некоторый дополнительный запас прочности.

Довольно много формул было предложено для установления аналитической зависимости между пределом выносливости, пределом прочности и характеристикой цикла. Из них заслуживают внимания следующие:

$$p_r = \frac{2q_1}{1-r+(1+r)\,q_1}\,p_в, \tag{31.6}$$

$$p_r = \frac{\sqrt{(1-r)^2+4(1+r)^2q_1^2}-(1-r)}{(1+r)^2\,q_1}\,p_в \tag{31.7}$$

и

$$p_{ra} = p_{-1}\left[1-n_1\frac{p_{rm}}{p_в}-n_2\left(\frac{p_{rm}}{p_в}\right)^2\right], \tag{31.8}$$

где $q_1=p_{-1}/p_в$. Коэффициенты n_1 и n_2 в последней формуле имеют различные числовые значения в зависимости от рода материала. Для малоуглеродистой стали $n_1=0$ и $n_2=1$ и зависимость между p_{ra} и p_{rm} имеет форму параболы; для сталей с высоким пределом прочности, наоборот, $n_1=1$, $n_2=0$, и зависимость (31.8) имеет линейный вид.

Как уже было отмечено, величина предела выносливости p_r зависит не только от материала, вида деформации и характера цикла напряжений, но и от конфигурации и состояния поверхности детали, ее размеров и проч. Из последних факторов, оказывающих влияние на величину p_r, наибольшее значение имеет форма детали и состояние ее поверхности. Так как эти факторы являются немаловажными и при статических нагрузках, вопрос о них заслуживает подробного рассмотрения.

§ 186. Местные напряжения

Равномерное распределение напряжений по площади сечения детали при растяжении или сжатии, изменение по линейному закону нормальных напряжений по высоте сечения балки при изгибе

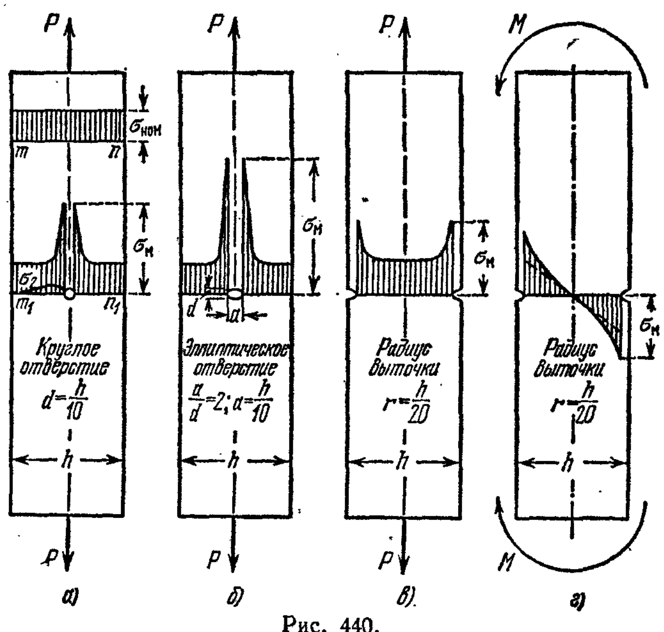


Рис. 440.

или касательных напряжений по радиусу сечения при кручении вала сохраняется лишь в случае однородных призматических стержней,

не имеющих внутренних или внешних пороков или повреждений, да и то только в тех сечениях, которые достаточно удалены от мест приложения нагрузки. Этот характер распределения напряжений нарушается в местах приложения нагрузки, а также и там, где в детали имеются разного рода отверстия, выточки, переходы от сечения одних размеров и форм к другим, какие-либо внутренние или внешние повреждения и пороки, неоднородность строения материала и т. п.

Так, в пластинке, растянутой силами P, действующими вдоль ее оси (рис. 440, *а*), нормальные напряжения в сечении mn, достаточно удаленном от мест приложения нагрузки, будут распределены равномерно. В сечении же m_1n_1, где в пластинке сделано небольшое круглое отверстие, распределение напряжений будет иным. У края отверстия напряжения будут значительно (при малом отверстии, приблизительно втрое) больше, чем в сечении mn. Однако это повышение напряжений распространяется лишь на небольшую часть сечения m_1n_1, вблизи от отверстия; в остальной части сечения напряжения будут близки к тем, которые получаются в сечении mn. Такие повышенные напряжения называются *местными* напряжениями $p_м$ ($\sigma_м$ или $\tau_м$); причины, вызвавшие их возникновение (отверстия, выточки, повреждения и т. п.), называются *факторами* (источниками) *повышения или концентрации напряжений*. Отношение наибольшего местного напряжения $p_{м\,max}$ к *номинальному* напряжению $p_{ном}$, т. е. к напряжению в той же точке при отсутствии фактора концентрации напряжений, называется *коэффициентом концентрации напряжений* $\alpha_к$;

$$\alpha_к = \frac{p_{м\,max}}{p_{ном}}. \tag{31.9}$$

Местные напряжения даже при линейном общем напряженном состоянии обычно образуют систему, соответствующую более сложному напряженному состоянию. На рис. 440 показано, что помимо напряжений по сечениям, перпендикулярным к оси стержня, у отверстия возникают и добавочные меньшие нормальные напряжения по площадкам, перпендикулярным к первым (σ_2).

Величина коэффициента концентрации зависит главным образом от степени резкости нарушения призматической формы стержня. Если переход от бóльшего диаметра стержня к меньшему сделан резким, под прямым углом, то мы получаем наибольшее значение $\alpha_к$; если же этот переход смягчен галтелью того или иного радиуса, то величина $\alpha_к$ значительно снижается и может оказаться даже равной единице (рис. 441, *а* и *б*).

На рис. 440 приведено несколько примеров концентрации напряжений вследствие наличия в растягиваемой или изгибаемой детали отверстий и выточек.

Для определения коэффициентов концентрации применяют следующие методы. В ряде случаев (например, растяжение и изгиб стержней с отверстиями и выточками) удается найти величину местных напряжений при помощи методов теории упругости. Затем широкое распространение нашел метод экспериментального определения местных напряжений путем просвечивания поляризованным светом плоской напряженной модели из прозрачного материала (стекло, целлулоид, бакелит); по получающейся при этом окраске различных участков модели можно установить величину разности главных напряжений в различных точках, а затем при помощи дополнительных измерений и вычислений и сами величины главных напряжений.

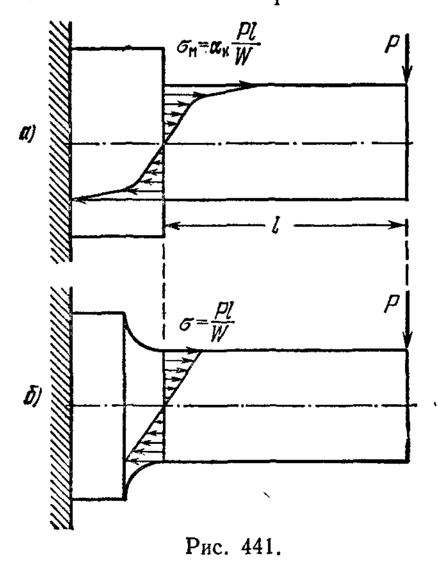


Рис. 441.

К числу экспериментальных методов относятся также исследования местных напряжений с помощью лаковых покрытий или сеток [1] (из квадратов или окружностей малого диаметра), наносимых на поверхности образцов испытуемого материала и исследования на хрупких (гипсовых) моделях.

Определяя предел прочности материала путем испытания до разрушения двух моделей (рис. 441, *а* и *б*) одной с местными напряжениями, а другой — без них, мы получаем для первой модели меньшее значение $\sigma_в$, чем для второй (конечно, вводя в вычисления один и тот же момент сопротивления сечения диаметром *d*); отношение этих величин $\sigma_в$ и дает искомый коэффициент концентрации $\alpha_к$.

Однако наиболее надежным является способ получения $\alpha_к$ путем определения предела выносливости для образцов исследуемого материала с местными напряжениями и без них. Первые дают пониженную (за счет влияния местных напряжений) величину предела выносливости σ'_r по сравнению со вторыми σ''_r, отношение σ''_r/σ'_r и будет равно $\alpha_к$. В результате применения всех указанных методов оказалось, что величины коэффициентов концентрации напряжений, определенные разными методами для одного и того же типа фактора концентрации, оказываются различными.

---

[1] См., например, Смирнов-Аляев Г. А., Сопротивление материалов пластическим деформациям, Машгиз, 1961.

Первые два способа — применение теории упругости или оптического метода — дают близкие друг к другу величины $\alpha_к$; это понятно, так как в обоих случаях результаты исследования относятся к изотропному упругому материалу; между тем величины $\alpha_к$, определенные при помощи испытаний на усталость, оказываются для некоторых сортов материала (хромоникелевая сталь, углеродистая сталь высокого сопротивления) близкими к полученным первыми двумя методами, а для некоторых (малоуглеродистая сталь) значительно пониженными. Оказалось, что коэффициент концентрации зависит не только от формы детали, но и от материала образца. Он тем ниже, чем материал пластичнее. Известное объяснение этому обстоятельству дано уже в § 16; пластические свойства материала образуют своеобразный буфер, смягчающий в той или иной степени эффект местных напряжений.

Таким образом, можно рассматривать два коэффициента концентрации: первый — теоретический $\alpha_{кт}$ — учитывает лишь влияние *формы* фактора концентрации и определяется главным образом при помощи первых двух из указанных выше методов; второй же — действительный коэффициент концентрации $\alpha_{кд}$,— определяемый опытами на усталость, учитывает влияние не только формы, но и *материала* детали.

Так как это влияние сказывается только на превышении местных напряжений над общими, т. е. на величинах $(\alpha_{кт}—1)$ и $(\alpha_{кд}—1)$, то степень «чувствительности» материала к местным напряжениям можно определить отношением этих двух величин, так называемым *коэффициентом чувствительности*

$$q=\frac{\alpha_{кд}-1}{\alpha_{кт}-1}. \qquad (31.10)$$

Этот коэффициент зависит от характера материала: для высококачественных, термически обработанных легированных сталей он доходит до единицы, а для малоуглеродистых сталей падает до 0,5. Крайне малочувствительным к местным напряжениям оказывается чугун; для него величина q близка к нулю и дествительные коэффициенты $\alpha_{кд}$ близки к единице. Это объясняется тем, что предел выносливости чугуна весьма сильно зависит от наличия микроскопических включений графита, представляющих собой фактически очень острые трещины в массе основного металла; влияние этих трещин, всегда имеющихся в чугуне, настолько велико, что почти совершенно сглаживает эффект других факторов концентрации напряжений.

Коэффициент чувствительности не является, однако, только характеристикой материала, он зависит от геометрической конфигурации детали и от ее абсолютных размеров; с увеличением абсолютных размеров детали q растет.

Приближенно (без учета влияния абсолютных размеров детали) величина коэффициента чувствительности q для стали может быть определена из графиков на рис. 442 в зависимости от предела прочности материала (в пределах от 40 до 130 $кГ/мм^2$) и от теоретического коэффициента концентрации $\alpha_{кт}$ (рис. 443 и 444). Этот график

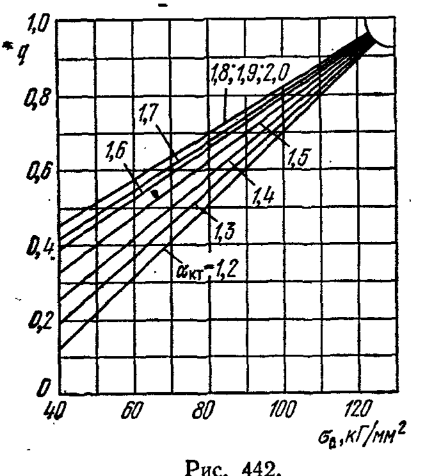


Рис. 442.

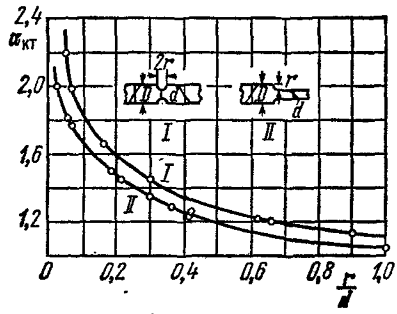


Рис. 443.

получен путем обработки экспериментальных данных по испытанию на усталость малых (диаметром 7÷10 *мм*) образцов различных марок стали при разных теоретических коэффициентах концентрации. Из него видно, что коэффициент чувствительности растет с увеличе-

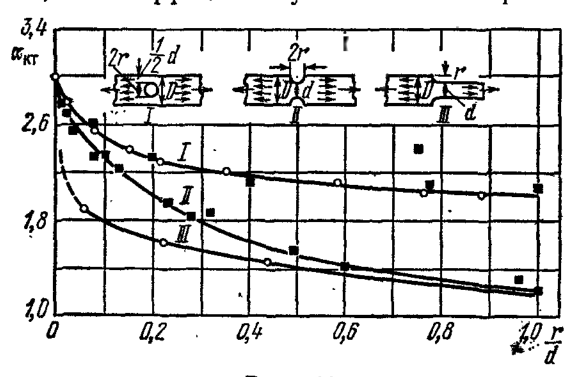


Рис. 444.

нием предела прочности материала и теоретического коэффициента концентрации. Начиная со значения $\alpha_{кт}=1,8$ дальнейшее увеличение $\alpha_{кт}$ уже не влияет на величину коэффициента чувствительности. Для легированных сталей с высоким пределом прочности (130 $кГ/мм^2$) можно считать коэффициент q равным единице и $\alpha_{кд}=\alpha_{кт}$.

Для цветных металлов имеется значительно меньше данных о величине коэффициента чувствительности. Для электрона (сплав магния с алюминием, цинком, марганцем) в отливках этот коэффициент равен 0,15; в редких случаях он повышается до 0,25. Для электрона в тянутом или штампованном виде коэффициент чувствительности повышается и колеблется в пределах 0,35÷0,50. Для алюминиевых сплавов наблюдались несколько более низкие значения коэффициентов чувствительности.

Для определения теоретического коэффициента концентрации в наиболее распространенных случаях концентрации напряжений (отверстия, выточки, галтели) могут быть использованы изображенные на рис. 443 и 444 графики изменения величины $\alpha_{кт}$ в зависимости от степени резкости нарушения формы детали при растяжении или сжатии (рис. 443) и чистом изгибе (рис. 444). Эти коэффициенты определены на плоских образцах с помощью оптического метода из-

Таблица 22

Коэффициенты концентрации

Вид деформации и фактора концентрации иапряжений	$\alpha_к$
I. Изгиб и растяженне:	
1. Полукруглая выточка иа валу; отношеиие раднуса выточки к диаметру вала:	
0,1	2,0
0,5	1,6
1,0	1,2
2,0	1,1
2. Галтель	
Отиошение радиуса полиой галтели к высоте сечеиия (диаметру вала):	
0,0625	1,75
0,125	1,50
0,25	1,20
0,5	1,10
3. Переход под прямым углом	2,0
4. Острая V-образная выточка	3,0
5. Нарезка дюймовая	2,0
6. Нарезка метрическая	2,5
7. Отверстия при отиошении диаметра отверстия к поперечному размеру сечения от 0,1 до 0,33	2,0
8. Риски от резца иа поверхности изделия	1,2—1,4
II. Крученне:	
1. Галтель при отиошеиии радиуса галтели к наименьшему диаметру вала:	
0,02	1,8
0,10	1,2
0,20	1,1
2. Шпоиочные канавки	1,6—2,0

мерения напряжений. Для круглых образцов с выточками и галтелями соответствующие значения $\alpha_{кт}$ оказываются несколько меньшими. Некоторые значения $\alpha_{кт}$ для круглых стержней приведены в таблице 22.

Следует подчеркнуть, что с помощью графиков рис. 443 и 444 и таблицы 22 определяются теоретические, т. е. максимальные возможные значения коэффициентов концентрации; зная величину теоретического коэффициента концентрации $\alpha_{кт}$, величину действительного коэффициента концентрации $\alpha_{кд}$ можно вычислить по формуле

$$\alpha_{кд}=1+q(\alpha_{кт}-1), \qquad (31.11)$$

вытекающей из соотношения (31.10). Однако если значение коэффициента чувствительности q, входящего в эту формулу, приближенно определять с помощью графиков рис. 442, то искомая величина действительного коэффициента концентрации $\alpha_{кд}$ окажется вычисленной тоже приближенно. Поэтому значения $\alpha_{кд}$ предпочтительнее определять непосредственно из испытаний на усталость образцов соответствующей формы. Значения коэффициентов концентрации $\alpha_{кт}$ и $\alpha_{кд}$ для более широкого круга факторов концентрации приводятся в специальных курсах и справочных пособиях [1]).

Довольно простые приближенные эмпирические формулы были предложены для вычисления действительных коэффициентов концентрации для стали в зависимости от предела прочности. В том случае, когда деталь не имеет резких переходов, выточек, шпоночных канавок и обладает чисто обработанной резцом поверхностью (но не полированной)

$$\alpha_{кд}=1{,}2+0{,}2\frac{\sigma_в-40}{110}. \qquad (31.12)$$

В случае же, когда имеются резкие переходы, надрезы, выточки,

$$\alpha_{кд}=1{,}5+1{,}5\frac{\sigma_в-40}{110}. \qquad (31.13)$$

Эти формулы годятся для стали с пределом прочности 40÷÷130 *кГ/мм*^{2} и являются достаточными для практического применения; $\sigma_в$ выражается в *кГ/мм*^{2}.

Говоря о местных напряжениях, необходимо особенно подчеркнуть влияние всякого рода повреждений поверхности на величину предела выносливости. Опыты показали, что кованые детали с поверхностью, не подвергавшейся механической обработке, дают предел выиосливости меньший, чем тот же материал после удаления поверхностного слоя и полировки; разница достигает для малоуглеродистой стали 15÷20%, для высококачественных сталей даже 50%.

[1]) См., например, Серенсен С. В., Тетельбаум И. М., Пригоровский Н. И., Динамическая прочность в машиностроенни, «Машиностроение», 1975.

Подобного же рода явление наблюдается при работе пружин, изготовляемых из высокосортных легированных сталей, если поверхность этих пружин после термической обработки (закалка и отпуск) не подвергается уже механической обработке; наличие подобной поверхности снижает предел выносливости в некоторых случаях *вдвое*. Даже простые царапины и риски снижают предел выносливости на $10 \div 20\%$.

Очень важным фактором, вызывающим значительную концентрацию напряжений, является плотная посадка с натягом одной детали на другую, например ступиц шкивов, дисков и колес на вал или ось. Многочисленные опыты показали, что в этом случае действительный коэффициент концентрации *доходит* до $1{,}8 \div 2{,}0$. Конструктивными мерами (§ 191) можно понизить эту величину.

Недостаточно тщательная обработка поверхности детали из высокопрочной стали может оказаться причиной значительной концентрации напряжений. Так, для сталей с временным сопротивлением от 50 до 140 *кГ/мм²* фрезеровка детали (обозначение ∇) без последующей шлифовки и полировки создает концентрацию напряжений, оцениваемую коэффициентом $\alpha_к = 1{,}25 \div 2$ (меньшие цифры здесь и далее относятся к сталям с $\sigma_в = 50$ *кГ/мм²*, бо́льшие — к сталям с $\sigma_в = 140$ *кГ/мм²*). Грубая шлифовка (обозначение $\nabla\nabla$) детали снижает величину коэффициента концентрации до $\alpha_к = 1{,}1 \div 1{,}45$; при чистой шлифовке или грубой полировке поверхности (обозначение $\nabla\nabla\nabla$) $\alpha_к = 1{,}05 \div 1{,}15$ и только при чистой полировке поверхности детали (обозначение $\nabla\nabla\nabla\nabla$) $\alpha_к = 1$. Цветные металлы и сплавы несколько менее чувствительны к виду обработки поверхности детали.

Специальный вид комбинированного влияния местных напряжений и химического воздействия представляет собой резкое снижение предела выносливости при коррозии. Опыты показывают, что если производить испытания на усталость в воде или другой жидкости, вызывающей коррозию металла, то предел выносливости значительно снижается. Это влияние слабо сказывается на нержавеющей стали.

Наконец, за счет своеобразных местных напряжений надо отнести влияние на предел выносливости структуры стали. Так как металл представляет собой конгломерат кристаллических зерен различной величины и различно ориентированных, то в действительности мы всегда имеем в известной мере неравномерное распределение напряжений даже при простом растяжении. Эта степень неравномерности увеличивается с неравномерностью величин отдельных зерен. Поэтому получение возможно более однородной мелкозернистой структуры стали при помощи термической обработки повышает предел выносливости.

В заключение необходимо еще раз подчеркнуть, что *чем более высокую прочность имеет сталь, тем она чувствительнее ко всякого*

рода надрезам и повреждениям поверхности, тем более культурной обработки она требует.

Полученными данными о пределе выносливости и о коэффициентах концентрации мы воспользуемся в дальнейшем, чтобы установить правила для выбора допускаемых напряжений.

§ 187. Влияние размеров детали и других факторов на величину предела выносливости

Приведенные выше данные о величине предела выносливости получены, как правило, при испытании образцов малого диаметра, от 7 до 10÷12 *мм*. В последнее время начали определять предел выносливости на образцах большого диаметра, до 40÷50 *мм*. Существуют машины для испытания на усталость осей подвижного состава в натуральную величину, позволяющие испытывать оси диаметром 150 и даже 300 *мм*.

Эти опыты показали, что, во-первых, результаты, получаемые для отдельных образцов такого большого размера, дают очень значительный разброс точек при попытке определить предел выносливости по методу, данному на рис. 435, во-вторых, предел выносливости, хотя и не очень точно определенный вследствие разброса данных эксперимента, все же оказывается для больших образцов ниже, и иногда значительно ниже, чем для малых. Это снижение особенно имеет место для легированных сталей; на предел выносливости углеродистых сталей влияние абсолютных размеров значительно слабее.

Экспериментально установленный факт снижения предела выносливости в изделиях по сравнению с величиной предела выносливости в малых образцах, испытываемых обычно в лабораториях, имеет очень большое значение, так как это обстоятельство идет не в запас прочности.

К сожалению, в настоящее время еще не найдено более или менее достоверное объяснение этому факту; по-видимому, указанное снижение предела выносливости вызывается рядом обстоятельств, в частности:

а) в больших образцах более вероятно наличие различных внутренних факторов концентрации напряжений (включения, пузыри и т. д.); малые образцы оказываются в этом отношении обычно чище;

б) при изготовлении образцов поверхностный слой получает некоторый наклеп, который может оказаться относительно бо́льшим в малых образцах; между тем опыт показывает, что наклеп в целом ряде случаев может повышать предел выносливости;

в) наконец, при одной и той же величине наибольшего (в крайнем волокне) напряжения в малых образцах падение напряжения при переходе к более глубоко расположенным слоям металла про-

исходит интенсивнее, чем в больших; как говорят, градиент напряжений в малых образцах больше и отдельные кристаллические зерна оказываются в лучших условиях.

Все эти соображения, однако, являются лишь некоторыми предположениями.

Эксперименты с определением действительных коэффициентов концентрации на образцах разных размеров показали, что увеличение абсолютных размеров образцов в известной мере эквивалентно повышению коэффициента чувствительности материала. Это имеет большое практическое значение, так как показывает, что факторы концентрации, вызывающие большие местные напряжения, в действительности гораздо опаснее, чем это дают лабораторные опыты с малыми образцами.

Таким образом, при проверке прочности материала влияние абсолютных размеров детали на величину предела выносливости обязательно должно быть учтено. Избежать необходимости такого учета, очевидно, можно было бы только, определяя величину предела выносливости на моделях деталей, изготовленных в натуральную величину. Последнее, однако, далеко не всегда возможно. Вместе с тем в настоящее время уже имеется более или менее достаточное количество данных по сравнительным испытаниям на усталость малых лабораторных (диаметром 7÷10 *мм*) и больших образцов из одного и того же материала. Используя эти данные и оценивая степень снижения предела выносливости за счет увеличения размеров образца с помощью так называемого *масштабного коэффициента* $\alpha_м$, представляющего собой отношение предела выносливости малого образца p_r к пределу выносливости геометрически подобного большого образца или детали $p_r^д$, можно по известному значению предела выносливости, полученному из испытаний малых образцов, приближенно определить величину предела выносливости детали. Так как $\alpha_м = p_r / p_r^д$, то

$$p_r^д = \frac{p_r}{\alpha_м}. \qquad (31.14)$$

Величина масштабного коэффициента $\alpha_м$, в зависимости от абсолютных размеров образца или детали, может быть определена по графикам рис. 445. При этом снижение предела выносливости детали определяется по отношению к пределу выносливости, полученному из испытаний на усталость образцов диаметром 10 *мм*. Величина $\alpha_м$ зависит не только от абсолютных размеров детали, но и от материала детали и фактора концентрации напряжений. На рис. 445 по кривой *1* определяются значения $\alpha_м$ для деталей из углеродистых сталей при отсутствии концентрации напряжений, по кривой *2* — для деталей из углеродистых сталей при умеренной концентрации напряжений ($\alpha_{кд} < 2$) и для деталей из легированных сталей при отсутствии концентрации напряжений, по кривой *3* —

для деталей из легированных сталей при наличии концентрации напряжений. Графики рис. 445 можно применять для гладких образцов только при изгибе и кручении, а для образцов с концентрацией напряжений — при всех видах напряженного состояния.

Технологические процессы изготовления деталей (термическая и термохимическая обработка, резание, прокатка, штамповка, прессовые посадки, сварка узлов и т. п.) также порождают факторы, влияющие на сопротивление материала переменным нагрузкам.

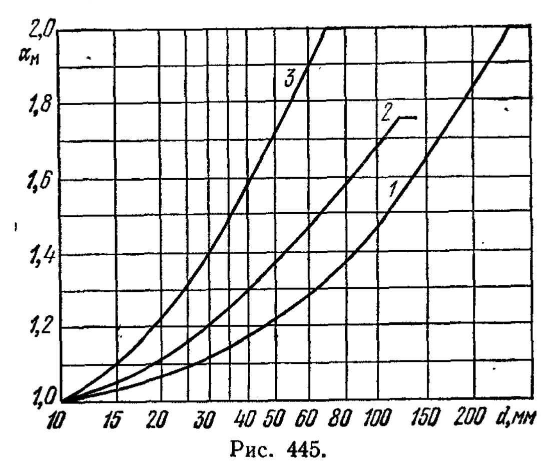


Рис. 445.

Некоторые из этих процессов могут повлечь за собой понижение предела выносливости; вместе с тем существуют и такие способы обработки поверхностного слоя детали, применение которых увеличивает выносливость материала. К этим способам относятся: а) наклёп поверхностного слоя готовой детали путем обкатки роликами или обдувки дробью; б) химико-термическая обработка поверхности: азотирование, цементирование или цианирование; в) закалка поверхностного слоя токами высокой частоты или газовым пламенем. Упрочняющее действие этих видов обработки объясняется появлением в поверхностном слое детали остаточных напряжений сжатия: при суммировании последних с напряжениями симметричного цикла от внешней нагрузки получаются асимметричными циклы напряжений с сжимающим средним напряжением p_m, менее опасные для детали.

Влияние технологии изготовления и обработки поверхности детали может быть учтено: 1) при определении предела выносливости материала на малых лабораторных образцах, получивших аналогичную технологическую обработку перед испытанием на усталость; 2) путем соответствующего изменения величины коэффициента концентрации напряжений или введения специального *коэф-*

фициента технологии изготовления и обработки детали $K_т$, который может иметь величину как бо́льшую (в случае понижения сопротивления детали переменным нагрузкам), так и меньшую единицы.

Условия эксплуатации детали в ряде случаев также оказывают существенное влияние на выносливость материала. Наиболее важным является влияние коррозии и температуры, а также влияние перерывов, недогрузок и перегрузок детали в процессе ее работы.

При работе детали в условиях, вызывающих коррозию (например, при нахождении детали в воде), сопротивление материала переменным нагрузкам понижается, кривая усталости в координатах $p—N$ не имеет участка с асимптотическим приближением к горизонтальной прямой; в этом случае возможно лишь нахождение ограниченных пределов выносливости на базе некоторого определенного числа циклов. Вредное влияние коррозии может быть ослаблено путем наклёпа, азотирования, оксидирования, хромирования и некоторых других способов обработки поверхности детали. Влияние коррозии при расчете деталей может быть учтено путем соответствующего увеличения коэффициента концентрации напряжений.

Изменение величины предела выносливости материала необходимо учитывать также и в тех случаях, когда деталь работает при пониженной или при повышенной температуре. У металлов (сталь, чугун, цветные металлы) значения предела выносливости при понижении температуры несколько увеличиваются как в случае гладких образцов, так и в случае образцов с концентрацией напряжений. При повышении температуры предел выносливости у тех же металлов, как правило, сначала постепенно, а затем все более быстро уменьшается. Временное пребывание детали в условиях пониженных или повышенных температур может быть учтено введением специльного коэффициента.

Детали машин и некоторых сооружений довольно часто подвергаются кратковременным перегрузкам и недогрузкам. Перерывы в работе детали, недонапряжения и сравнительно непродолжительные перенапряжения материала обычно оказывают положительное влияние, т. е. повышают величину предела выносливости; при длительных перенапряжениях предел выносливости понижается. Безопасная величина перенапряжения при той или иной его продолжительности или, наоборот, безопасная продолжительность перенапряжения при той или иной его величине выясняется путем построения специальных кривых, называемых *кривыми повреждаемости*. На способах построения этих кривых мы здесь останавливаться не будем. В связи со сказанным следует отметить полезность так называемой «тренировки» детали — предварительной работы ее в течение определенного числа циклов при напряжениях несколько ниже предела выносливости материала.

Влияние условий эксплуатации при расчете детали может быть учтено с помощью специального коэффициента $K_э$, который, равно как и коэффициент $K_т$, может быть и больше и меньше единицы.

Влияние частоты повторения циклов переменных напряжений на выносливость материала обычно учитывается уже при нахождении предела выносливости. Существующие испытательные машины, как правило, дают около 3000 циклов напряжений в минуту. Опыты показывают, что изменение этого числа в пределах от 500 до 10 000 циклов минуту заметным образом на величине предела выносливости не сказывается. Поэтому при расчетах деталей, работающих при переменных напряжениях, специальный коэффициент динамичности напряжений $K_д$ следует вводить только при скоростях повторения циклов, меньших 500 или больших 10 000 в минуту, а также в тех случаях, когда переменная нагрузка одновременно является ударной.

§ 188. Практические примеры разрушения при переменных нагрузках. Механизм появления и развития трещин усталости

После того как установлены все обстоятельства, характеризующие явление разрушения при переменных нагрузках, следует рассмотреть некоторые практические случаи подобного вида поломок.

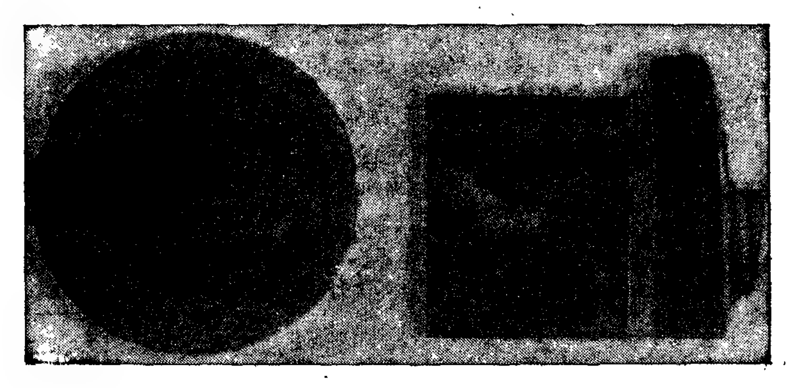


Рис. 446. Рис. 447.

На рис. 446 и 447 показан случай излома вагонной оси (изгиб при вращении), вызванный резким переходом от утолщенной части к более тонкой; вместо плавного перехода галтелью дан ступенчатый переход с грубыми рисками от резца. Трещина усталости начинается с наружной поверхности и имеет кольцеобразную форму. Материал оси вполне удовлетворителен; на это указывает и весьма малая площадь зоны мгновенного излома.

На рис. 448 показан излом оси, не вращавшейся, а лишь изгибавшейся в вертикальной плоскости. Материал — осевая сталь с пределом прочности около 50 *кГ/мм²*. Причиной развития трещины усталости явился резкий (под прямым углом) переход от квадратного сечения оси к круглому.

На рис. 449 показан продольный разрез другого конца этой же оси, еще не успевшего сломаться; ясно видны трещины усталости, распространяющиеся от крайних волокон сечения в месте резкого перехода.



Рис. 448.

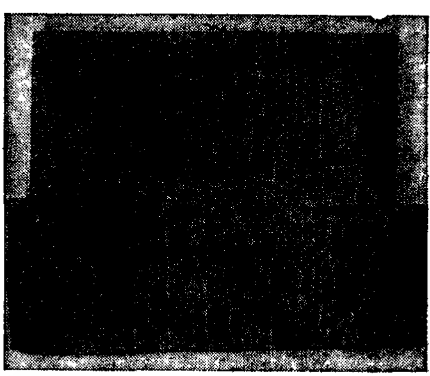


Рис. 449.

На рис. 448 видны зоны этих трещин и зона окончательного излома. Следует обратить внимание на ряд криволинейных полос и линий на поверхности трещин усталости. Это — следы *постепенного* развития трещины; разрушение идет примерно по нормали к этим линиям; таким образом, изучая расположение этих линий, мы всегда можем найти исходный пункт, откуда началось развитие трещины; как правило, там и следует искать источник местных напряжений, вызвавших начало трещины. Рост трещины объясняется тем, что у ее дна в свою очередь развиваются очень высокие местные напряжения, которые и обусловливают дальнейшее распространение трещины в глубь металла.

Интересно отметить, что оси, излом одной из которых изображен на рис. 448, не давали трещин усталости, когда они изготовлялись из более мягкой стали ($\sigma_в$=40 *кГ/мм²*), даже при той же конфигурации. Здесь сказывается различная чувствительность этих сталей к местным напряжеииям.

На рис. 450 показаны трещины усталости, начавшие распространяться от отверстия для смазки в шейке коленчатого вала, работавшего на переменное (в разные стороны) кручение. Трещины

идут под углом 45° к оси вала, перпендикулярно к главным напряжениям.

На рис. 451 показано начало трещины усталости на оси моторной дрезины, у места очень небольшого (0,5 *мм* высотой), но очень резкого уступа. Мы видим, что трещина усталости начинает развиваться в нескольких местах сразу и даже не строго в одном сечении. Позднее все эти трещины сливаются в одну.

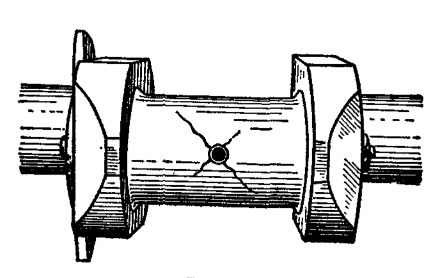


Рис. 450.

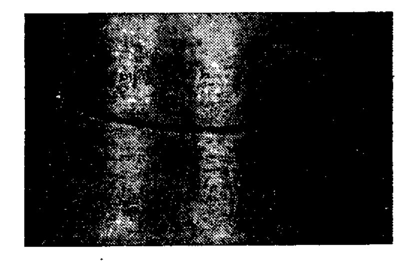


Рис. 451.

На рис. 452 и 453 показаны очертания двух паровозных осей, из которых одна, с плавными переходами, прослужила благополучно 40 лет, вторая же, с резким надрезом,— всего один год. Материал второй оси был лучше, чем первой.

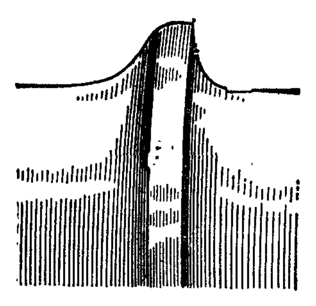


Рис. 452.

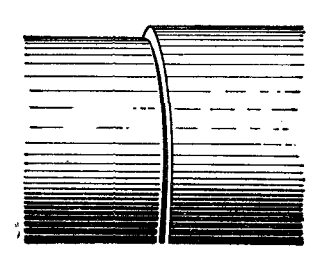


Рис. 453.

Наконец, на рис. 454 показан пример трещины усталости, начавшейся от внутреннего фактора концентрации. Пустота или постороннее включение в головке рельса создали очаг местных напряжений, вызвавший постепенное развитие трещины, ослабившей сечение и приведшей к излому. На поверхности излома трещина имеет вид серебристого пятна.

Приведенных примеров достаточно, чтобы показать характерные черты изломов усталости.

Опыт показывает, что главную роль в образовании этих изломов играет не качество материала (обычно оно оказывалось вполне нормальным), а совершенно неправильная обработка детали, вызывающая весьма значительные местные напряжения. Гораздо реже могут быть случаи, когда плохое качество материала может обусловить появление трещины усталости при таком повреждении поверхности, которое при нормальном материале, может быть, и не вызвало бы излома. Нам известен случай излома оси вследствие наличия точки, выбитой острым керном на поверхности вагонной оси.

В заключение настоящего параграфа следует остановиться на том физическом процессе, который вызывает и заставляет развиваться трещину усталости.

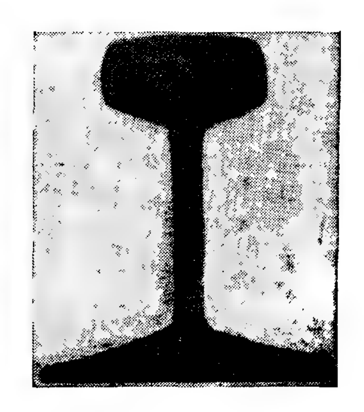


Рис. 454.

При действии высоких местных напряжений, вызванных тем или иным фактором концентрации и обычно значительно превышающих предел текучести материала, в отдельных кристаллических зернах начинаются сдвиги, аналогичные тем, которые имеют место и при статическом растяжении. Разница заключается лишь в том, что при растяжении образца пластические деформации и явления сдвига в кристаллических зернах вызываются общими напряжениями, охватывают поэтому весь объем образца и растут в одном направлении; при переменных нагрузках эти деформации происходят в пределах очень малого объема, подвергающегося местным напряжениям, и происходят то в одном, то в противоположном направлениях. Поэтому они не оказывают заметного влияния на прочность образца в целом, но та часть материала, которая подвергается высоким местным напряжениям, постепенно проходит все стадии пластической деформации, которые испытывает материал всего образца, подвергающегося простому растяжению.

При каждом цикле изменения нагрузок пластически деформированная часть материала, попавшая в зону высоких местных напряжений, испытывает сдвиги то в том, то в другом направлениях; каждый новый сдвиг происходит в другой плоскости, чем предыдущий, так как эти сдвиги сопровождаются упрочнением материала. По мере упрочнения пластически деформированный объем все более приближается по своей жесткости к упругому, окружающему его материалу, и в связи с этим берет на себя все бо́льшую долю нагрузки. Это вызывает непрерывный рост фактических максимальных напряжений в рассматриваемом малом объеме материала при остающемся постоянном среднем (измеряемом) напряжении. В то же время это разгружает упругую зону, что влечет за собой уменьшение

ее деформаций, а значит, и деформаций пластической части материала, заключенной внутри упругой зоны.

Таким образом, при переменных нагрузках происходит постепенный рост фактических наибольших напряжений перенапряженного объема материала, а в связи с этим постепенное затухание его деформаций. Если это затухание успеет закончиться раньше, чем фактические напряжения дойдут до величины разрушающего напряжения, материал не даст трещины; мы будем иметь случай работы детали при напряжениях, лежащих ниже предела выносливости. В противном случае, если эти напряжения успеют сделаться равными разрушающему напряжению, возникает начальная трещина, у дна которой процесс повторяется и вызывает дальнейший рост трещины; деталь работает при напряжениях, превышающих предел выносливости.

Физический процесс разрушения при переменных нагрузках по существу не отличается в общих чертах от тех явлений, которые имеют место при статическом растяжении. Это заключение подтверждается и современными исследованиями при помощи рентгеновских лучей механизма разрушения в обоих случаях [1]).

§ 189. Назначение допускаемых напряжений

С помощью диаграмм, изображенных на рис. 436 и 439, может быть определена величина опасного напряжения при любом виде цикла. Рассмотрим теперь порядок назначения допускаемых напряжений. При этом за линию, определяющую опасные значения напряжений, для упрощения расчета будем принимать прямую AD (рис. 436) в случае хрупких, и прямую AH (рис. 439) в случае пластичных материалов. Для получения допускаемых напряжений абсциссы и ординаты каждой точки той или иной из этих прямых должны быть уменьшены в соответствии с принятыми величинами коэффициентов запаса прочности; последние для постоянной и переменной составляющей цикла напряжений будут неодинаковыми.

Среднее напряжение цикла p_m может рассматриваться как некоторое постоянное статическое напряжение. Как известно, опасным напряжением при постоянной нагрузке является предел прочности в случае хрупких и предел текучести в случае пластичных материалов. На величине этих напряжений факторы, связанные с технологией изготовления и условиями эксплуатации детали, ее размерами, состоянием поверхности и т. п., сказываются в значительно меньшей степени, чем на величине предела выносливости матери-

---

[1]) См., например: Одинг И. А., Иванова В. С., Механизм усталостного разрушения металлов, Машгиз, 1962; Усталость и выносливость металлов, под ред. Г. В. Ужика, ИЛ, 1963; Вопросы механической усталости, под ред. С. В. Серенсена, «Машиностроение», 1964; Форрест Р., Усталость металлов, «Машиностроение», 1968.

ала. Влияние этих факторов может быть учтено некоторым небольшим изменением величины основного коэффициента запаса прочности k_0, которым обычно учитываются неточности определения свойств материала, а также величины и положения нагрузки, погрешности расчета и другие общие факторы. В случае пластичных материалов, имеющих достаточно развитую площадку текучести, можно не учитывать особо и влияние концентрации напряжений. Таким образом, допускаемая величина напряжения при постоянной нагрузке для пластичных материалов может быть принята равной (рис. 455)

$$[p_{+1}]=\frac{p_т}{k_{01}}, \qquad (31.15)$$

а для хрупких (рис. 455)

$$[p_{+1}]=\frac{p_в}{k_{02}\alpha_{кд}}, \qquad (31.16)$$

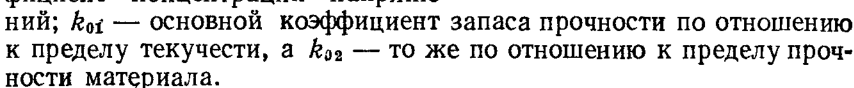


Рис. 455.

где $\alpha_{кд}$ — действительный коэффициент концентрации напряжений; k_{01} — основной коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести, а k_{02} — то же по отношению к пределу прочности материала.

При симметричном цикле опасным напряжением является предел выносливости, который, как правило, всегда меньше предела текучести материала. Допускаемая величина напряжения при симметричном цикле $[p_{-1}]$ найдется путем деления предела выносливости p_{-1} на коэффициент запаса прочности k_r, который, кроме основного коэффициента запаса k_0, должен включать коэффициент концентрации напряжений $\alpha_{кд}$, масштабный коэффициент $\alpha_м$ и, в случае надобности, коэффициенты, учитывающие влияние технологии изготовления и условий эксплуатации детали $K_т$ и $K_э$. Если переменные нагрузки меняются не плавно, а сопровождаются резкими ударами, то дополнительно должен быть введен еще и динамический коэффициент $K_д$, числовые значения которого в этих случаях колеблются обычно между единицей и двумя. Таким образом, как для хрупких, так и для пластичных материалов

$$[p_{-1}]=\frac{p_{-1}}{k_r}=\frac{p_{-1}}{k_0\alpha_{кд}\alpha_м} \qquad (31.17)$$

или

$$[p_{-1}]=\frac{p_{-1}}{k_0\alpha_{кд}\alpha_м K_т K_э K_д}. \qquad (31.18)$$

На диаграмме напряжений в координатах p_a—p_m (рис. 455) изображены линии опасных напряжений $AD\,(AH)$ и безопасных

(допускаемых) A_1D_1; последняя построена по значениям $[p_{+1}]=OD_1$ и $[p_{-1}]=OA_1$, найденным из формул (31.15) и (31.17). Для нахождения величины допускаемого напряжения $[p_r]$ при любом цикле переменных напряжений с коэффициентом асимметрии r нужно из начала координат O провести под углом β $\left(\operatorname{tg}\beta=\frac{1-r}{1+r}\right)$ к оси абсцисс прямую OM до пересечения с прямой $A_1D_1(A_1H_1)$. Сумма абсциссы $p_m(M)$ и ординаты $p_a(M)$ точки M дает величину допускаемого напряжения $[p_r]$:

$$[p_r]=p_{\max}(M)=p_m(M)+p_a(M). \tag{31.19}$$

Из подобия треугольников OA_1D_1 и NMD_1 следует, что

$$\frac{OD_1}{ND_1}=\frac{OA_1}{NM},$$

или

$$\frac{[p_{+1}]}{[p_{+1}]-p_m(M)}=\frac{[p_{-1}]}{p_a(M)},$$

откуда

$$p_a(M)\cdot[p_{+1}]+p_m(M)[p_{-1}]=[p_{+1}]\cdot[p_{-1}]. \tag{31.20}$$

Так как

$$p_a(M)=\frac{1-r}{2}p_{\max}(M)=\frac{1-r}{2}[p_r],$$

а

$$p_m(M)=\frac{1+r}{2}p_{\max}(M)=\frac{1+r}{2}[p_r],$$

то из (31.20)

$$[p_r]=\frac{2[p_{+1}][p_{-1}]}{(1+r)[p_{-1}]+(1-r)[p_{+1}]}. \tag{31.21}$$

Условие прочности получает такой вид:

$$p_{\max}\leqslant[p_r]. \tag{31.22}$$

Общий ход решения задачи установления допускаемых напряжений описанным способом может быть представлен в виде следующей схемы.

Дано: а) вид деформации; б) соотношение напряжений $p_{\max}$ и $p_{\min}$; в) конфигурация детали; г) механические характеристики материала ($\sigma_в$). Требуется найти допускаемое напряжение $[p_r]$.

Схема решения:

1. Вычислить

$$p_m=\frac{p_{\max}+p_{\min}}{2} \quad \text{и} \quad p_a=\frac{p_{\max}-p_{\min}}{2}.$$

2. Найти

$$r=\frac{p_{\min}}{p_{\max}}.$$

3. Определить предел выносливости для симметричного цикла при данном виде деформации

$$p_{-1}=\beta_r\sigma_{\text{в}}.$$

4. По графикам рис. 443 и 444 найти $\alpha_{\text{кт}}$ в зависимости от конфигурации детали.

5. По графику рис. 442 найти q.

6. Вычислить действительный коэффициент концентрации

$$\alpha_{\text{кд}}=1+(\alpha_{\text{кт}}-1)\,q.$$

Действительный коэффициент концентрации может быть вычислен и по формулам (§ 186)

$$\alpha_{\text{кд}}=1{,}2+0{,}2\frac{\sigma_{\text{в}}-40}{110},\quad \text{или}\quad \alpha_{\text{кд}}=1{,}5+1{,}5\frac{\sigma_{\text{в}}-40}{110},$$

если известен лишь *общий* характер обработки детали.

7. По графикам рис. 445 в зависимости от размеров детали найти величину масштабного коэффициента $\alpha_{\text{м}}$.

8. Найти допускаемое напряжение для симметричного цикла

$$[p_{-1}]=\frac{p_{-1}}{k_0\alpha_{\text{кд}}\alpha_{\text{м}}}.$$

9. Найти предел текучести материала $p_{\text{т}}$.

10. Определить допускаемое напряжение при статической нагрузке

$$[p_{+1}]=\frac{p_{\text{т}}}{k_0}.$$

11. Найти искомое значение допускаемого напряжения

$$[p_r]=\frac{2\,[p_{+1}]\,[p_{-1}]}{(1-r)\,[p_{+1}]+(1+r)\,[p_{-1}]}.$$

Описанный выше метод установления допускаемых напряжений является в значительной мере приближенным за счет спрямления диаграмм и недостаточно точного учета влияния коэффициента концентрации. При желании можно пользоваться более точным изображением графика разрушающих напряжений [1]), не прибегая к спрямлению его пунктирными линиями, как это было показано на рис. 436 и 439. Уточненный способ расчета может дать значительное повышение расчетной величины допускаемого напряжения для циклов с характеристикой r, близкой к $r=0$, при значениях предела выносливости, близких к пределу текучести; в остальных случаях разница в результатах расчета по спрямленной и уточненной диаграммам будет сравнительно невелика.

---

[1]) См. стр. 545.

§ 190. Проверка прочности при переменных напряжениях и сложном напряженном состоянии

Указанные выше приемы проверки прочности материала при переменных напряжениях относятся к случаю простейших деформаций — растяжения, сжатия, кручения и изгиба. Возникает вопрос, как использовать полученные данные для случаев сложного напряженного состояния.

Наибольшее значение для практики имеет случай совместного действия изгиба и кручения. Как указано в § 125, проверке подлежит элемент материала, испытывающий плоское напряженное состояние; по четырем его граням действует касательное напряжение $\tau = 0{,}5M_к/W$ и по двум из них нормальное $\sigma = M_и/W$, где $W = \pi r^3/4$ — момент сопротивления вала круглого поперечного сечения.

Для проверки прочности при постоянной нагрузке мы имели по теории наибольших касательных напряжений (А) и по энергетической теории (5) такие условия:

$$\text{А)}\quad \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant [\sigma]$$

и

$$\text{Б)}\quad \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leqslant [\sigma].$$

Обе эти формулы могут быть приведены к общему виду путем деления обеих частей неравенства на $[\sigma]$:

$$\text{А)}\quad \sqrt{\frac{\sigma^2}{[\sigma]^2} + \frac{\tau^2}{\left(\frac{[\sigma]}{2}\right)^2}} \leqslant 1$$

и

$$\text{Б)}\quad \sqrt{\frac{\sigma^2}{[\sigma]^2} + \frac{\tau^2}{\left(\frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}\right)^2}} \leqslant 1,$$

иначе

$$\sqrt{\frac{\sigma^2}{[\sigma]^2} + \frac{\tau^2}{[\tau]^2}} \leqslant 1,$$

где $[\tau] = [\sigma]/2$ по теории наибольших касательных напряжений и $[\tau] = [\sigma]/\sqrt{3}$ по энергетической теории.

Таким образом, проверка прочности как по той, так и по другой теориям прочности приводит к одному и тому же уравнению:

$$\frac{\sigma^2}{[\sigma]^2} + \frac{\tau^2}{[\tau]^2} \leqslant 1. \qquad (31.23)$$

Так как появление трещины усталости обусловлено теми же физическими процессами деформации материала, которые имеют место и при статическом действии нагрузок, то условие (31.23) может

быть применено и к проверке прочности при переменных нагрузках. Величины σ и τ могут быть разложены на составляющие σ_m и σ_a, τ_m и τ_a:

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a;$$
$$\tau = \tau_m + \tau_a;$$

под $[\sigma]$ и $[\tau]$ в этом случае надлежит понимать значения допускаемых напряжений для изгиба и кручения $[\sigma_r^{и}]$ и $[\tau_r^{к}]$, полученные из спрямленной диаграммы $[p_a]$ — $[p_m]$ (рис. 455) с учетом *соответствующих каждому виду деформации* коэффициентов концентрации и характеристик цикла $\sigma_{min}/\sigma_{max}$ и τ_{min}/τ_{max}.

§ 191. Практические меры по борьбе с изломами усталости

Результаты, изложенные в предыдущих параграфах, дают возможность установить те практические меры, которые позволяют инженеру обеспечить прочность деталей машин и конструкций при переменных напряжениях.

Эти меры могут быть разделены на две категории. С одной стороны, необходимо обеспечить изготовление элементов машин и конструкций из материала, который наилучшим образом сопротивлялся бы действию переменных напряжений. Как мы видели, требования к материалу в этом отношении сводятся к двум положениям: во-первых, желательно применять металл с возможно более высоким пределом прочности при достаточной пластичности, что обеспечит высокое значение предела выносливости; во-вторых, материал должен быть свободен от всяких внутренних «факторов концентрации»; это требует возможно более однородной, мелкозернистой структуры, отсутствия всяких остаточных напряжений (например, закалочных) или нарушений сплошности материала в виде трещин, газовых пузырьков, неметаллических включений.

Указанные требования к материалу объясняют, почему для ответственных деталей, работающих на переменную нагрузку, применяют так часто легированные (хромоникелевые, хромованадиевые) стали с очень высоким пределом прочности, которым при помощи тщательной термической обработки (закалка с последующим отпуском) придана мелкозернистая структура, свободная от внутренних напряжений.

Однако при применении таких сталей иногда приходится встречаться с наличием микроскопических трещин (особенно в хромоникелевых сталях), так называемых *флокенов*. Эти трещины, как и включения, могут очень резко снизить предел выносливости стали, обладающей в то же время высоким пределом прочности.

Вторая категория мер, обеспечивающих прочность деталей при переменной нагрузке, сводится к *грамотной*, *культурной проекти-*

ровке внешних очертаний детали и тщательной обработке ее поверхности. Основная цель, которую должны ставить себе при этом конструктор и технолог, сводится к возможному снижению коэффициентов концентрации напряжений, вызываемых всякого рода резкими изменениями очертания детали и дефектами обработки поверхности. Снижение местных напряжений достигается прежде всего возможно более плавными очертаниями переходов, выемок, надрезов, галтелей. Совершенно необходимо решительно не допускать переходов, вовсе не смягченных кривой хотя бы не очень большого радиуса; везде, где возможно, следует применять радиус, достаточный для существенного снижения местных напряжений. Данные, позволяющие соответствующим образом выбрать числовую величину этих радиусов, приведены на рис. 443 и 444. Надо заметить, что иногда даже небольшое увеличение радиуса перехода избавляет деталь от опасности.

Известен случай большого количества изломов коленчатых валов авиационных двигателей в английском воздушном флоте; эти изломы происходили на галтели около места насадки пропеллера; стоило увеличить радиус галтели всего на $1/8'' \approx 3$ *мм*, и изломы прекратились.

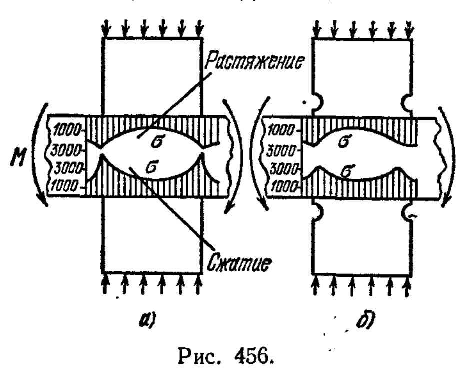


Рис. 456.

Это объясняется тем, что при напряжениях, близких к пределу выносливости, кривая зависимости разрушающего напряжения от числа циклов идет почти горизонтально (рис. 434). Поэтому, если действительное напряжение хотя бы немного превышает предел выносливости, излом неминуем, так как большинство деталей испытывает достаточное число циклов напряжений, чтобы трещина усталости имела время образоваться.

С другой стороны, стоит смягчением коэффициента концентрации снизить напряжение хотя бы немного ниже предела выносливости, как трещина уже не может возникнуть. Коэффициент концентрации напряжений тем больше, чем резче происходит изменение напряжений, чем больше разница в жесткости смежных частей стержня, чем резче изменение очертаний детали. Поэтому бороться с местными повышениями напряжений можно не только путем установления более плавных переходов, но и путем снижения разницы в жесткостях смежных частей детали в тех местах, где неизбежна концентрация напряжений. Так, в последнее время возникла идея «разгружающих» надрезов. Например, при глухой посадке с натягом ступицы

колеса на ось или шкива на вал возникают очень значительные местные напряжения в материале вала (рис. 456, *а*).

Коэффициент концентрации, отнесенный к нормальным напряжениям от изгиба в сечении, перпендикулярном к оси вала, достигает величины 1,8—2,0. На рис. 456, *а* дан график величины нормальных напряжений σ в крайних волокнах изгибаемого вала, на который насажена с натягом ступица шкива. Напряжения определены оптическим методом.

На чертеже видно, что около края ступицы напряжения σ, особенно в сжатой зоне, дают резкое местное повышение.

Если в ступице около места посадки сделать вырез, смягчающий жесткость детали у ее края, то местные напряжения падают и распределяются более равномерно (рис. 456, *б*). Коэффициент концентрации падает с 2,0 до 1,4; если же, кроме окружной канавки, сделать подступичную часть вала несколько большего диаметра, как показано на рис. 457, то коэффициент концентрации удается снизить до 1,0—1,05. Точно так же, если у места резкого перехода (под прямым углом) сделать плавную выкружку в более толстой части детали (рис. 458, *а* и *б*), то местные напряжения резко снизятся.

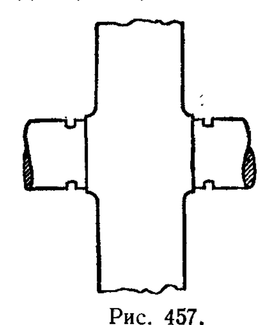


Рис. 457.

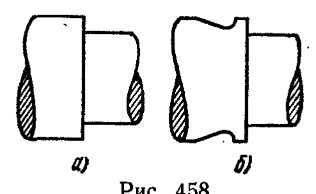


Рис. 458.

Во всех приведенных примерах изменения формы детали имеют целью создать возможно более плавное изменение напряжений в месте перехода.

Для сопротивления материала переменным нагрузкам не менее важную роль, чем плавность очертаний, играет и чистота отделки поверхности. Всякие царапины, риски от резца играют громадную роль. Нам известен целый ряд случаев обрыва штоков машин после того, как при ремонте изношенного конического конца штока на него надевалась для утолщения коническая втулка; перед посадкой втулки изношенная поверхность штока грубо обтачивалась резцом и не подвергалась более чистой обработке. Трещина усталости образовывалась под втулкой, начинаясь от места концентрации напряжений, вызванной рисками от резца. Поэтому чистота обработки поверхности изделия, применение никелировки или лакировки для покрытия этой поверхности в случае возможности коррозии являются не роскошью для деталей, работающих при переменных нагруз-

ках, а во многих случаях совершенно необходимой мерой для возможности благополучной работы конструкции.

Необходимо отметить, что вопросы о выборе материала и о правильном проектировании формы детали нельзя отрывать друг от друга. *Чем лучше материал, чем выше его предел прочности, тем более тщательной обработки он требует.* Применяя дорогостоящую легированную сталь высокого качества и не обращая внимания на снижение местных напряжений, мы рискуем свести на нет все преимущества применения качественной стали. Коэффициент чувствительности к местным напряжениям для такой стали будет значительно выше, чем для более мягкой, простой углеродистой стали. На это уже было указано в § 186.

На рис. 459 и 460 показаны диаграммы p_a—p_m для всех сортов материала: обыкновенной углеродистой стали и высококачественной легированной стали. На этих диаграммах линии *АМВ* соответствуют разрушению за счет развития трещин усталости, линии же

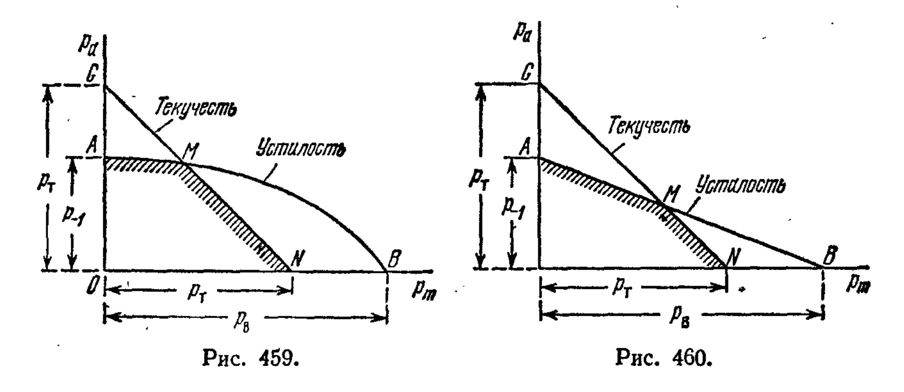


Рис. 459. Рис. 460.

CN — за счет образования пластических деформаций при превышении напряжениями предела текучести.

Линии *AMN*, заштрихованные на чертеже, представляют диаграмму разрушающих напряжений (в широком смысле слова). Как мы видим, для легированной стали возможность разрушения за счет развития трещины усталости гораздо значительнее, чем для обычной углеродистой стали. Смягчения местных напряжений за счет пластических деформаций в первом случае ждать гораздо труднее, чем во втором. Этим в значительной степени и объясняется повышенная чувствительность качественной стали к концентрации напряжений.

Резюмируя, можно сказать, что чем лучше применяемая нами сталь как материал, тем более культурной и тщательной обработки она требует, чтобы все ее преимущества могли быть использованы в полной мере.

Глава XXXII

ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ НА ПОЛЗУЧЕСТЬ

§ 192. Влияние высоких температур на механические свойства металлов

В связи с быстрым развитием машиностроения в настоящее время все более важное значение приобретают расчеты на прочность деталей машин, длительное время работающих при высоких температурах. К таким деталям относятся, например, диски и лопатки паровых и газовых турбин, трубы и другие детали паровых котлов, различные части двигателей внутреннего сгорания, реактивных двигателей, химических установок и приборов и многие другие.

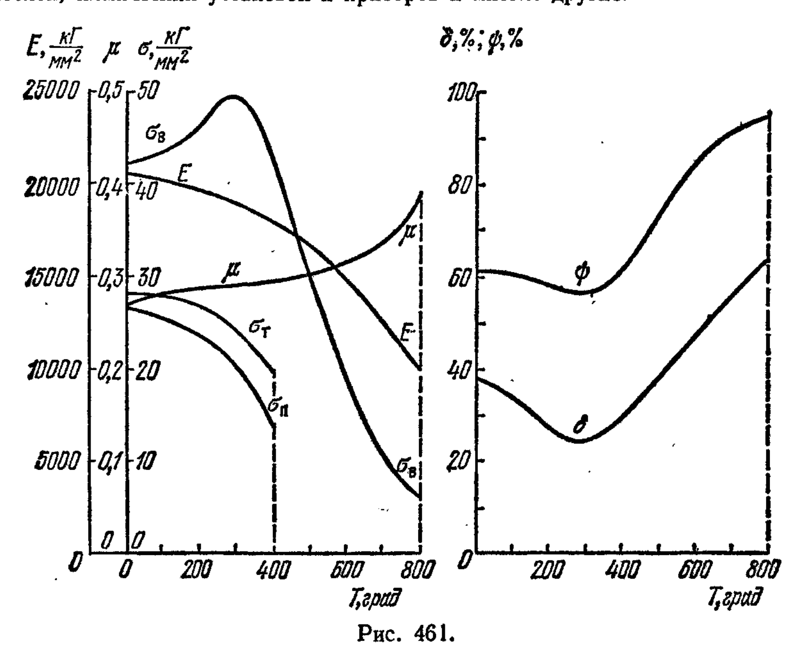


Рис. 461.

На поведении материала таких деталей под нагрузкой сказывается как *абсолютная величина температуры*, так, в особенности, и *продолжительность работы* детали при этой температуре.

Под влиянием высокой температуры свойства металлов значительно изменяются, так что знание характеристик прочности и пластичности металла при нормальной (комнатной) температуре является уже далеко недостаточным для расчета детали из этого металла, работающей при повышенной температуре.

С повышением температуры модуль упругости E и предел пропорциональности $\sigma_п$ металла снижаются сначала постепенно, а затем, начиная с некоторых температур (например, для углеродистых сталей с 300—350°, для легированных сталей с 350—400°, для цветных металлов с 50—150°), все более резко. Так, значение E для стали при температуре 600° примерно на 30%, а при температуре 800° — примерно на 50% ниже, чем при комнатной температуре. Понижение E и $\sigma_п$ у цветных

металлов носит еще более резко выраженный характер. Предел текучести $\sigma_т$ и предел прочности $\sigma_в/(\sigma_{пч})$ углеродистой стали при повышении температуры обычно сначала несколько повышаются и при температуре 200°—250° достигают своих наибольших значений, примерно на 10—20% превышающих значения $\sigma_т$ и $\sigma_в$ при комнатной температуре. При дальнейшем повышении температуры значения $\sigma_т$ и $\sigma_в$ сильно уменьшаются. Так, например, для углеродистой стали при 600° величина $\sigma_в$ составляет только около 40% от его величины при комнатной температуре. У цветных металлов и их сплавов значения $\sigma_т$ и $\sigma_в$ с повышением температуры непрерывно понижаются. Изменение предела выносливости при повышении температуры более или менее соответствует изменению предела прочности металла.

Пластические свойства стали (полное относительное удлинение δ и сужение ψ при разрыве) с повышением температуры от 20 до 200—250° несколько снижаются; при дальнейшем повышении температуры пластичность стали, как правило, снова возрастает. У аустенитных хромоникелевых сталей, меди, латуни и никеля пластичность с повышением температуры непрерывно понижается, у алюминия и магния, наоборот, повышается.

Величина коэффициента поперечной деформации у стали с повышением температуры обычно несколько увеличивается.

В качестве примера на рис. 461 приведены кривые изменения характеристик прочности и пластичности углеродистой стали (0,15% C) с повышением температуры до 800°.

§ 193. Явление ползучести и релаксации

Описанное выше изменение характеристик прочности и пластичности металлов с повышением температуры имеет весьма важное значение при расчетах на прочность деталей машин и сооружений. Однако наиболее существенным в поведении металлов при высоких температурах оказывается явление так называемой ползучести или крипа.

Ползучестью называется непрерывно (хотя и сравнительно медленно) растущая во времени деформация материала, происходящая под действием постоянных по величине усилий (или напряжений) при повышенной температуре. У ряда металлов (свинец, латунь, бронза, алюминий и некоторые другие цветные металлы и сплавы) ползучесть может иметь место даже при комнатной температуре.

Чем выше температура, тем быстрее нарастает деформация ползучести. Иногда напряжения, меньшие не только предела прочности, но даже и предела пропорциональности материала при комнатной температуре, могут при высокой температуре привести к разрушению детали в результате постепенного нарастания деформации в течение достаточно большого промежутка времени.

Таким образом, например, стальная труба, являющаяся паропроводом и работающая при высоком давлении и температуре пара, будет непрерывно увеличивать свой диаметр; в конце концов может произойти разрыв стенок трубы (такие случаи иногда имели место на практике). В результате ползучести диска и лопаток паровой турбины могут быть перекрыты зазоры, имеющиеся между концами лопаток и корпусом турбины, что вызовет поломку лопаток.

Деформация ползучести у металлов представляет собой необратимую (пластическую) деформацию материала и может быть рассматриваема как медленная текучесть металла. В результате развития пластических деформаций за счет ползучести в ряде случаев (особенно при сложном напряженном состоянии) происходит изменение величины напряжений и даже перераспределение их по объему детали. Изменение величины напряжений будет особенно значительным тогда, когда вследствие тех или иных особенностей работы детали полная деформация ее с течением времени не сможет изменяться. В этом случае упругая деформация детали, полученная ею при нагружении, с течением времени будет уменьшаться; за счет этого возникнет и будет постепенно увеличиваться пластическая деформация. Вместе с тем напряжения в детали будут снижаться. Такое уменьшение напряжений в ре-

зультате постепенного нарастания пластической деформации за счет упругой носит название *релаксации напряжений*.

Благодаря релаксации напряжений плотность соединения деталей, скрепленных при помощи упругого натяга, постепенно может быть настолько ослаблена, что вызовет нарушение нормальной работы конструкции. Так, например, ослабление плотности болтового соединения фланцев газопровода или цилиндра высокого давления паровой турбины может в конце концов привести к утечке газа или пара, если периодически не возобновлять затяжку болтов соединения; ослабление плотности насадки диска турбины на вал может привести к нарушению связи между диском и валом, к так называемому «сходу» диска.

Как уже было сказано, у некоторых цветных металлов и сплавов явление ползучести может иметь место даже и при комнатной температуре. Однако у стали, чугуна и ряда цветных металлов и сплавов ползучесть может возникнуть лишь при нагреве их выше некоторой, определенной для каждого металла, температуры (углеродистые стали и чугун — выше $300 \div 350°$, легированные стали — выше $350 \div 400°$, легкие сплавы — выше $50 \div 150°$ и т. п.). При температурах ниже указанных явление ползучести у этих металлов не наблюдается. Вместе с тем при температуре, равной или превышающей ту, при которой в данном металле возможно явление ползучести, ползучесть возникает лишь при напряжениях выше некоторой, определенной для каждого металла, величины. Явление релаксации напряжений наблюдается примерно при тех же температурах и напряжениях, что и явление ползучести.

Явление ползучести особенно резко выражено у металлов. Однако оно имеет место и у ряда других материалов. Так, например, ползучесть при комнатной температуре наблюдается у различных пластмасс (целлулоид, бакелит, винипласт и др.), в бетоне и цементном растворе. В железобетонных конструкциях ползучесть бетона влечет за собой с течением времени перераспределение напряжений между бетоном и арматурой; последняя несколько перегружается, а бетон начинает испытывать меньшие напряжения. Однако на грузоподъемности железобетонных сооружений ползучесть бетона и вызванное ею перераспределение напряжений почти не отражается. Пластическое течение при комнатной температуре имеет место также и у дерева при сжатии и, в особенности, при изгибе.

Опытные исследования явления ползучести начались сравнительно недавно (1910 г.). Более или менее широкое распространение эти исследования получили только с начала 20-х годов текущего столетия, когда были опубликованы результаты первых значительных экспериментальных работ.

Проведение испытаний на ползучесть даже при простом растяжении представляет большие трудности. Такие испытания требуют применения специальной аппаратуры для поддержания постоянной величины нагрузки и температуры и для измерения деформаций образца. Для получения достаточно надежных результатов испытания на ползучесть приходится проводить с особенной тщательностью, продолжительность этих испытаний не должна очень сильно отличаться от срока службы детали из испытуемого материала и, таким образом, должна измеряться десятками тысяч часов. Всё это делает испытания на ползучесть сложными, трудоемкими и дорогостоящими. Поэтому даже при линейном напряженном состоянии явление ползучести экспериментально изучено еще далеко недостаточно.

Опыты на ползучесть при сложном напряженном состоянии еще более сложны и трудоемки. Большинство таких опытов было проделано на тонкостенных трубках, подвергнутых действию комбинации нагрузок: внутреннего давления, крутящего момента и растягивающего усилия. Однако подобные испытания пока еще выполнены в очень небольшом количестве.

Попытки многих исследователей разработать те или иные методы ускоренных испытаний на ползучесть до сих пор не увенчались успехом. Это объясняется тем, что надлежащая продолжительность испытания является необходимым и наиболее существенным условием получения достаточно надежных результатов, на которых могли бы основываться расчеты деталей машин на ползучесть. Результаты же ускоренных испытаний могут пока служить лишь для приближенной качественной оценки поведения металлов при высоких температурах.

§ 194. Кривые ползучести и релаксации

А. Выше уже было отмечено, что опытное изучение явления ползучести, на результатах которого основываются расчеты деталей машин и сооружений, работающих при высоких температурах, производится преимущественно на образцах из испытуемого материала, подвергнутых простому растяжению. При этом в течение всего срока испытания обеспечивается как неизменяемость температуры, так и постоянство величины растягивающей образец нагрузки.

При таких испытаниях через некоторые определенные промежутки времени измеряется удлинение образца; по данным измерений в координатах—относительная деформация ε и время t — строится диаграмма испытания — так называемая *кривая ползучести материала*. Вид кривой ползучести зависит как от рода материала, так и от величины напряжения и температуры. Одна из характерных кривых ползучести для металла схематически изображена на рис. 462 (кривая $OABCD$).

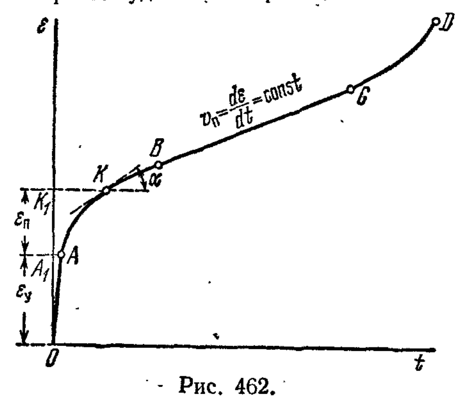


Рис. 462.

При нагружении образца, нагретого до определенной температуры T, деформации его вначале возрастает довольно быстро (в зависимости от скорости нагружения) от нуля до некоторой величины OA_1 (предполагается, что процесс нагружения заканчивается в точке A диаграммы).

Вслед за этим деформация полностью нагруженного образца постепенно увеличивается во времени, материал образца «ползет». Нарастание деформации ползучести характеризуется кривой $ABCD$; ординаты точек этой кривой (например, ордината точки K) представляют сумму величин относительной упругой деформации $ε_у=\overline{OA_1}$ и относительной деформации ползучести $ε_п=\overline{A_1K_1}$, т. е.

$$ε=ε_у+ε_п.$$

Скорость деформации ползучести в любой точке кривой определяется величиной тангенса угла наклона касательной к кривой в этой точке к оси абсцисс, т. е.

$$v_п=\frac{dε}{dt}=\operatorname{tg}α.$$

Весь процесс ползучести может быть разбит на три последовательные стадии. В первой стадии, отвечающей участку AB кривой ползучести, деформация протекает с неравномерной, все время уменьшающейся скоростью; это — так называемая стадия *неравномерной или неустановившейся ползучести*. Длительность первой стадии ползучести, в зависимости от рода материала и от величины температуры и напряжения, меняется от нескольких десятков до нескольких сотен и даже (в исключительных случаях) тысяч часов.

Наиболее существенное влияние на характер протекания процесса ползучести в этой и последующей стадиях ползучести оказывают два основных фактора: 1) упрочнение материала в результате наклепа, связанного с увеличением остаточной (пластической) деформации, и 2) *устранение этого наклепа* или понижение несущей способности материала под действием высокой температуры. Явление ползучести можно рассматривать как взаимодействие этих двух факторов, создающих в основном картину «чистой» ползучести. Эта картина, особенно на последующих стадиях, может быть осложнена влиянием различных внутренних (например,

структурные изменения и фазовые превращения в металле) и внешних причин (например, коррозия).

Когда влияние упрочнения от наклепа уравновешивается ослабляющим материал влиянием длительного действия высокой температуры, уменьшение скорости ползучести прекращается, наступает вторая стадия ползучести (участок BC кривой) — стадия *равномерной или установившейся ползучести*, на которой деформация ползучести протекает с постоянной и притом минимальной скоростью.

Эта скорость остается постоянной до тех пор, пока на образце не начинает образовываться шейка (точка C кривой). Если во время испытания не меняется величина нагрузки, то местное сужение площади поперечного сечения образца в

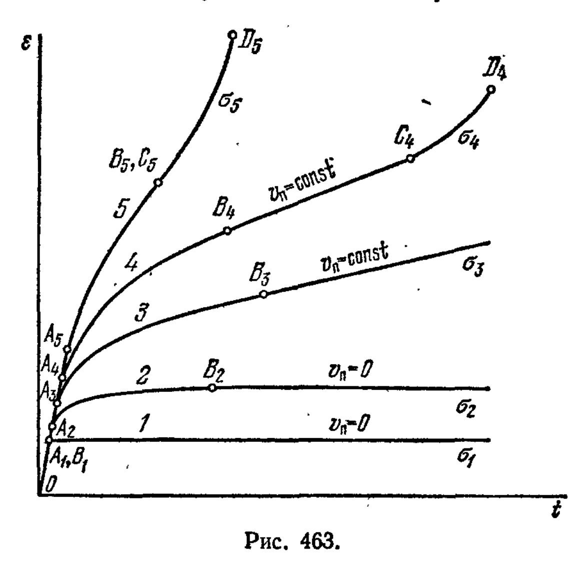


Рис. 463.

третьей стадии ползучести (участок CD кривой) сопровождается увеличением напряжения, которое в свою очередь вызывает увеличение скорости ползучести. Вследствие этого образец в конце концов разрушается (точка D кривой).

При изменении температуры или величины напряжения вид кривой ползучести может значительно изменяться. На рис. 463 схематически изображены кривые ползучести при одной и той же постоянной температуре T, но при различных постоянных напряжениях σ_i (причем $\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3<\sigma_4<\sigma_5$). Подобный же вид имеют кривые ползучести при одинаковом постоянном напряжении σ, но при разных постоянных температурах T_i, если $T_1<T_2<T_3<T_4<T_5$.

При относительно небольшом напряжении ($\sigma=\sigma_1$), или сравнительно невысокой температуре, деформация ползучести может вообще не иметь места, т. е. после нагружения образца диаграмма ε—t будет представлять собой прямую линию, проведённую из точки A_1 параллельно оси абсцисс. При несколько более высоком напряжении ($\sigma=\sigma_2$) или температуре после сравнительно короткой стадии неустановившейся ползучести скорость ползучести может уменьшиться до нуля, т. е. дальнейшее увеличение деформации образца прекратится. При еще более высоком напряжении ($\sigma=\sigma_3$) или температуре может случиться, что скорость установившейся ползучести хотя и не будет равна нулю, но окажется настолько малой, что приведет к разрушению материала через очень большой промежуток времени, значительно превышающий срок службы детали из этого материала.

При напряжении $\sigma=\sigma_4$ получаем кривую ползучести, изображенную на рис. 462. При дальнейшем увеличении напряжения или температуры вид кривых ползучести еще более изменяется; деформация ползучести протекает все быстрее, прямолинейный участок — стадия установившейся ползучести — становится все короче и, наконец, превращается в точку (кривая *5* на рис. 463), т. е. стадия неустановившейся ползучести непосредственно переходит в стадию разрушения. В этом случае участок установившейся ползучести существует в виде точки перегиба кривой $ABCD$ — точки B_5, совпадающей с точкой C_5.

Характер разрушения материала прн ползучести в основном зависит от свойств материала при данной температуре. Углеродистая сталь при температурах не выше 550°, медь, свинец и некоторые легкие сплавы обычно разрушаются вязко, с образованием больших пластических деформаций и шейки. Разрушение специальных жаропрочных сталей, хорошо сопротивляющихся ползучести, сопровождается сравнительно небольшими деформациями и носит хрупкий характер, начинаясь обычно в местах концентрации напряжений.

Рис. 464.

Б. Как уже было сказано, релаксацией называется постепенное снижение напряжений в нагруженной детали, полная деформация которой не может изменяться во времени и равна полученной при нагружении упругой деформации. При этом снижение напряжений происходит вследствие постепенного уменьшения упругой деформации и приращения на ту же величину пластической деформации по схеме

$$\varepsilon=\varepsilon_{\text{у}}+\varepsilon_{\text{п}}=\text{const}=\varepsilon_{\text{у}}^{0}. \qquad (32.1)$$

Кривая релаксации схематически изображеиа на рис. 464. Процесс релаксации можно разделить на две стадии: первую (участок AB кривой релаксации), в течение которой снижение напряжения в детали происходит весьма быстро с резко уменьшающейся скоростью релаксации, и вторую (участок BC кривой), в течение которой сниженне напряжения происходит значительно медленнее с постепенно убывающей скоростью релаксации.

Длительность первой стадии релаксации в зависимости от рода материала, а также величины температуры и иачального напряжения меняется от нескольких десятков до нескольких сотен часов. Физическая сторона явлеиия релаксации иа первой и второй ее стадиях освещена еще недостаточно. Имеется еще очень мало тщательно поставленных опытов с релаксацией напряжений, которые позволяли бы провести сопоставление полученных при этом результатов с данными опытов на ползучесть. В большинстве машин, применявшихся до сих пор при испытаниях иа релаксацию, оказалось невозможным получить явление релаксации в чистом виде.

Обычно принимают, что иарастание пластической деформации в процессе релаксации подобно нарастанию ее при ползучести и что поэтому скорость релаксации можно вычислять по скорости ползучести. Исходя из этого предположения, казалось бы, не следовало заниматься специальным изучением явления релаксации. Однако существует и мнение, что скорость релаксации нельзя принимать за скорость ползучести, так как эти два процесса по существу не вполне тождественны, механизм возникновения и нарастания пластической деформации при релаксации несколько иной, чем при ползучести.

При релаксации уменьшение напряжений в детали вызывается нарастанием пластической деформации за счет упругой деформации при неизмеиной длине детали, а при ползучести нарастание пластической деформации происходит исклю-

чительно за счет удлинения детали. При этом общая деформация при ползучести значительно больше, чем при релаксации; величина же деформации при высоких температурах может оказать существенное влияние на протекание ползучести, вызывая рекристаллизационные, диффузионные и другие процессы, отражающиеся на сопротивлении материала пластической деформации.

В. При изучении явления ползучести весьма важной задачей является установление функциональной зависимости между основными величинами, характеризующими кривые ползучести: напряжением (σ), температурой (T), временем (t) и деформацией ползучести (ε или $\varepsilon_п$), или ее скоростью $\left(\frac{d\varepsilon_п}{dt}=v_п\right)$.

Различными исследователями был предложен целый ряд формул, связывающих указанные величины. Бо́льшая часть этих формул получена чисто эмпирическим путем и только некоторые из них построены, кроме того, еще и на приближенных физических представлениях о протекании процесса ползучести. Поэтому ни одна из этих формул не отвечает достаточно хорошо опытным данным на широком диапазоне изменения напряжений, температур и времени. Большей частью расчеты по этим формулам удовлетворительно совпадают с опытными данными только на отдельных участках кривой ползучести — главным образом, на участке установившейся ползучести.

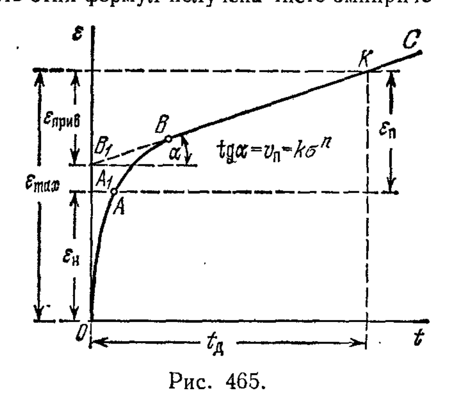


Рис. 465.

Так как опытное исследование стадии неустановившейся ползучести представляет значительно бо́льшие трудности, чем исследование стадии установившейся ползучести, то этот участок кривой ползучести изучен еще недостаточно. В связи с этим при расчетах на ползучесть участком неустановившейся ползучести нередко пренебрегают, продолжая прямую BC (рис. 465) до пересечения ее с осью ординат в точке B_1 и определяя величину полной деформации при ползучести, например, ε_K, по приближенной формуле

$$\varepsilon_K=\varepsilon_0+\varepsilon_п\approx\varepsilon_н+\varepsilon_п=\varepsilon_н+t_д\operatorname{tg}\alpha=\varepsilon_н+t_дv_п. \qquad (32.2)$$

Значительно лучше экспериментально изучена стадия установившейся ползучести. Из различных зависимостей для скорости ползучести, предложенных разными исследователями, наиболее проверенными экспериментально являются следующие:

$$\left.\begin{aligned} &1)\quad v_п=k\sigma^n \\ \text{и}\qquad &2)\quad v_п=a\operatorname{sh}\frac{\sigma}{b}. \end{aligned}\right\} \qquad (32.3)$$

В этих формулах k, n, a и b — некоторые коэффициенты, зависящие от свойств материала и температуры испытания. Вторая зависимость лучше совпадает с данными эксперимента, чем первая, зато использование ее при расчетах приводит к значительному усложнению вычислений. Вместе с тем данных о коэффициентах k и n в первой формуле получено значительно больше, чем данных о коэффициентах a и b во второй формуле. Поэтому в настоящее время при расчетах на ползучесть чаще используют первую формулу.

В качестве примера в таблице 23 приводятся данные о величине коэффициентов, входящих в первую формулу, для некоторых сталей, испытанных на ползучесть при различных напряжениях и температурах.

Таблица 23

Коэффициенты к формуле (32.3)

№ п/п	Сорт стали	Химический состав в %%								Термическая обработка	Температура $T°$	Диапазон напряжений в $кГ/см^2$	Значения коэффициентов к формуле (32.3)	
		C	Mn	Si	Mo	Cr	Ni	W	Nb				n	$k\left(\frac{см^2}{кГ}\right)^n \frac{1}{час}$
1	Углеродистая	0,15	0,50	0,23	—	—	—	—	—	Отжиг 844°	427 538 593 649	1410÷2110 280÷560 110÷250 30÷90	6,35 3,05 3,10 2,85	$0{,}17\cdot10^{-20}$ $0{,}12\cdot10^{-13}$ $0{,}26\cdot10^{-12}$ $0{,}16\cdot10^{-10}$
2	Углеродистая	0,43	0,68	0,20	—	—	—	—	—	Отжиг 844°	427 538 649	1060÷1690 210÷630 30÷180	6,0 3,9 1,7	$0{,}2\cdot10^{-24}$ $0{,}14\cdot10^{-15}$ $0{,}12\cdot10^{-9}$
3	Молибденовая	0,13	0,49	0,25	0,52	—	—	—	—	Отжиг 844°	482 538 593 649	910÷1410 560÷1060 210÷420 60÷120	5,40 4,60 3,55 3,10	$1{,}2\cdot10^{-28}$ $0{,}6\cdot10^{-19}$ $0{,}23\cdot10^{-14}$ $0{,}2\cdot10^{-12}$
4	Хромомолибденовая	0,11	0,45	0,42	0,50	2,08	—	—	—	Отжиг 844°	482 538 593 649	970÷1410 460÷840 280÷560 140÷280	8,35 4,95 6,90 3,25	$0{,}58\cdot10^{-30}$ $0{,}14\cdot10^{-19}$ $0{,}10\cdot10^{-23}$ $0{,}17\cdot10^{-13}$
5	Хромомолибденовая	0,48	0,49	0,62	0,52	1,20	—	—	—	Отжиг 844°	427 538 649	1410÷2110 320÷1060 70÷250	6,35 3,55 2,95	$0{,}145\cdot10^{-26}$ $0{,}175\cdot10^{-15}$ $0{,}365\cdot10^{-13}$
6	Хромоникелевая (18—8)	0,06	0,50	0,61	—	17,75	9,25	—	—	Закалка 1093°	538 593 649 816	880÷1340 560÷1060 350÷840 110÷280	4,4 4,3 5,1 4,7	$0{,}21\cdot10^{-19}$ $0{,}17\cdot10^{-18}$ $0{,}14\cdot10^{-19}$ $0{,}21\cdot10^{-16}$
7	Сталь-69	0,52	—	0,82	0,57	13,51	15,2	2,01	—	Закалка 1175°	600 650	800÷2200 400÷1500	3,15 2,9	$0{,}65\cdot10^{-16}$ $0{,}29\cdot10^{-14}$
8	Сталь Nb	0,19	—	0,72	0,69	1,71	0,87	—	0,77	Нормализац. 850°	500 600	1500÷2500 200÷500	4,3 3,1	$0{,}41\cdot10^{-20}$ $0{,}59\cdot10^{-14}$

§ 195. Основы расчетов на ползучесть

А. Наиболее приемлемым режимом работы детали при повышенной температуре должен был бы, очевидно, считаться режим, отвечающий первой или второй кривой ползучести на рис. 463, когда деформация ползучести или вовсе не возникает или вскоре после нагружения детали прекращается. Однако соответствующие напряжения σ_1, равные пределу ползучести материала, и σ_2 обычно оказываются настолько малыми, что использование их в качестве верхнего предела напряжений привело бы на практике к неоправданному увеличению размеров машиностроительных деталей. Поэтому в машиностроении обычно допускается появление в деталях сравнительно небольших деформаций ползучести (третья кривая на рис. 463). При этом, однако, требуется, чтобы полная деформация детали ε_{max}, равная сумме деформации при нагружении $\varepsilon_н$ и деформации ползучести $\varepsilon_п$ (см. рис. 465), в течение срока службы детали $t_д$ не превосходили некоторой наперед заданной допускаемой величины $[\varepsilon]$, зависящей от назначения детали, условий ее работы и т. п. Так, например, допускаемая величина относительной деформации $[\varepsilon]$ для трубок пароперегревателей принимается равной 0,02, для паропроводов — 0,003, для цилиндров паровых турбин — 0,001 и т. п.

Таким образом, при линейном напряженном состоянии расчетное уравнение принимает такой вид:

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_н + \varepsilon_п \leqslant [\varepsilon]. \qquad (32.4)$$

Из рис. 465 следует, что

$$\varepsilon_н + \varepsilon_п \approx \varepsilon_н + \varepsilon_{прив}, \qquad (32.5)$$

где

$$\varepsilon_{прив} = t_д \operatorname{tg} \alpha = t_д v_п = t_д k \sigma^n \qquad (32.6)$$

— деформация равномерной (установившейся) ползучести за время службы детали $t_д$. Используя формулы (32.5) и (32.6), можно уравнение (32.4) переписать так:

$$\varepsilon_н + t_д k \sigma^n \leqslant [\varepsilon], \qquad (32.7)$$

откуда

$$\sigma \leqslant \left\{\frac{[\varepsilon] - \varepsilon_н}{k t_д}\right\}^{\frac{1}{n}}. \qquad (32.8)$$

Величину напряжения

$$\sigma = \left\{\frac{[\varepsilon] - \varepsilon_н}{k t_д}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

иногда называют *условным пределом ползучести по допускаемой суммарной деформации ползучести* $\sigma_{св}$. Таким образом, расчетное уравнение по допускаемой деформации ползучести получает такой вид:

$$\sigma \leqslant \sigma_{св} = \left\{\frac{[\varepsilon] - \varepsilon_н}{k t_д}\right\}^{\frac{1}{n}}. \qquad (32.9)$$

Если же упругая деформация детали и ее деформация в стадии неустановившейся ползучести пренебрежимо малы по сравнению с деформацией в стадии установившейся ползучести, то при расчетах на ползучесть можно исходить из наибольшей допускаемой величины установившейся (минимальной) скорости ползучести. Допускаемая величина скорости ползучести, очевидно, должна быть определена опять-таки из условия, чтобы деформация ползучести, нарастающая с этой постоянной скоростью, не превзошла в течение срока службы детали некоторой допускаемой величины деформации, при которой не происходит нарушения нормальной работы конструкции. Соответствующее наибольшее напряжение в материале, не вызывающее при данной температуре скорости ползучести, превышающей

допускаемую, может быть рассматриваемо как допускаемое напряжение. Нередко это напряжение называют *условным пределом ползучести материала по допускаемой минимальной или равномерной скорости деформации* (σ_{cv}). Величина σ_{cv}, очевидно, является функцией температуры и допускаемой минимальной скорости ползучести.

В качестве примера в таблице 24 приведены ориентировочные данные о допускаемых величинах минимальной относительной скорости ползучести $[v_п]$ для некоторых деталей паровых котлов и турбин.

Таблица 24

Скорость ползучести

Детали	$[v_п]$ в *час*
1. Турбинные диски с тугой посадкой на вал	10^{-9}
2. Болты, фланцы, цилиндры паровых турбин	10^{-8}
3. Паропроводы, сварные швы котельных труб	10^{-7}
4. Трубы пароперегревателей	$10^{-6} \div 10^{-5}$

При расчетах на ползучесть по минимальной скорости ползучести исходное расчетное уравнение при линейном напряженном состоянии материала может быть написано в следующем виде:

$$v_п = k\sigma^n \leqslant [v_п] \approx \frac{[\varepsilon]}{t_д}, \qquad (32.10)$$

так как $\varepsilon = v_п t_д$.

Из (32.10) следует, что

$$[\sigma] = \sigma_{cv} = \left\{\frac{[v_п]}{k}\right\}^{\frac{1}{n}}. \qquad (32.11)$$

Условие прочности в напряжениях напишется так:

$$\sigma \leqslant [\sigma] = \left\{\frac{[v_п]}{k}\right\}^{\frac{1}{n}}. \qquad (32.12)$$

Б. Само собой разумеется, что при расчетах на ползучесть по величине допускаемой деформации или ее скорости необходимо соблюдение условия, чтобы при данной температуре за время срока службы детали деформация ползучести не только не привела к разрушению материала, но и был обеспечен некоторый запас прочности против возможности такого разрушения. Таким образом, точки K_1, K_2 и K_3 (рис. 466) на различных кривых ползучести *1*, *2* и *3*, отвечающие абсциссам $t_{д1}$, $t_{д2}$ и $t_{д3}$ и ординатам $[\varepsilon]_1$, $[\varepsilon]_2$ и $[\varepsilon]_3$, обязательно должны находиться на участках первой или второй стадии ползучести.

Это обстоятельство должно быть проверено расчетом и поэтому требует специального исследования. Расчеты по величине допускаемой деформации ползучести или ее скорости, как уже было показано, могут быть заменены расчетами по соответствующим допускаемым напряжениям — пределам ползучести $\sigma_{c\varepsilon}$ или σ_{cv}. При этом необходимо убедиться, что величина σ_c ($\sigma_{c\varepsilon}$ или σ_{cv}) не превосходит величины допускаемого напряжения, представляющего некоторую долю предела прочности материала при данной температуре.

Известно, что предел прочности материала при высоких температурах очень сильно зависит от продолжительности испытания; сравнительно небольшое увеличение длительности испытания вызывает значительное уменьшение предела

прочности. При некоторых температурах (например, для малоуглеродистой стали при температурах выше 800°) испытуемый образец может быть разрушен нагрузкой, вызывающей напряжение ниже предела пропорциональности материала при комнатной температуре, если эта нагрузка будет действовать достаточно продолжительное время. Поэтому прочность металлов при высоких температурах в настоящее время характеризуют не величиной обычного предела прочности, определяемого путем кратковременных испытаний, а величиной так называемого *предела длительной прочности* ($\sigma_{вt}$). Этим термином обозначают такое напряжение при данной постоянной температуре, при действии которого в течение заданного промежутка времени в конце этого промежутка произойдет разрушение материала. В качестве примера на рис. 467 приведены графики изменения величины

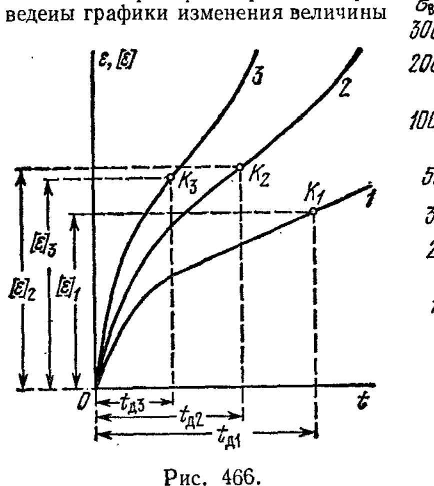


Рис. 466.

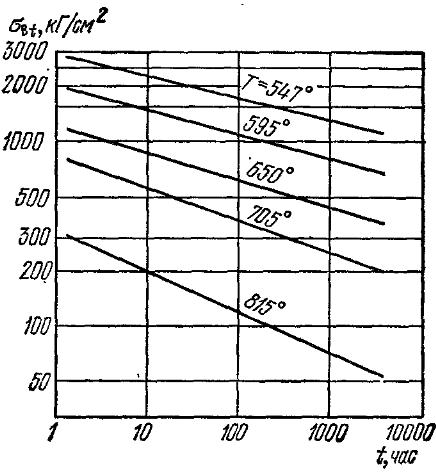


Рис. 467.

предела длительной прочности хромомолибденовой стали (0,1% C; 1,55% Si; 4,88% Cr; 0,51% Mo) в зависимости от времени при различных температурах.

Иногда высказывается мнение о том, что неравномерность распределения напряжений в местах их концентрации при ползучести сглаживается и что при расчетах на ползучесть можно поэтому концентрацию напряжений не учитывать. Следует заметить, что детали машин, работающие при высоких температурах, как правило, изготовляются из специальных жаропрочных сталей, обладающих сравнительно малой ползучестью; разрушение деталей из таких сталей наступает обычно при небольших деформациях и носит хрупкий характер. Поэтому в большинстве практически встречающихся случаев выравнивание местных напряжений не успевает произойти и, таким образом, при расчетах на ползучесть концентрацию напряжений необходимо принимать во внимание.

В связи с этим и при определении предела длительной прочности жаропрочных сталей возможная концентрация напряжений должна быть учтена, т. е. испытания по определению $\sigma_{вt}$ должны вестись на образцах соответствующей формы.

Для тех случаев, когда детали машин находятся в условиях совместного действия двух факторов — усталости и ползучести, предел длительной прочности должен определяться из испытаний на усталость при соответствующей температуре. Поэтому, при расчетах на прочность деталей машин и сооружений, работающих при высоких температурах, нужно различать следующие основные случаи.

При температурах, не вызывающих в материале явления ползучести (см. § 193), опасное состояние определяется пределом текучести или пределом прочности материала при данной температуре, полученными путем обычных кратковре-

менных испытаний. В этом случае условие прочиости может быть написано так:

$$\sigma \leqslant [\sigma] = \frac{\sigma_в}{k}. \qquad (32.13)$$

Если при данной температуре ползучесть возможна (см. § 193), то необходимо прежде всего установить, какое из допускаемых напряжений при заданном сроке службы детали $t_д$ является бóльшим — допускаемое напряжение по суммарной деформации ползучести ($\sigma_{c\varepsilon}$) или по минимальной ее скорости (σ_{cv}), или допускаемое напряжение, вычисленное по пределу длительной прочности $[\sigma_{вt}] = \sigma_{вt}/k_t$, где k_t — коэффициент запаса длительной прочности, который можно принимать приблизительно равным обычному коэффициенту запаса прочности k (рис. 468).

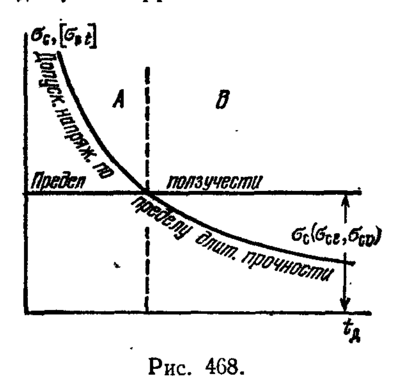


Рис. 468.

Если $[\sigma] = \sigma_c$ ($\sigma_{c\varepsilon}$, σ_{cv}) $< [\sigma_{вt}]$ — область A на рис. 468, то расчет на ползучесть должен производиться по формулам (32.4), (32.9), (32.10) или (32.12). Если же $[\sigma] = \sigma_c > [\sigma_{вt}]$ — область B на рис. 468, то расчет на ползучесть должен, очевидно, производиться по формуле

$$\sigma \leqslant [\sigma_{вt}] = \frac{\sigma_{вt}}{k_t}. \qquad (32.14)$$

В тех случаях, когда имеет место явление релаксации напряжений, обычно должно быть обращено внимание на то, чтобы не произошло недопустимо большое ослабление соединения деталей, скрепленных с помощью упругого натяга; снизившееся благодаря релаксации напряжение σ_t не должно быть меньше некоторой определенной минимальной величины напряжения, обеспечивающего надлежащую плотность соединения

$$\sigma_t \geqslant \sigma_{min}.$$

Исходя из этого условия, могут быть установлены сроки, по истечении которых необходимо специальными мерами восстанавливать плотность соединения,— например, подтягивать болты фланцев паро- или газопровода.

В заключение отметим, что в этом параграфе была рассмотрена методика расчетов на ползучесть в наиболее простых случаях (линейное напряженное состояние), являющаяся основой для построения более сложных расчетов. Методика расчетов на ползучесть при сложном напряженном состоянии рассматривается в специальных монографиях [1]).

§ 196. Примеры расчетов на ползучесть

Пример 1. Определить, как часто для предотвращения утечки пара нужно возобновлять затяжку болтов фланцевого соединения паропровода, если начальное упругое натяжение каждого болта, равное $P = 3000$ *кГ*, не должно снижаться более чем на 40%. Температура, при которой работают болты, $T = 425°$. Площадь поперечного сечения болта $F = 3$ *см*²; материал болтов — углеродистая сталь с модулем упругости $E_T = 1{,}77 \cdot 10^6$ *кГ/см*² (при $T = 425°$), для которой скорость установившейся ползучести может быть определена по формуле $v_н = k\sigma^n$ причем при

$$T = 425° \quad k = 2{,}26 \cdot 10^{-25} \ см^{2n}/кГ^n \ час, \ а \ n = 6.$$

[1]) См., например, Качанов Л. М., Теория ползучести, Физматгиз, 1960; Малинин Н. Н., Прикладная теория пластичности и ползучести, «Машиностроение», 1975.

Задачу решить в предположении, что фланцы паропровода абсолютно несжимаемы; при расчетах стадию неустановившейся ползучести во внимание не принимать.

Решение. Если фланцы паропровода абсолютно несжимаемы, то полная деформация болта, растянутого первоначально (при затяжке) на величину Δl_0, с течением времени не может измениться. При ползучести упругая деформация болта $\Delta l_у$ будет постепенно переходить в пластическую деформацию $\Delta l_п$; за этот счет напряжение в болте будет понижаться. При этом

$$\Delta l_у + \Delta l_п = \Delta l_0 = \text{const},$$

или

$$\varepsilon_у + \varepsilon_п = \frac{\sigma}{E_T} + \varepsilon_п = \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_T},$$

где σ_0 — первоначальное упругое напряжение в болте; σ — напряжение в нем в момент времени t и E_T — модуль упругости материала при данной температуре T. Дифференцируя это уравнение по t, имеем

$$\frac{1}{E_T}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\varepsilon_п}{dt} = \frac{1}{E_T}\frac{d\sigma}{dt} + v_п = \frac{1}{E_T}\frac{d\sigma_0}{dt} = 0.$$

Пренебрегая стадией неустановившейся ползучести и заменяя $v_п$ на $k\sigma^n$, получаем такое дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\sigma}{dt} + E_T \cdot k\sigma^n = 0$$

или

$$\frac{d\sigma}{\sigma^n} = -E_T k\, dt.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\frac{1}{(n-1)\,\sigma^{n-1}} = E_T kt + C, \tag{a}$$

где C — постоянная интегрирования. Так как при $t=0$ $\sigma=\sigma_0$, то

$$C = \frac{1}{(n-1)\,\sigma_0^{n-1}}.$$

Подставляя найденное значение C в уравнение (а), получаем формулу, связывающую σ и t:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\left[1 + (n-1)\,E_T k\sigma_0^{n-1} t\right]^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Используя числовые данные задачи, имеем

$$\sigma = \frac{\frac{3000}{3}}{\left[1 + (6-1)\cdot 1{,}77\cdot 10^{6}\cdot 2{,}26\cdot 10^{-25}\left(\frac{3000}{3}\right)^{6-1}\cdot t\right]^{\frac{1}{6-1}}} = \frac{1000}{(1+2\cdot 10^{-3}\cdot t)^{\frac{1}{5}}},$$

или

$$t = \frac{1}{2}\left(1000 - \frac{10^{18}}{\sigma^5}\right).$$

Подсчитанные по последней формуле значения t, соответствующие различным значениям σ, приведены в таблице 25 (столбец A). Если напряжение в болтах не должно снижаться более чем на 40%, то дополнительную затяжку болтов необходимо производить через каждые 5930 часов, или примерно через 8,5 месяца.

Таблица 25

Значения t

σ, $кГ/см^2$	t, час		σ, $кГ/см^2$	t, час	
	A	B		A	B
1000	0	0	600	5 930	5 000
900	347	335	500	15 500	11 900
800	1 026	960	400	48 300	31 700
700	2 475	2 230			

Приведенное здесь решение задачи о релаксации напряжений в болтах является весьма приближенным. Благодаря податливости фланцев паропровода понижение напряжений в болтах будет происходить значительно быстрее. Решение данной задачи с учетом податливости фланцев оказывается несколько более сложным. Не рассматривая здесь этого решения, ограничимся лишь тем, что приведем его окончательные результаты (см. таблицу 25, столбец B) для того случая, когда упругая деформация фланцев равна $\varepsilon_{уф}=3\cdot 10^{-8}P_t$, а скорость деформации ползучести их равна $v_{пф}=5\cdot 10^{-22}\,P_t^4$ (здесь P_t ($кГ$) — натяжение одного болта в момент времени t).

Таким образом, исходя из результатов более точного решения задачи, дополнительную затяжку болтов необходимо производить не через 5930 часов, а через 5000 часов, или 7 месяцев. Если же при решении задачи учесть и деформацию ползучести в стадии неустановившейся ползучести, то последняя цифра понизится еще более.

Пример 2. Круглый вал диаметром 24 *мм*, работающий при температуре $T=540°$, скручивается постоянным моментом $M=20$ *кГм*. Материал вала — легированная сталь с модулем упругости $G=6\cdot 10^5$ $кГ/см^2$ (при $T=540°$). Скорость установившейся ползучести может быть вычислена по формуле $v_п=k\tau^n$, причем при $T=540°$ $k=2{,}5\cdot 10^{-19}$ $см^{2n}/кГ^n час$ и $n=5$.

Найти распределение касательных напряжений в поперечном сечении вала и его угол закручивания через 1000 часов после нагружения.

Решение. Предположим, что гипотеза плоских сечений при кручении остается справедливой и в условиях ползучести материала (это предположение довольно хорошо согласуется с опытными данными). В таком случае два соседних поперечных сечения вала, расположенных на расстоянии dx друг от друга, оставаясь плоскими, только повернутся одно относительно другого на угол $d\varphi$. Так как радиусы сечений не искривляются, то для относительного сдвига на расстоянии ρ от центра вала можем воспользоваться известной (§ 47) формулой

$$\gamma_\rho=\rho\frac{d\varphi}{dx}.$$

После нагружения вала деформации сдвига, вследствие ползучести материала, начнут постепенно увеличиваться; будет увеличиваться также и относительный угол закручивания $\frac{d\varphi}{dx}$. Полная деформация сдвига представится в виде суммы упругой деформации $\gamma_у$ и деформации ползучести $\gamma_п$, т. е. $\gamma=\gamma_у+\gamma_п$. Скорость

изменения полной относительной деформации сдвига будет равна

$$v=\frac{d\gamma}{dt}=\frac{d\gamma_у}{dt}+\frac{d\gamma_п}{dt}=v_у+v_п=\rho\,\frac{d^2\varphi}{dx\,dt}.$$

Для упрощения решения задачи относительно малой величиной скорости упругой деформации пренебрежем по сравнению с большой величиной скорости деформации ползучести. Более точное решение этой задачи с учетом того, что $v_у\neq 0$, представляет значительные трудности. Пренебрегая, кроме того, стадией неустановившейся ползучести и полагая, что $v_п=k\tau^n$, получим

$$v\approx v_п=k\tau^n=\rho\,\frac{d^2\varphi}{dx\,dt},$$

откуда

$$\tau=\left[\frac{1}{k}\,\frac{d^2\varphi}{dx\,dt}\right]^{\frac{1}{n}}\rho^{\frac{1}{n}}=\Phi\rho^{\frac{1}{n}}, \tag{а}$$

где

$$\Phi=\left[\frac{1}{k}\,\frac{d^2\varphi}{dx\,dt}\right]^{\frac{1}{n}}. \tag{б}$$

Условие равенства друг другу моментов внешних сил и моментов внутренних сил упругости относительно оси вала запишется так:

$$M=M_к=\int\limits_F \tau\cdot\rho\,dF=\int\limits_0^r 2\pi\rho\tau\rho\,d\rho=2\pi\Phi\int\limits_0^r \rho^{2+\frac{1}{n}}\,d\rho,$$

где r — радиус вала.

Обозначая

$$2\pi\int\limits_0^r \rho^{2+\frac{1}{n}}\,d\rho=\frac{2\pi n}{3n+1}\,r^{\frac{3n+1}{n}}=J_{рп},$$

можем написать

$$\Phi=\frac{M_к}{J_{рп}} \tag{в}$$

и, с учетом (а),

$$\tau=\frac{M_к}{J_{рп}}\rho^{\frac{1}{n}}.$$

Таким образом, распределение касательных напряжений по сечению вала при ползучести уже не следует линейному закону.

Подставляя в выражение для $J_{рп}$ значения $r=1{,}2$ *см* и $n=5$, получаем

$$J_{рп}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 5}{3\cdot 5+1}\cdot 1{,}2^{\frac{3\cdot 5+1}{5}}=1{,}964\cdot 1{,}2^{3{,}2}=3{,}52\ см^{3{,}2}.$$

Касательное напряжение на расстоянии ρ от оси вала равно

$$\tau=\frac{M_к}{J_{рп}}\rho^{\frac{1}{n}}=\frac{2000}{3{,}52}\rho^{\frac{1}{5}}=568\rho^{\frac{1}{5}}.$$

Таблица 26

Значения τ

ρ, *мм*	$\tau_{упр}$, *кГ/см²*	$\tau_{полз}$, *кГ/см²*	ρ, *мм*	$\tau_{упр}$, *кГ/см²*	$\tau_{полз}$, *кГ/см²*
12	737	589	4	246	473
10	614	568	2	123	411
8	492	543	0	0	0
6	369	513			

В таблице 26 приведены значения τ, соответствующие различным значениям ρ. В этой же таблице даны и значения τ при упругой деформации вала, вычисленные по формуле

$$\tau=\frac{M_к\cdot\rho}{J_p}=\frac{2M_к\rho}{\pi r^4}=\frac{2\cdot 2000}{3,14\cdot 1,2^4}\rho=614\rho.$$

Благодаря ползучести напряжения по поперечному сечению вала выравниваются; у поверхности вала они несколько снижаются, а у оси его значительно увеличиваются (рис. 469).

Определим угол закручивания вала на единицу длины. На основании (б) и (в) можем написать

$$\frac{d^2\varphi}{dx\,dt}=k\Phi^n=k\left(\frac{M_к}{J_{pп}}\right)^n,\quad \frac{d\varphi}{dx}=k\left(\frac{M_к}{J_{pп}}\right)^n t+C.$$

Так как при

$$t=0\quad \frac{d\varphi}{dx}=\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_у=\frac{M_к}{GJ_p},\quad \text{то}\quad C=\frac{M_к}{GJ_p}\quad \text{и}$$

$$d\varphi=\left[\frac{M_к}{GJ_p}+kt\left(\frac{M_к}{J_{pп}}\right)^n\right]dx.$$

Интегрируя и полагая $x=1$ *см*, получаем

$$\varphi_1=\frac{M_k}{GJ_p}+kt\left(\frac{M_к}{J_{pп}}\right)^n.$$

При данных задачи

$$\varphi_1=\frac{2000\cdot 2}{6\cdot 10^5\cdot 3,14\cdot 1,2^4}+2,5\cdot 10^{-19}\cdot\left(\frac{2000}{3,52}\right)^5\cdot 1000=$$

$$=0,00102+0,01480=0,0158\ \frac{рад}{см}.$$

Замечаем, что угол закручивания вала при ползучести увеличился почти в 16 раз по сравнению с углом закручивания при упругой деформации (первый член последнего результата). Таким образом, значительное снижение наибольшего касательного напряжения в вале отнюдь не свидетельствует о том, что условия работы его при ползучести улучшаются.

Пример 3. Балка прямоугольного сечения 20 *мм*×40 *мм*, имеющая длину 50 *см*, шарнирно-опертая по концам и нагруженная посредине пролета сосре-

доточенной силой $P=400$ *кГ* (рис. 470), работает при температуре $T=500°$. Материал балки — углеродистая сталь с модулем упругости $E=1{,}6\cdot 10^6$ *кГ/см²* (при $T=500°$). Скорость установившейся ползучести $v_п=k\sigma^n$, причем при $T=500°$

$$k=1{,}5\cdot 10^{-15}\left(\frac{см^2}{кГ}\right)^n\cdot\frac{1}{час} \quad \text{и} \quad n=3.$$

Пренебрегая стадией неустановившейся ползучести, найти распределение нормальных напряжений в опасном сечении балки и определить наибольший прогиб ее через 10 000 часов после нагружения.

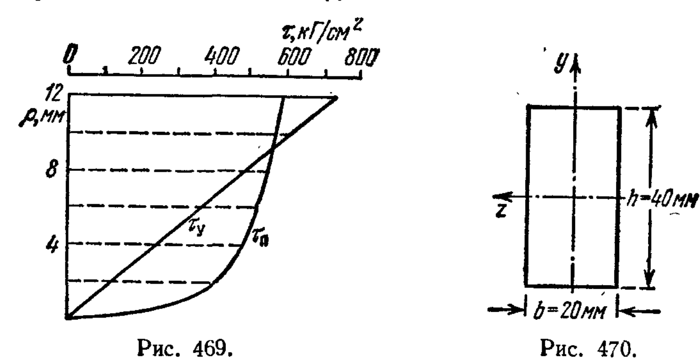


Рис. 469. Рис. 470.

Решение. При решении задачи будем пренебрегать влиянием касательных напряжений и предположим, что гипотеза плоских сечений при изгибе остается справедливой и при ползучести (это предположение довольно хорошо согласуется с опытными данными). Считая, что в растянутой и сжатой зоне балки деформации волокон нарастают по одному и тому же закону, для относительной деформации волокна, расположенного на расстоянии y от нейтрального слоя, можем написать известное выражение (§ 63) $\varepsilon=y/\rho$, где ρ — радиус кривизны нейтрального слоя балки.

После нагружения балки деформации волокон ее вследствие ползучести материала начнут постепенно увеличиваться, кривизна нейтрального слоя также будет увеличиваться. При этом полная деформация какого-либо волокна представится суммой относительной упругой деформации и относительной деформации ползучести, т. е. $\varepsilon=\varepsilon_у+\varepsilon_п$. Скорость изменения полной деформации будет равна

$$v=\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{d\varepsilon_у}{dt}+\frac{d\varepsilon_п}{dt}=v_у+v_п=y\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Так же, как и в предыдущем примере, для упрощения решения пренебрежем скоростью упругой деформации. (Более точное решение этой задачи с учетом того, что $v_у\neq 0$, можно найти в специальных монографиях, см. сноску на стр. 582.)

Пренебрегая, кроме того, стадией неустановившейся ползучести и полагая, что $v_п=k\sigma^n$, получим

$$v\approx v_п=k\sigma^n=y\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

откуда

$$\sigma=\left[\frac{1}{k}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]^{\frac{1}{n}}y^{\frac{1}{n}}=\Phi y^{\frac{1}{n}}, \qquad \text{(a)}$$

где

$$\Phi=\left[\frac{1}{k}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]^{\frac{1}{n}}. \tag{б}$$

Условие равенства друг другу моментов внешних сил и внутренних сил упругости относительно нейтральной оси запишется так:

$$M=\int_F \sigma\cdot y\cdot dF=2\Phi\int_{F_{1/2}} y^{1+\frac{1}{n}}dF.$$

Вводя обозначение

$$2\int_{F_{1/2}} y^{1+\frac{1}{n}}dF=J_{zп},$$

получаем

$$\Phi=\frac{M}{J_{zп}}, \tag{в}$$

и, с учетом (а),

$$\sigma=\frac{M}{J_{zп}}y^{\frac{1}{n}}.$$

Замечаем, что распределение нормальных напряжений по высоте сечения балки при ползучести уже не следует линейному закону.

В случае прямоугольного сечения

$$J_{zп}=2\int_{F_{1/2}} y^{1+\frac{1}{n}}dF=2\int_0^{\frac{h}{2}} y^{1+\frac{1}{n}}b\,dy=\frac{1}{2^{\frac{n+1}{n}}}\frac{n}{2n+1}\cdot b\cdot h^{\frac{2n+1}{n}}.$$

Подставляя в формулы для $J_{zп}$ данные задачи, получаем

$$J_{zп}=\frac{3}{2^{\frac{3+1}{3}}(2\cdot 3+1)}\cdot 2\cdot 4^{\frac{2\cdot 3+1}{3}}=\frac{3\cdot 2\cdot 4^{\frac{7}{3}}}{7\cdot 2^{\frac{4}{3}}}=8{,}64\ см^{\frac{10}{3}}.$$

Наибольший изгибающий момент равен

$$M_{max}=\frac{Pl}{4}=\frac{400\cdot 50}{4}=5000\ кГсм.$$

Нормальные напряжения в балке прямоугольного сечения должны быть вычислены по формуле

$$\sigma=\frac{M}{J_{zп}}y^{\frac{1}{n}}=\frac{5000}{8{,}64}\cdot y^{\frac{1}{3}}=579y^{\frac{1}{3}}.$$

Вычисленные по этой формуле значения нормальных напряжений на различных расстояниях y от нейтрального слоя приведены в таблице 27. Для сравнения в той же таблице помещены данные о распределении нормальных напряжений при упругой деформации.

Таблица 27

y, *мм*	σ, *кГ/см²* Упругая деформация	σ, *кГ/см²* Ползучесть	y, *мм*	σ, *кГ/см²* Упругая деформация	σ, *кГ/см²* Ползучесть
20	938	729	4	188	426
16	750	677	2	94	339
12	563	615	0	0	0
8	375	537			

Благодаря ползучести нормальные напряжения по поперечному сечению балки выравниваются; в наиболее удаленных от нейтрального слоя волокнах они снижаются, а у нейтрального слоя увеличиваются (рис. 471). При этом в балке прямоугольного сечения снижение наибольших напряжений будет заметнее, чем в балке двутаврового сечения, так как у последней вблизи от нейтрального слоя расположено сравнительно немного материала.

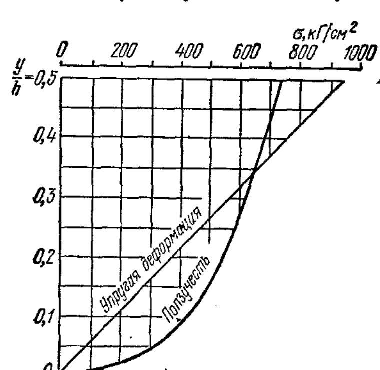


Рис. 471.

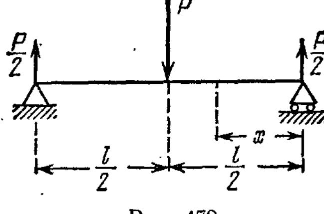


Рис. 472.

Определим прогиб балки. Принимая для кривизны оси балки приближенное выражение $\frac{1}{\rho}=\frac{d^2y}{dx^2}$, можем написать $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)$. Так как по (б) и (в)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)=k\Phi^n=k\frac{M^n}{J_{zп}^n},$$

то

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)=k\frac{M^n}{J_{zп}^n}.$$

В случае балки на двух опорах (рис. 472) $M=\frac{P}{2}x$ и

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)=k\frac{P^nx^n}{J_{zп}^n\cdot 2^n}=Rx^n, \tag{г}$$

где

$$R=\frac{kP^n}{2^nJ_{zп}^n}.$$

Интегрируя уравнение (г) по x, получаем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{R}{n+1}x^{n+1}+C$$

и

$$\frac{dy}{dt}=\frac{R}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}+Cx+D,$$

где C и D — постоянные интегрирования. Так как при любых значениях t $y=0$ при $x=0$ и $\frac{dy}{dx}=0$ при $x=\frac{l}{2}$, то и $\frac{dy}{dt}=0$ при $x=0$ и $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=0$ при $x=\frac{l}{2}$. Поэтому

$$C=-\frac{Rl^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \quad \text{и} \quad D=0.$$

Наибольший прогиб балки будет в сечении, где $x=l/2$; имеем

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{\max}=\frac{-Rl^{n+2}}{2^{n+2}(n+2)}=\frac{-kP^n l^{n+2}}{(n+2)2^{2(n+1)}J_{zп}^n}.$$

Интегрируя по t, находим

$$y_{\max}=-\frac{kP^n l^{n+2}}{(n+2)2^{2(n+1)}J_{zп}^n}t+H,$$

где H — постоянная интегрирования. Так как при $t=0$

$$y_{\max}=(y_{\max})_{упр}=\frac{-Pl^3}{48EJ_z},$$

то

$$H=(y_{\max})_{упр}=-\frac{Pl^3}{48EJ_z}.$$

Таким образом, наибольший прогиб балки при ползучести равен

$$y_{\max}=-\frac{Pl^3}{48EJ_z}-\frac{kP^n l^{n+2}}{(n+2)2^{2(n+1)}J_{zп}^n}t,$$

$$J_z=\frac{bh^3}{12}=\frac{2\cdot 4^3}{12}=10{,}67\ см^4$$

и

$$|y_{\max}|=\frac{400\cdot 50^3}{48\cdot 1{,}6\cdot 10^6\cdot 10{,}67}+$$
$$+\frac{1{,}5\cdot 10^{-15}\cdot 400^3\cdot 50^{3+2}}{8{,}64^3\cdot(3+2)\cdot 2^{2(3+1)}}\cdot 10\,000=0{,}0611+0{,}3634=0{,}425\ см.$$

Наибольшая допускаемая нагрузка на балку при ползучести должна определяться в зависимости от величины допускаемой деформации балки.

Если, например, наибольший прогиб балки прямоугольного сечения через 10 000 часов ее работы не должен превышать 1/500 ее длины, т. е. 0,1 *см*, то наи-

большая допускаемая нагрузка должна быть определена из условия

$$\frac{Pl^3}{48EJ_z}+\frac{kP^n l^{n+2}}{(n+2)\,2^{2(n+1)}J_{zп}^n}\,t\leqslant [f].$$

Подставляя числовые данные, имеем

$$\frac{50^3\cdot P}{48\cdot 10{,}67\cdot 1{,}6\cdot 10^6}+\frac{1{,}5\cdot 10^{-15}\cdot 50^5}{5\cdot 8{,}64^3\cdot 2^8}\cdot 10\,000\cdot P^3\leqslant 0{,}1,$$

или

$$P+0{,}2326P^3\cdot 10^{-5}\leqslant 40{,}96,$$

откуда

$$P\leqslant 40{,}8\ кГ\approx 40\ кГ.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сортамент прокатной стали в соответствии с ГОСТ 8239-72, 8240-72, 8509-72

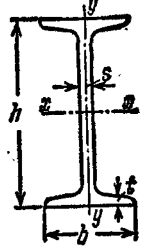


Таблица I

Балки двутавровые

Номер балки	h	b	s	t	Площадь сечения, $см^2$	Масса 1 м, кг
	мм					
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,50
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,70
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,90
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,40
18а	180	100	5,1	8,3	25,4	19,90
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,00
20а	200	110	5,2	8,6	28,9	22,70
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24,00
22а	220	120	5,4	8,9	32,8	25,80
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,30
24а	240	125	5,6	9,8	37,5	29,40
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,50
27а	270	135	6,0	10,2	43,2	33,90
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,50
30а	300	145	6,5	10,7	49,9	39,20
33	330	140	7,0	11,2	53,8	42,20
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,60
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,00
45	450	160	9,0	14,2	84,7	66,50
50	500	170	10,0	15,2	100,0	78,50
55	550	180	11,0	16,5	118,0	92,60
60	600	190	12,0	17,8	138,0	108,00

Справочные величины для осей						
$x-x$				$y-y$		
J_x $см^4$	W_x $см^3$	i_x $см$	S_x $см^3$	J_y $см^4$	W_y $см^3$	i_y $см$
198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12
1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32
2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50
3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

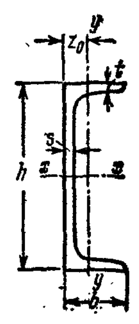


Таблица II

Швеллеры с уклоном внутренних граней полок

Номер швеллера	h	b	s	t	Площадь сечения, $см^2$	Масса 1 м, кг
	мм					
5	50	32	4,4	7,0	6,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	5,90
8	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,90	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,30	10,40
14	140	58	4,9	8,1	15,60	12,30
14a	140	62	4,9	8,7	17,00	13,30
16	160	64	5,0	8,4	18,10	14,20
16a	160	68	5,0	9,0	19,50	15,30
18	180	70	5,1	8,7	20,70	16,30
18a	180	74	5,1	9,3	22,20	17,40
20	200	76	5,2	9,0	23,40	18,40
20a	200	80	5,2	9,7	25,20	19,80
22	220	82	5,4	9,5	26,70	21,00
22a	220	87	5,4	10,2	28,80	22,60
24	240	90	5,6	10,0	30,60	24,00
24a	240	95	5,6	10,7	32,90	25,80
27	270	95	6,0	10,5	35,20	27,70
30	300	100	6,5	11,0	40,50	31,80
33	330	105	7,0	11,7	46,50	36,50
36	360	110	7,5	12,6	53,40	41,90
40	400	115	8,0	13,5	61,50	48,30

Справочные величины для осей							
$x - x$				$y - y$			Z_0 см
J_x см^4	W_x см^3	i_x см	S_x см^3	J_y см^4	W_y см^3	i_y см	
22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,080	1,24
89,4	22,4	3,16	13,30	12,80	4,75	1,190	1,31
174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,370	1,44
304,0	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,530	1,54
491,0	70,2	5,60	40,80	45,40	11,00	1,700	1,67
545,0	77,8	5,66	45,10	57,50	13,30	1,840	1,87
747,0	93,4	6,42	54,10	63,30	13,80	1,870	1,80
823,0	103,0	6,49	59,40	78,80	16,40	2,010	2,00
1090,0	121,0	7,24	69,80	86,00	17,00	2,040	1,94
1190,0	132,0	7,32	76,10	105,00	20,00	2,180	2,13
1520,0	152,0	8,07	87,80	113,00	20,50	2,200	2,07
1670,0	167,0	8,15	95,90	139,00	24,20	2,350	2,28
2110,0	192,0	8,89	110,00	151,00	25,10	2,370	2,21
2330,0	212,0	8,99	121,00	187,00	30,00	2,550	2,46
2900,0	242,0	9,73	139,00	208,00	31,60	2,600	2,42
3180,0	265,0	9,84	151,00	254,00	37,20	2,780	2,67
4160,0	308,0	10,90	178,00	262,00	37,30	2,730	2,47
5810,0	387,0	12,00	224,00	327,00	43,60	2,840	2,52
7980,0	484,0	13,10	281,00	410,00	51,80	2,970	2,59
10820,0	601,0	14,20	350,00	513,00	61,70	3,100	2,68
15220,0	761,0	15,70	444,00	642,00	73,40	3,230	2,75

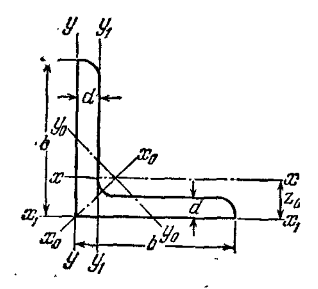


Таблица III

Уголки равнополочные

Номер профиля	b, мм	d, мм	Площадь сечения, $см^2$	J_x, $см^4$ (x—x)	i_x, см (x—x)	$J_{x_0}\max$, $см^4$ (x_0—x_0)	$i_{x_0}\max$, см (x_0—x_0)	$J_{y_0}\min$, $см^4$ (y_0—y_0)	$i_{y_0}\min$, см (y_0—y_0)	J_{x_1}, $см^4$ (x_1—x_1)	z_0, см	Масса 1 м длины профиля, кг
2	20	3	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	0,89
		4	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	1,15
2,5	25	3	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	1,12
		4	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	1,46
2,8	28	3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	1,27
3,2	32	3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	1,46
		4	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	1,91
3,6	36	3	2,10	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99	1,65
		4	2,75	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04	2,16
4	40	3	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	1,85
		4	3,08	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13	2,42
		5	3,79	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17	2,97
4,5	45	3	2,65	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21	2,08
		4	3,48	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10	1,26	2,73
		5	4,29	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30	3,37
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,30	1,95	2,95	1,00	12,40	1,33	2,32
		4	3,89	9,21	1,54	14,60	1,94	3,80	0,99	16,60	1,38	3,05
		5	4,80	11,20	1,53	17,80	1,92	4,63	0,98	20,90	1,42	3,77
5,6	56	4	4,38	13,10	1,73	20,80	2,18	5,41	1,11	23,30	1,52	3,44
		5	5,41	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	29,20	1,57	4,25
6,3	63	4	4,96	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	33,10	1,69	3,90
		5	6,13	23,10	1,94	36,60	2,44	9,52	1,25	41,50	1,74	4,81
		6	7,28	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	50,00	1,78	5,72
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	10,10	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8	11,50	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15	9,02
		9	12,80	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18	10,10

Таблица III (*продолжение*)

Номер профиля	b, мм	d, мм	Площадь сечения, $см^2$	x—x: J_x, $см^4$	x—x: i_x, см	x_0—x_0: J_{x_0}max, $см^4$	x_0—x_0: i_{x_0}max, см	y_0—y_0: J_{y_0}min, $см^4$	y_0—y_0: i_{y_0}min, см	x_1—x_1: J_{x_1}, $см^4$	z_0, см	Масса 1 м длины профиля, кг
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	94,0	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19	7,36
		7	10,80	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23	8,51
		8	12,30	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27	9,65
9	90	6	10,60	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43	8,33
		7	12,30	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47	9,64
		8	13,90	106,0	2,76	168,0	3,48	43,8	1,77	194,0	2,51	10,90
		9	15,60	118,0	2,75	186,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55	12,20
10	100	6,5	12,80	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,99	214,0	2,68	10,10
		7	13,80	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	231,0	2,71	10,80
		8	15,60	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	265,0	2,75	12,20
		10	19,20	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	333,0	2,83	15,10
		12	22,80	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	402,0	2,91	17,90
		14	26,30	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	472,0	2,99	20,60
		16	29,70	264,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	542,0	3,06	23,30
11	110	7	15,20	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	308,0	2,96	11,90
		8	17,20	198,0	3,39	315,0	4,28	81,8	2,18	353,0	3,00	13,50
12,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5
16	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31	111,4

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Николай Михайлович Беляев

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

М., 1976 г., 608 стр. с илл.

Редактор *А. Г. Мордвинцев*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *З. В. Автонеева, Л. С. Сомова*

Сдано в набор 26.07. 1976 г. Подписано к печати 26.11. 1976 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$. Физ. печ. л. 38. Условн. печ. л. 38. Уч.-изд. л. 37,48. Тираж 200 000 экз. Т-20353. Цена книги 1 р. 15 к. Заказ № 580.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома
при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
Москва, М-54, Валовая, 28